ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.В. Красильников, В.С. Тоискин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Учебно-методическое пособие

Ставрополь
2008

УДК 159.9:51
ББК 88.4
К 17

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Ставропольского государственного
педагогического института

Рецензенты:
начальник кафедры прикладной информатики и информационных технологий в системах управления Ставропольского военного института связи ракетных войск
кандидат технических наук, профессор **Ряднов С.А.**
доцент кафедры физико-математических дисциплин Ставропольского государственного педагогического института
кандидат физико-математических наук, доцент **Косова Е.Н.**

Красильников В.В., Тоискин В.С.
К 17 **Математические методы** в психолого-педагогических исследованиях: Учебно-методическое пособие. – Ставрополь: Изд-во СГПИ, 2008. – 84 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются математические основы психолого-педагогических исследований в части статистической обработки результатов исследований. Основное внимание уделено описательной статистике и методам статистического вывода. Рассматриваемые методы сопровождаются примерами, доведенными до конкретных результатов. Демонстрируются методические подходы к использованию вычислительной техники для решения задач статистической обработки результатов психолого-педагогических экспериментов.

Предназначено для студентов и аспирантов психолого-педагогического профиля подготовки. Может быть полезным также преподавателям и научным работникам.

УДК 159.9:51
ББК 88.4

ВВЕДЕНИЕ

Применение математики к другим аукам
имеет смысл только в единении
с глубокой теорией конкретного явления.
Об этом важно помнить, чтобы не
сбиваться на простую игру в формулы,
за которой не стоит никакого реального
содержания.

Академик Ю.А. Митропольский

До последнего времени психолого-педагогические исследования проводились в основном на качественном уровне. В них хорошо просматривается эмпирическая часть, отражающая богатейший материал наблюдений и экспериментов, есть теоретические обобщения, завершающие систематизацию материала.

Проникновение в педагогику и психологию методов социологии, кибернетики, математики стало характерной чертой современного психолого-педагогического исследования. Особое значение приобрел постепенный переход от качественного описания явлений и закономерностей к их количественному моделированию. Математика превращается из предмета преподавания в инструмент психолого-педагогического исследования. При этом педагогическая теория приобретает необходимую строгость и устойчивость.

Теоретические методы исследования в психологии и педагогике дают возможность раскрыть качественные характеристики изучаемых явлений. Эти характеристики будут полнее и глубже, если накопленный эмпирический материал подвергнуть количественной обработке. Однако, проблема количественных измерений в рамках психолого-педагогических исследований очень сложна. Эта сложность заключается, прежде всего, в субъективно-причинном многообразии педагогической деятельности и ее результатов, в самом объекте измерения, находящимся в состоянии непрерывного движения и изменения. Вместе с тем введение в исследование количественных показателей сегодня является необходимым и обязательным компонентом получения объективных данных о результатах педагогического труда. Как правило, эти данные могут быть получены как путем прямого или опосредованного измерения различных составляющих педагогического процесса, так и посредством количественной оценки соответствующих параметров адекватно построенной его математической модели. С этой целью при исследовании проблем психологии и педагогики применяются методы математической статистики. С их помощью решаются различные задачи: обработка фактического материала, получение новых, дополнительных данных, обоснование научной организации исследования и другие.

В педагогике и психологии установление истины особенно затруднительно, т. к. объект изучения исключительно изменчив и обладает сознанием. На него влияют погода, общественные события, различного рода психологические факторы. Ведь даже у превосходного педагога бывают неудачи, срывы, связанные с его настроением, физическим состоянием, быстротой реакции и т. д. Не всегда удается понять психологическую настроенность учащихся класса, их мотивацию. Все это оказывает большое влияние на качество обучения. Сложность применения математических методов в гуманитарных исследованиях, и в том, что сложно измерить природу и характер психолого-педагогических явлений. Они неметричны. Точнее, они кажутся неметричными, пока нет подходящих математических измерителей этих явлений. Классический математический аппарат не подходит для анализа явлений такой сложности, как педагогические.

Математизация гуманитарных исследований несет в себе огромный гносеологический потенциал. Она не только избавляет науку от одностороннего качественного описания, но и устраивает строгую проверку достигнутому, представляя для этого объективные методы проверки и более совершенный язык.

Одним из интереснейших математических методов, который можно широко использовать как в педагогике, так и в психологии и философии, является структурно-системный анализ, применяемый для описания и количественной характеристики явлений духовной жизни. Структурно-системный критерий является инструментом, с помощью которого осуществляется выбор интересующих нас признаков и их измерение. Его алгоритм может быть следующим:

четко формулируем цели критерия и педагогическую задачу измерения;

рассматриваем и анализируем объект исследования и его основные признаки, отбираем только существенные, которые можно взять в качестве эталона;

формируем структуру критерия: в вершину помещаем интересующий нас признак, остальные размещаем ниже, как соподчиненные;

определяем весовые коэффициенты у эталонных признаков статистическим методом, нормируем полученные значения;

разрабатываем измерительную подструктуру критерия: для каждого эталонного признака подбираем серию соподчиненных ему признаков (не меньше шести), характеризующих его развитие или изменение в реальных ситуациях эксперимента;

разрабатываем нормы оценивания для элементов измерительной подструктуры критерия в виде балльной или процентной системы оценивания.

В итоге получаем структуру критерия, состоящую из трех основных частей: обобщенной характеристики исследуемого объекта, являющегося целью психолого-педагогического измерения; эталонной системы признаков, объединяющей в себе наиболее существенные его стороны, и измерительной подструктуры, состоящей из пучков с градационными элементами, соподчиненных соответствующим признакам эталона.

Измерение - важнейшая функция структурно-системного критерия. Суть его состоит в том, что эталонная структура критерия отображает в себе состояние исследуемого объекта по интересующим нас признакам и уровню сформированности. В зависимости от того, какую степень соответствия мы обнаружим между оригиналом и моделью - эталоном,- таков и будет результат измерения. Структурно-системный критерий, с одной стороны, выступает моделью исследуемого объекта, а с другой - является измерительным инструментом. Каждую из его характеристик можно представить как количественную величину, в результате чего модель превращается в фиксируемый и экспериментально изменяемый объект по форме и внутреннему содержанию.

Таким образом, привлечение математических методов в педагогику должно служить более рациональному использованию уже накопленного опыта и более целесообразному обобщению результатов педагогического эксперимента и результатов наблюдений, а также для моделирования, диагностики, прогнозирования и компьютеризации учебно-воспитательного процесса.

В психологии измерение явлений есть процесс, который состоит в определении степени, в которой объект или совокупность объектов обладают определенной характеристикой. Если измерение касается свойства или характеристики, присущих человеку, то естественно, что данное свойство может быть присуще ему в различной степени. Таким образом, измерение есть способ размещения характеристик индивидуума или группы индивидуумов на континууме (шкале) относительно одной из его характеристик. Измерение является преимущественно количественным процессом и состоит в приписывании числовых величин явлениям, объектам.

Каждое измерение должно быть связано с чисто описательной процедурой и никогда не должно являться всего лишь суждением об измеряемой величине, то есть оценкой. Измерение, в отличие от оценки, есть описательное суждение об эмпирическом факте. Психология стала научной, когда строгое наблюдение, базирующееся на измерении, заменило произвольную оценку. На первых этапах развития психология обратилась к физическим методам, и таким образом зародилась одна из первых областей психологии – психофизика. Значение исследования зависит как от уровня применяемых методов измерения, так и от плана самого исследования. Необходимо проверить, соответствует ли метод, выбранный для исследования, предмету исследования и обеспечивает ли он соответствующее измерение рассматриваемых переменных.

Чтобы быть полезными, методы должны обеспечивать точность и надежность информации. Точность научной информации зависит от критериев, выделенных ниже.

1. Достоверность. Процесс измерения является тем более достоверным, чем слабее влияние случайных факторов и чем более постоянные результаты он дает. При создании методов, предназначенных для измерения переменных характеристик (например, поведения), считается, что нестабильность результатов во времени необязательно является показателем ошибки. Понятие достоверности, следовательно, расширено и включает также понятие стабильности и однородности. Под стабильностью подразумевается постоянство полученных результатов при различных условиях применения одного и того же инструмента. Необходимо различать изменчивость как результат реальных модификаций изучаемой характеристики и изменчивость как результат модификаций, вызываемых инструментом.

2. Объективность. Каждое измерение, проведенное человеком, допускает определенную степень субъективности. Существуют статистические методы для определения степени объективности измерения. Но в целом объективность измерения определяется путем оценки достоверности, поскольку считается, что достоверность методики обусловлена ее объективностью.

3. Валидность. В данном случае оценивается, измеряется ли рассматриваемая характеристика или, напротив, измерение отражает влияние других факторов. Валидность инструмента измерений оценивается в зависимости от степени соответствия результатов другим фактам. Таким образом, валидность устанавливается относительно результатов использования другого инструмента измерений.

В гуманитарных науках мало методик, которые удовлетворяют всем этим критериям. Задача исследователя заключается в том, чтобы отделить результаты измерений, связанные с реальными отличиями, существующими между испытуемыми, от результатов, полученных за счет случайных влияний, то есть установить ошибку измерения. Исследователь должен знать, какие статистические процедуры позволяют аннулировать эти влияния.

Данное учебное пособие имеет целью в некоторой степени устранить имеющиеся недостатки в области подготовки студентов, аспирантов к применению математических методов в проводимых исследованиях. Авторы отдают себе отчет в том, что уровень математической подготовки студентов-гуманитариев не позволяет глубоко вникнуть в суть математических моделей. В связи с этим пособие построено таким образом, что приводятся основные сведения теоретического характера и подкрепляются конкретными примерами, иллюстрирующими технологию использования теории при решении конкретных задач исследования.

Первый раздел пособия посвящен некоторым разделам математики (множества, матрицы, графы, теория вероятности), понимание которых определяет в некоторой степени математическую компетентность исследователя в области гуманитарных наук. Во втором разделе рассматриваются вопросы количественного описания и анализа экспериментальных данных. Третий раздел в основном посвящен применению в исследованиях таких разделов математической статистики, как описательная статистика и статистические выводы. В силу ограниченности объема фрагментарно отмечаются особенности и области применимости факторного анализа.

Практически решение всех примеров демонстрируется с применением вычислительной техники. Предполагается наличие первичных навыков работы с электронной таблицей Excel.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Существует мнение, что область знаний становится наукой, лишь применяя математику. Известный ученый Суходольский Г.В. в своей работе[1] отмечает: «С этим мнением, возможно, не согласятся многие гуманитарии. А зря: именно математика позволяет количественно сравнивать явления, проверять правильность словесных утверждений и тем самым добираться до истины либо приближаться к ней. Математика делает обозримыми длинные и подчас туманные словесные описания…. . Математические методы позволяют обоснованно прогнозировать будущие события».

Абстрактный характер математики, ее независимость от природы в широком смысле позволяют использовать математические методы и в психолого-педагогических исследованиях. Конечно, при этом важно, чтобы метод был адекватен объекту, для изучения которого применяется.

В психолого-педагогических исследованиях широко применяются математические методы, представляющие собой процедуры построения, преобразования, метризации и вычисления математических объектов. Эти процедуры основываются на теориях множеств, графов, матриц, вероятности и математической статистики. Учитывая то, что большинство исследователей в области гуманитарных наук не имеют серьезной математической подготовки, целесообразно изложить конспективно основные понятия перечисленных математических теорий для понимания сущности статистической обработки результатов психолого-педагогических измерений.

1.1. Элементы теории множеств

Обычный смысл слова «множество» - многое, мыслимое как целое. Первоначальная математическая теория множеств была создана

[1] Суходольский Г.В. Математические методы в психологии. 2- издание.- Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2006. С.11.

Г. Кантором в последней четверти XIX века. Согласно канторовскому определению, *множество* есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое. Это определение не накладывает никаких ограничений на природу элементов множества, что предоставляет нам значительную свободу.

В современной математике понятие множества является одним из основных. Универсальность этого понятия в том, что под него можно подвести любую совокупность явлений, предметов и объектов реального мира. Сами множества так же могут объединяться во множества (мультимножества).

Суть понятия "множество" вполне передается словами: «совокупность», «собрание», «набор» и т.д. Определить любое конкретное множество - значит определить, какие предметы (явления, объекты) принадлежат данному множеству, а какие не принадлежат. Иначе говоря, всякое множество однозначно определяется своими элементами.

Для того чтобы некоторую совокупность элементов можно было назвать множеством, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

должно существовать правило, позволяющее определить, принадлежит ли указанный элемент данной совокупности;

должно существовать правило, позволяющее отличать элементы друг от друга.

Как правило, множества обозначаются буквами латинского. Если множество A состоит из элементов $a, b, c, \dots$, это обозначается с помощью фигурных скобок: $A = \{a, b, c, \dots\}$. Если a есть элемент множества A , то это записывают следующим образом: $a \in A$. Если же a не является элементом множества A , то пишут $a \notin A$. Существует также специальное, так называемое пустое множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество является частью любого множества.

Для того, чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат (или могут принадлежать). Это можно сделать различными способами:

перечислением элементов: $M = \{m_1, m_2, \dots , m_n\}$;

характеристическим условием (свойством): $M = \{x \mid P(x)\}$;

порождающим правилом: $M = \{x \mid x = f(t)\}$;

Первый способ полностью описывает множество. Однако он применим только для конечных множеств. При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. В этом случае считается несущественным порядок перечисляемых элементов.

Пример 1.1. Задание множества первых пяти нечетных натуральных чисел перечислением элементов: $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Множество учащихся в классе M = {Иванов, Петров, Сидоров, …}. Множество качеств M = {хороший, высокий, умный, здоровый, добрый}.

Второй способ позволяет определить принадлежность элемента x множеству M и, поэтому, пригоден для описания не только конечных, но и бесконечных множеств. Характеристическое условие обычно задается в форме логического утверждения, которое может выражаться словами, математическими уравнениями, неравенствами. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае не принадлежит. Характеристическое условие может состоять из нескольких условий: в таком случае в записи могут использоваться следующие знаки:

$\wedge$ - равносильно «и»;
$\vee$ - равносильно "или";
 - квантор всеобщности;
$\exists$ - квантор существования.

Третий способ задания множества сводится к построению конкретных представителей как конечных, так и бесконечных множеств. Порождающее правило описывает способ построения объектов, которые являются элементами определяемого множества.

Пример 1.2. Зададим два множества перечислением: $M_1 := \{1,2\}$; $M_2 := \{1\}$. Зададим множество M_3 правилом построения его элементов:

$$M_3 := \{x \mid x = (x_1,x_2),\ x_1 O M_1,\ x_2 O M_2\}.$$

Правило читается следующим образом: Для того, чтобы построить элемент множества M_3, надо взять один объект из множества M_1, второй объект из множества M_2 и составить из них упорядоченную пару (часто говорят кортеж длины 2). Руководствуясь этим правилом, можно построить каждый элемент множества M_3: (1,1), (2,1).

Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть, если из $x \in A$ следует $x \in B$ и обратно, из $x \in B$ следует $x \in A$.

Формально равенство двух множеств записывается следующим образом: $A=B$ ó . $x \mid x \in A$ у $x \in B$. Равенство множеств A и B записывают в виде $A=B$.

Множество A является *подмножеством* множества B, если любой элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит множеству B. Формальная запись: $A \subseteq B$ ó . $x \mid x \in A \wedge x \in B$.

Если A является подмножеством B, то B называется *надмножеством* А.

Если среди данных множеств одно из них является подмножеством другого, это обозначает, что они связаны отношением включения.

Отношение нестрогого включения обозначается «$\subseteq$». Отношение строгого включения обозначается «$\subset$ ». $A \in B$ обозначает, что множество *A содержится в B*, при чем A может быть *равным* множеству B. Строгое включение исключает такое равенство. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Основными операциями над множествами являются *объединение, пересечение и разность*.

Суммой, или *объединением* произвольного конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Пример 1.3. $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$. $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Произведением, или *пересечением* любого конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Пример 1.4. $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 7, 9\}$. $A \cap B=\{1, 3\}$.

Разностью между множеством A и множеством B называется множество всех элементов из A, не являющихся элементами множества B: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$.

Пример 1.5. $A=\{1, 3, 5, 18\}$, $B=\{1, 3, 7, 9\}$. $A \backslash B=\{5, 18\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество всех элементов из A, не являющихся элементами множества B в объединении с множеством всех элементов из B, не являющихся элементами множества A. $A \Delta B=(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Пример 1.6. $A=\{1, 3, 5, 18\}$, $B=\{1, 3, 7, 12\}$. $A \Delta B=\{5, 7, 12, 18\}$.

Абсолютным дополнением множества A до множества U (A – подмножестов U) называется множество, содержащее *все* элементы множества U, которые не принадлежат множеству A. $A' = \overline{A} = U \backslash A$, где U - универсальное множество. $\overline{A} = U \backslash A = \{x \mid x \in U \vee x \notin A\}$.

Обычно все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются *подмножествами* некоторого множества U, которое называют универсальным. Например, для числовых множеств универсальным является множество всех действительных чисел R, для точечных множеств на плоскости - множество точек всей плоскости и т.д.

При выполнений операций над множествами соблюдается определенный приоритет операций (порядок их выполнения). Первой выполняется та операция, приоритет которой выше. Приоритет операции пересечения множеств выше приоритета операции объединения. Приоритет операции пересечения множеств выше приоритета операции вычитания. Объединение и вычитание множеств считают равноправными операциями.

Операции множеств и связанные с ними соотношения представляются наглядно с помощью диаграмм Эйлера-Венна (названных по имени русского математика Леонарда Эйлера (1707-1783гг.) и английского логика Джона Венна (1834-1923гг.). На этих диаграммах любые множества изображаются кругами, пересекающими друг друга, исходя из того, что внутренними точками круга изображаются элементы множества. Общей частью двух кругов, пересекающих друг друга, представляются возможные общие элементы двух множеств. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника. Единичный элемент множества – точкой в круге.

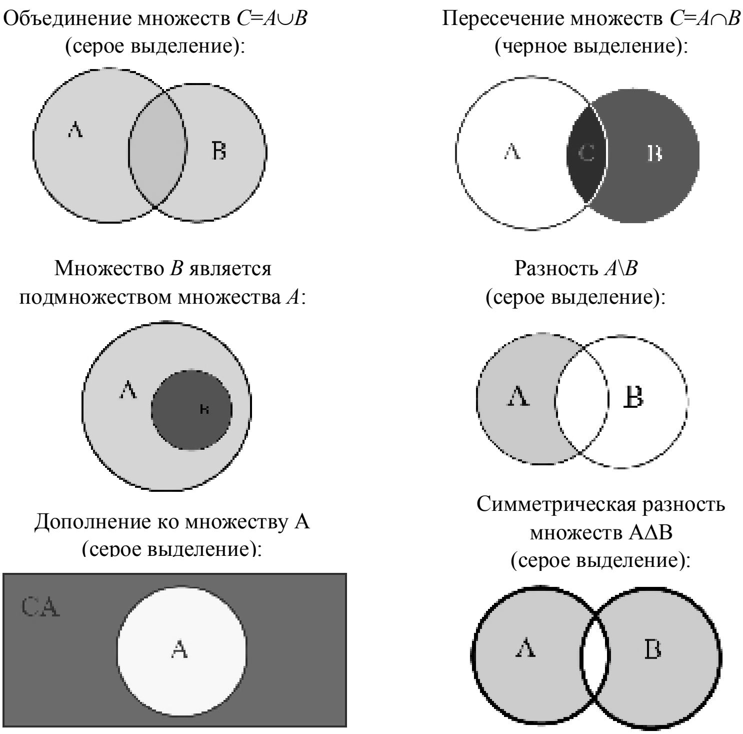


Рис. 1.1. Представление операций над множествами кругами Эйлера

Одним из способов конструирования новых объектов из уже имеющихся множеств является *декартово (прямое) произведение множеств*.

Пусть A и B - множества. Выражение вида (a, b) , где aMA и bMB, называется *упорядоченной парой*. Элемент a называют первой координатой (компонентой) пары, элемент b - второй координатой (компонентой) пары.

Равенство вида $(a, b)=(c, d)$ означает, что $a=c$ и $b=d$. В общем случае, можно рассматривать *упорядоченную n-ку* $(a_1, a_2, a_3, \ldots ,a_n)$ из элементов $a_1\in A_1, a_2\in A_2 \ldots a_n\in A_n$. Упорядоченные n-ки иначе называют *наборами* или *кортежами*.

Декартовым (*прямым*) *произведением множеств* $A_1, A_2,\ldots A_n$ называется множество упорядоченных наборов (кортежей) вида $A1\text{x}A2\text{x}\ldots\text{x}An=\{(a_1, a_2,\ldots a_n \mid a_i\in A_i\}$.

Операция нахождения декартова произведения множеств называется *декартовым умножением множеств.*

Степенью декартового произведения $A_1 \text{x} A_2 \text{x} \ldots \text{x} A_n$ называется число множеств n, входящих в это декартово произведение. Если все множества A_i одинаковы, то используют обозначение $A^n = A \text{x} A \text{x} \ldots \text{x} A$.

Подмножество R декартового произведения множеств $A_1 \text{x} A_2 \text{x} \ldots \text{x} A_n$ называется отношением степени n (n-арным отношением).

Мощность множества кортежей, входящих в отношение R, называют мощностью отношения R. Понятие отношения является очень важным не только с математической точки зрения. Отношения являются математическим аналогом *матриц*.

Все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Если же множество состоит из *разнотипных* числовых кортежей, то это множество не является отношением ни в R^1, ни в R^2, ни в R^n. Когда отношение есть само декартово произведение $A_1 \text{x} A_2 \text{x} \ldots \text{x} A_n$, отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения. Это значит, что для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие - нет. Этот критерий, по существу, определяет *смысл* (*семантику*) отношения. Действительно, каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящее от n параметров и определяющее, будет ли кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежать отношению R. Это логическое выражение называют *предикатом отношения* R. Более точно, кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда предикат этого отношения $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принимает значение «истина». Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между n-арными отношениями и n-местными предикатами.

В психолого-педагогических моделях часто используются бинарные отношения, т.е. отношения, заданные на декартовом произведении двух множеств $A_1 \text{x} A_2$. Отношение R на множестве A^2 называется отношением *эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1. $(x, x) \in R$ для всех $x \in A$ (рефлексивность).
2. Если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$ (симметричность).
3. Если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$ (транзитивность).

Обычно отношение эквивалентности обозначают знаком «=» или «$\approx$». Говорят, что это отношение задано на множестве A.

Всякое отношение эквивалентности, заданное на множестве, разбивает элементы множества на классы эквивалентности.

Кантовская теория множеств постулирует существование только таких множеств, в которых каждый элемент единичен, т.е. $\{a\} \cup \{a\} = \{a\}$. Никакие подмножества из одинаковых элементов невозможны. Однако, если допустить существование одинаковых элементов в подмножествах, то приходим к понятию *мультимножества*.

Для получения мультимножества из обычных множеств необходимо снять постулат об объединений одинаковых единичных множеств, заменить операцию объединения на такую, которая отражала бы накапливаемую частоту одинаковых элементов, имеющихся в слагаемых. Такая операция называется «Обобщение» и обозначается символом «О».

Результатом обобщения является множество, в котором записываются все элементы слагаемых развернутой или свернутой формах.

Пример 1.7. $\{ab\}\text{О}\{bc\}\text{О}\{cde\}=\{abbccde\}=\{a2b2cde\}$.

В общем виде свернутая форма мультимножества выглядит, например, следующим образом: $A=\{f_a a, f_b b, f_c c, ..., f_k k\}$, где f_a, f_b, f_c,…,f_k – кратности элементов множества (весовые функции), которые могут получать любую содержательную трактовку.

В случае обобщения мультимножеств кратности одноименных слагаемых суммируются в обычном алгебраическом смысле.

Пример 1.8. {5М,2Ж}О{2М,5Ж,3Р}={7М,7Ж,3Р}, где аббревиатуры элементов М, Ж, Р означают: мужчина, женщина, ребенок.

Операция, обратная к обобщению, может быть названа «конкретизацией»[1]. Она аналогична вычитанию множеств, но выполняется по законам обычной алгебры.

Пример 1.9. {5М,2Ж}-{2М,5Ж,3Р}={3М,-2Ж,-3Р}. Отрицательные кратности могут означать дефицит соответствующих элементов.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества A по отношению R называется «*фактор-множеством*» множества A по отношению R и обозначается A/R. Например, если $A=\{f_a a, f_b b, f_c c\}$ - мультимножество, то элементы (a, b, c) – это фактор-множество мультимножества A.

Пример 1.10. A={Ваня, Петя, Маша, Ира, Кира} = $\{\overset{\text{м}}{(\text{В, П})},\overset{\text{ж}}{(\text{М,И,К})}\}$, здесь м, ж – мужчины, женщины – это фактор-множество испытуемых по отношению «половой диморфизм».

Понятие фактор-множества необходимо для решения статистических задач факторного анализа.

Отношение R на множестве A^2 называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

1. Если $(x, y)\in R$ и $(y, x)\in R$, то $x=y$ (антисимметричность).
2. Если $(x, y)\in R$ и $(y, z)\in R$, то $(x, z)\in R$ (транзитивность).

Обычно отношение порядка обозначают знаком « ф >». Если для двух элементов x и y выполняется x ф y , то говорят, что x «предшествует» y.

Отношение R на декартовом произведении двух множеств A_1хA_2 называется *функциональным отношением*, если оно обладает следующим свойством: если $(x, y)\in R$ и $(x, z)\in R$, то $y=z$ (однозначность функции).

---

[1] Суходольский Г.В. Математические методы в психологии. 2- издание.- Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2006. С.26.

Обычно, функциональное отношение обозначают в виде *функциональной зависимости* - $(x, y)\in R$ тогда и только тогда, когда $y=f(x)$. Функциональные отношения (подмножества декартового произведения) называют иначе *графиком функциональной зависимости*.

Пример 1.11. Пусть множество A есть следующее множество молодых людей: {Вовочка, Петя, Маша, Лена}, причем известны следующие факты:

Вовочка любит Вовочку (эгоист);

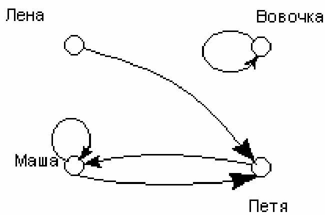
Петя любит Машу (взаимно);

Маша любит Петю (взаимно);

Маша любит Машу (себя не забывает);

Лена любит Петю (несчастная любовь).

Информацию о взаимоотношения данных молодых людей можно описать бинарным отношением «любить», заданном на множестве A^2. Это отношение можно описать несколькими способами.



Способ 1. Перечисление фактов в виде произвольного текста (как это сделано выше).

Способ 2. В виде графа взаимоотношений:

Способ 3.

При помощи матрицы взаимоотношений

Кого / Кто	Вовочка	Петя	Маша	Лена
Вовочка	Любит			
Петя			Любит	
Маша		Любит	Любит	
Лена		Любит		

Способ 4.

При помощи таблицы фактов

Кто любит	Кого любят
Вовочка	Вовочка
Петя	Маша
Маша	Петя
Маша	Маша
Лена	Петя

В психологии индивидуальности применяется выражение «многомногозначные» отображения. Имеется в виду, что они не взаимны и частичны: для каждого прообраза происходит отображение в какое-либо подмножество образов, и наоборот, для каждого образа существует свое подмножество образов. Типичным примером такого отображения является корреляция. Для приложений в педагогике и психологии используются одномногозначные и многооднозначные отображения. Примером первых может служить слова лектора, отображенные в аудиторию, примером вторых – чтение газет отдельным человеком.

Некоторые отображения отражают структуру множеств, между которым они установлены. Такие отображения называются *морфизмами*. Разделяются изоморфизмы, гомоморфизмы и автоморфизмы.

Изоморфизм – это отображение, воспроизводящее в образе структуру прообраза. Например, множества A={Петя, Ваня, Саша, Наташа} и B={Саша, Ваня, Петя, Наташа} изоморфны. *Гомоморрфизм* – это отображение, воспроизводящее в образе структуру прообраза не полностью, ав общих чертах, например, масштабные преобразования гомоморфные.. *Автоморфизм* – это отображение множества на себя.

1.2. Общие сведения о графах

Графы представляют собой наиболее абстрактную структуру, с которой приходится сталкиваться в теории и практике исследований. Любая система, предполагающая наличие дискретных состояний или наличие узлов и переходов между ними может быть описана графом. Соединения между узлами графа называются ребрами. Графом - это математический объект $G(V,L)$, где $V=\{v_i\}$ – множество вершин, $L=\{l_{ij}\}$ – множество ребер, соединяющих вершины; $i, j = \overline{1,N}$; N – мощность множества V (количество вершин).

Граф могут быть ориентированными, неориентированными и смешанными. В *неориентированном* графе (неографе) все ребра ненаправленные. В *ориентированном* графе (орграфе) все ребра имеют направления, обозначаемое стрелкой. В *смешанном* графе сочетаются ориентированные и неориентированные ребра. Ребрам могут быть присвоены определенные веса или метки. На рис. 1.2 А и 1.2 Б приведены примеры обычного и ориентированного графа. Ребра не могут иметь общих точек кроме вершин (узлов) графа. Замкнутая кривая (петля) в L может иметь только одну точку из множества V, а каждая незамкнутая кривая в L имеет ровно две точки множества V. Если V и L конечные множества, то и граф им соответствующий называется конечным. Граф называется вырожденным, если он не имеет ребер. Параллельными ребрами графа называются такие, которые имеют общие узлы начала и конца.

Графы отображаются на плоскости набором точек и соединяющих их линий или векторов. При этом грани могут отображаться и кривыми линиями, а их длина не играет никакой роли.

Граф G называется *плоским*, если его можно отобразить в плоскости без пересечения его граней.

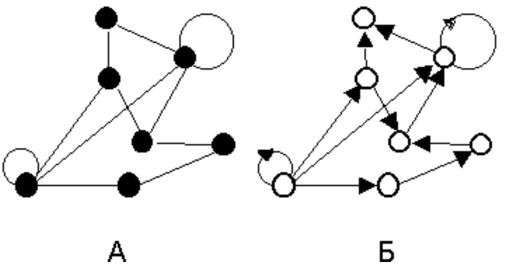


Рис. 1.2. Неориентированный и ориентированный графы

Неориентированный граф G называется *связанным*, если для любых двух узлов $i,j \in V$ существует последовательность ребер из множества L, соединяющий i и j. Граф G связан тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2 так, чтобы обе граничные точки каждого ребра находились в одном и том же подмножестве.

Графы суть естественные средства для визуализации абстракции отношений.

Пример 1.12. Граф учебной информации – это множество элементов содержания, построенных в определенных связях и отношениях. В отличие от матрицы связей, граф отражает выбранный преподавателем замысел построения и изложения учебного материала. Основные виды отображения на графе учебной информации приведены на рис. 1.3.

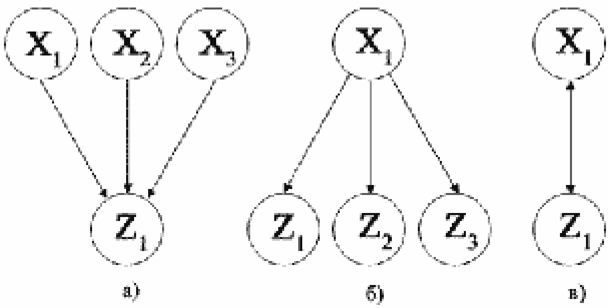


Рис. 1.3. Основные виды отображения на графе учебной информации:
а) индуктивное отображение; б) дедуктивное отображение;
в) взаимно-равнозначное отображение

Метод индукции означает переход от знаний меньшей общности к знаниям большей общности (рис. 1.3, а). Дедуктивный метод, который применяется, как правило, в теоретических науках, базирующихся на математических методах, означает переход от изучения более общих положений и теорий к вопросам частным (рис. 1.3, б). Линейная структура (рис. 1.3, в) означает взаимно-однозначное отображение элементов содержания одинаковой общности. На рис. 1.4 представлена схема абстрактного графа, отображающего логику изучения содержания темы. Основаниями в нем являются вопросы темы (I, II, III, ... ,N), а их элементы обозначены цифрами 2, 3, …, i, …, k-1, k. Последовательность изложения вопросов соответствует последовательности оснований графа сверху вниз, последовательность элементов (подвопросов), входящих в вопрос темы, - слева направо.

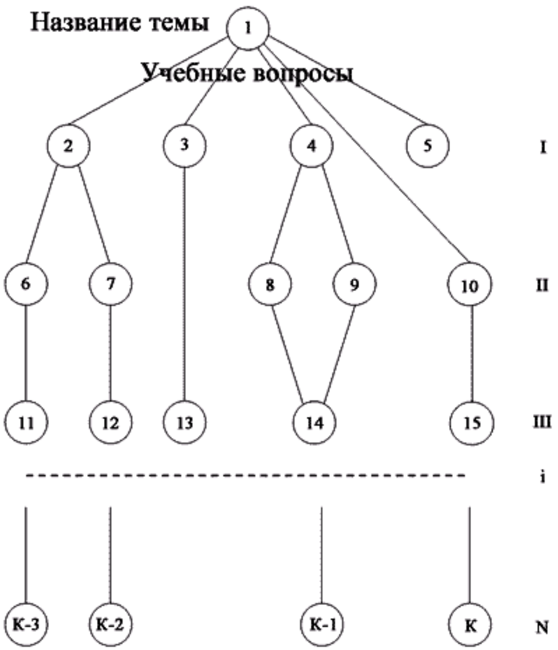


Рис. 1.4. Схема графа отображения содержания темы

Применяемые в педагогике и психологии математические методы должны быть адекватными сложным психолого-педагогическим объектам. Это, по сути, означает гомоморфизм.

1.3. Матрицы

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть *матрицей* размера $p \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется *квадратной*. Элементы a_{ii} образуют *главную диагональ* матрицы.

Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$\mathbf{A} = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \text{j}, p;\ j = 1, 2, 3, \text{j}, q.$$

Две матрицы одинаковой размерности $p \times q$ называются *равными*, если в них одинаковые места заняты равными числами (на пересечении i-й строки и j-го столбца в одной и в другой матрице стоит одно и то же число; i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q).

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – некоторая матрица и a – произвольное число, тогда $a\mathbf{A} = (aa_{ij})$, то есть при умножении матрицы А на число a все числа, составляющие матрицу А, умножаются на число a.

Пусть **A** и **B** – матрицы одинаковой размерности $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, тогда их сумма **A** + **B** – матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа.

Матрицу **A** можно умножить на матрицу **B**, то есть найти матрицу **C**=**AB**, если число столбцов n матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**, при этом матрица **C** будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы **A** и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы **B**. Каждый элемент матрицы **C** определяется формулой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Элемент c_{ij} матрицы-произведения С равен сумме произведений элементов i-строки первой матрицы- сомножителя на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы-сомножителя.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц **AB**, то произведение **BA**, вообще говоря, не определено.

Пример 1.13. Перемножение матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+33\cdot 6+4\cdot(-3) & 1\cdot 5+2\cdot(-4)+3\cdot 2+4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3+1\cdot 1+(-1)\cdot 6+(-3)\cdot(-3) & 2\cdot 5+1\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+(-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot 5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 2+1\cdot(-1) & 4\cdot 5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (8, 4).$$

Если **AB** и **BA** одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что умножение матриц не коммутативно.

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) **A** + **B** = **B** + **A**;
2) a (**A** + **B**) = a**A** + a**B**;
3) (**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**);
4) (**AB**)***C*** = **A**(**BC**);
5) **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *вектором* (*вектором-строкой*). Матрица, состоящая из одного столбца, также называется *вектором* (*вектором-столбцом*).

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы – нули. Очевидно равенство **A** + (–1)**A** = 0. Здесь в правой части через 0 обозначена нулевая матрица той же размерности, что и матрица **A**.

Квадратная матрица размера n называется единичной, если все её элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные – нули. Единичную матрицу можно определить формулами:

$a_{ij} = 1$ при $i = j$;
$a_{ij} = 0$ при i № j.

Единичная матрица, как правило, обозначается буквой **E**:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить справедливость равенств: $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$. Здесь $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, и размеры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ одинаковы.

Обратной матрицей к матрице $\mathbf{A}$ называется такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой справедливы равенства:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

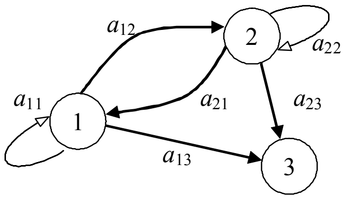
Очевидно, что $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратная матрица того же размера, что и матрица $\mathbf{A}$. Сразу заметим, что не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу.

К числу качественных неалгебраических операций относятся вращения и перестройки: объем матрицы не меняется, она остается цельным объектом.

В линейной алгебре используется всего один вид вращении - *транспонирование*. Это вращение производится относительно оси, проходящей из левого верхнего в правый нижний угол матрицы. В результате транспонирования строки и столбцы меняются местами.

Перестройка заключается в изменении пометок (изменении порядка следования строк или столбцов).

Любой матрице можно поставить в соответствие граф, а каждому графу – соответствующую матрицу. Изобразительная наглядность графов и качественно-количественная точность матриц приводит к тому, что графо-матричные отображения являются важным средством научного познания. Вспомним то, что графы в наглядном виде позволяют представлять элементы множеств, мультимножеств и отношения между ними.



$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Рис. 1.5. Графо-матричное отображение

1.4. Основные понятия и определения теории вероятностей

Теория вероятностей – это наука, изучающая закономерности, порожденные случайными событиями.

Психолого-педагогические явления относятся к числу массовых: они охватывают большие совокупности людей, повторяются из года в год, совершаются непрерывно. Показатели (параметры, результаты) педагогического процесса имеют вероятностный характер: одно и тоже педагогическое воздействие может привести к различным последствиям. Тем не менее, при многократном воспроизведении условий определенные следствия появляются чаще других, - это и есть проявление так называемых статистических закономерностей.

Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события.

Под *событием* понимается такой результат наблюдения или эксперимента, который при осуществлении некоторого комплекса условий может произойти или не произойти. Каждое осуществление этого комплекса условий будем называть *испытанием*.

Если событие появляется при каждом испытании, то оно называется *достоверным*. Если событие не может появиться ни при каком испытании, то оно называется *невозможным*. Событие называется *случайным*, если в каждом испытании оно может либо произойти, либо не произойти. В дальнейшем случайное событие будем называть просто событием. События будем обозначать буквами A, B, C, … .

Каждое случайное событие, например есть следствие действия очень многих случайных причин. Невозможно учесть влияние всех этих причин на результат, поскольку число их очень велико и неизвестны законы их действия. Поэтому нельзя предсказать, произойдет единичное событие или нет. Если испытания могут повторяться многократно, то большое число случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям.

Пусть произведено N испытаний, A - некоторое событие. Обозначим через m число тех из N испытаний, в которых появилось событие A. Отношение $f_A = \dfrac{\mu}{N}$ называется частотой события A в N испытаниях.

Очевидны следующие свойства частоты события A:

1. $0 \le f_A \le 1$.

2. Если A достоверное событие, то $f_A = 1$.

3. Если A невозможное событие, то $f_A = 0$.

Представим себе эксперимент, состоящий в подбрасывании монеты. Данные этого эксперимента помещены в таблице. Графическая иллюстрация эксперимента показана на рис. 1.6. Видим, как изменяется относительная частота появления герба с ростом числа испытаний.

Существует обширный круг явлений, характеризуемый свойством устойчивости частот. Свойство устойчивости частот состоит в следующем: если найти частоты события *A* для нескольких достаточно длинных серий испытаний, то эти частоты будут мало отличаться одна от другой, причем эти отклонения будут вообще тем меньше, чем больше число испытаний.

Таблица 1

Число испытаний N	Относительная частота выпадения герба μ
5000	2448
10000	4964
15000	7562
20000	10011
25000	12486
30000	15098
32000	16067

Рис. 1.6. Результаты испытаний

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий *A* или *B*, называется *суммой событий A* и *B* и обозначается *A*+*B*.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий *A* и *B*, называется *произведением событий A* и *B* и обозначается *AB*.

Два события называются *несовместными*, если они не могут появиться вместе в результате одного испытания.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Для противополжных событий A и $\overline{A}$ выполняются два условия: $A+\overline{A}$ - достоверное событие, $A\overline{A}$ - невозможное событие.

События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Одно из основных понятий теории вероятностей *вероятность*.. Существует несколько определений этого понятия. Приведем сначала, так называемое, классическое определение вероятности события.

Вероятностью события А называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех равновозможных исходов испытания. Итак, вероятность события А определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих A, n - число всех возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Это классическое определение вероятности.

Как и любая другая область математики теория вероятностей может быть построена на некоторой системе аксиом. Выбор системы аксиом должен быть таким, чтобы при этом были учтены наиболее важные случайные явления. Приведем аксиоматическое определение вероятности события, предложенное А.Н.Колмогоровым в 1933 г.

Обозначим через $\Omega=\{\omega_i\}$ - пространство элементарных событий. Система аксиом, которые в совокупности определяют понятие вероятности, формулируется следующим образом.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью.

Аксиома 2. $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$.

Из этой системы аксиом следует, что

1. Для любого случайного события A $0\le P(A)\le 1$.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Для любого события A $P(A)=1-P(\overline{A})$, где $\overline{A}$ - противоположное событие.

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Этот недостаток можно преодолеть, если ввести геометрическое определение вероятности события.

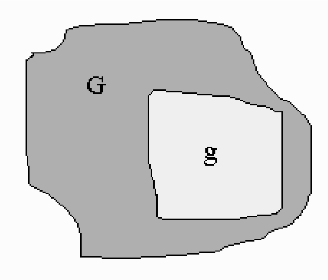


Рис. 1.7. Геометрическое определение вероятности

Пусть на плоскости имеется область G и в ней содержится другая область g (рис. 1.7).

Требуется найти вероятность события А, состоящего в том, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области G пропорциональна мере (*mes*) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

Это есть геометрическое определение вероятности.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Пусть имеется n различных элементов.

Перестановками называют комбинации из n элементов, отличающиеся порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Для удобства расчетов принято считать, что $0! = 1$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1).$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число всех возможных сочетаний

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A/B)$.

Условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A/B)=P(A)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB)=P(A)P(B/A) \text{ или } P(AB)=P(B)P(A/B).$$

Если событие A не зависит от события B, то событие В не зависит от события A. При этом вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса. Предположим, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий (такие события называются *гипотезами*). Пусть A - произвольное событие. Тогда вероятность события А может быть вычислена по формуле

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+P(H_n)P(A/H)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$$

Формула называется формулой полной вероятности. Формула полезна, если условные вероятности события A вычисляются легче, чем безусловная вероятность.

Предположим, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий. Пусть A - произвольное событие. Условная вероятность гипотезы H_i в предположении, что произошло событие A, может быть вычислена по формуле Байеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+P(H_n)P(A/H_n)}.$$

Вероятности гипотез $P(H_i)$ называются априорными, а вероятности гипотез $P(H_i/A)$ при условии, что событие A имело место, называются апостериорными. Сами формулы Байеса называются еще формулами вероятностей гипотез.

Случайная величина и закон ее распределения. Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины принято обозначать большими буквами X, Y, …, а принимаемые ими значения - соответствующими строчными буквами x, y, … .

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать конечное или счетное множество значений. Бесконечное множество называется счетным, если его элементы можно перенумеровать.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - возможные значения случайной величины X дискретного типа. Каждому значению x_i отвечает определенная вероятность $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2,...,n$. Дискретная случайная величина задается таблицей распределения вероятностей

X	$x_1 x_1$	$x_2 x_2$	$\dots$	$x_n x_n$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

При этом сумма всех вероятностей равна 1, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. Очевидно, что множество возможных значений непрерывной случайной величины является бесконечным.

Случайная величина непрерывного типа задается плотностью распределения вероятности $f(x)$, с помощью которой можно определять вероятности любых событий вида: $a < X < b$, а именно,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

График функции $y = f(x)$ называется кривой распределения. Он изображен на рис. 1.8.

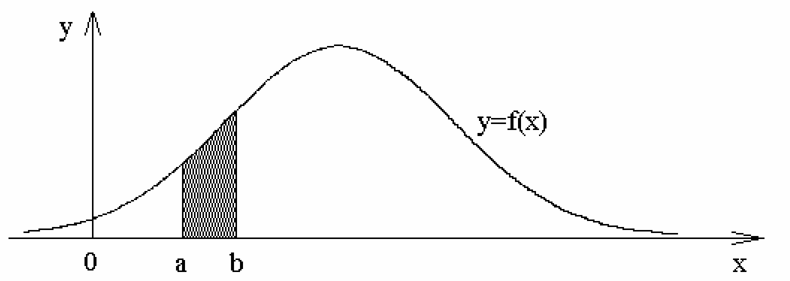


Рис. 1.8. График плотности распределения случайной величины x

Функция плотности распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$; 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения случайной величины*. Для дискретной случайной величины закон распределения задается таблицей, а для непрерывной случайной величины - плотностью распределения вероятностей.

Функция $F(x)=P(X<x)$ называется *функцией распределения вероятностей случайной величины X*. Она существует как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Отметим важнейшие свойства функции распределения вероятностей:

1. $F(x)$ - неубывающая функция, $-\infty<x<+\infty$; 2. $F(-\infty)=0$; 3. $F(+\infty)=1$. График функции $y=F(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.9.

2. Для дискретной случайной величины *X* график $F(x)$ - ступенчатая линия, а для непрерывной случайной величины *X* график $F(x)$ - непрерывная линия.

3. Если X -непрерывная случайная величина, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Отсюда следует, что $f(x)=F'(x)$, и значит $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

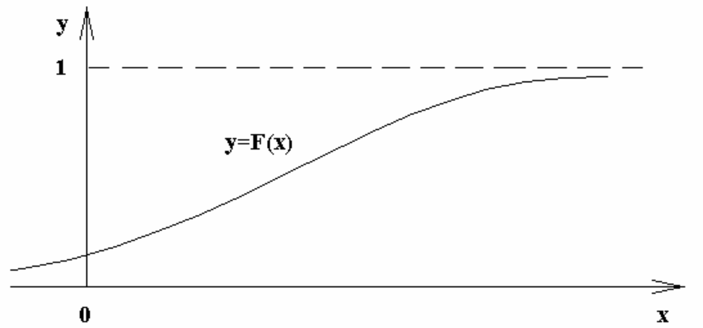


Рис. 1.9. График функции распределения

Основными видами дискретных распределений, наиболее часто используемых на практике, являются биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение и др. К основным видам непрерывных распределений относятся равномерное, показательное, нормальное, Эрланга, гамма-распределение, распределение Вейбулла, распределение χ^2 и др.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности этих значений. Пусть случайная величина задана таблицей распределения вероятностей

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тогда математическое ожидание $M(X)$ определяется по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \text{ или } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $M(X)$ является взвешенной средней арифметической значений случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при весах $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)$ называется число, определяемое равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Геометрически математическое ожидание случайной величины равно абсциссе центра тяжести фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

Более удобной для вычисления дисперсии является следующая формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 .$$

Если ввести обозначение $M(X) = m$, то формула для дисперсии дискретной случайной величины запишется в виде

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i ,$$

а для непрерывной случайной величины - в виде

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx .$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется величина

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Дисперсия и среднее кваратическое отклонение характеризуют величину разброса значений случайной величины около ее математического ожидания (рис. 1.10).

Схема независимых испытаний Бернулли. Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, каждое их которых имеет два исхода A и $\overline{A}$. Пусть $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Предположим, что схема Бернулли состоит из *n* независимых испытаний. Обозначим через $p_n(m)$ вероятность того, что событие A появится в *n* испытаниях ровно m раз, где *m*=0,1,2,…,n. Имеет место формула Бернулли

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} .$$

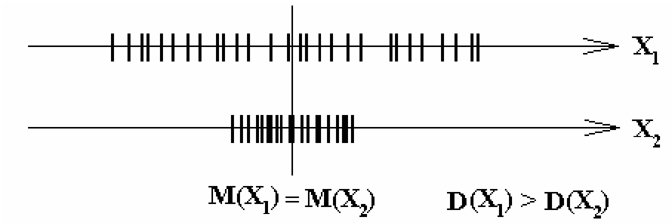


Рис. 1.10. Случайные величины при различной дисперсии

Биномиальное распределение. Пусть случайная величина X равна числу появлений события A в n независимых испытаниях. Эта случайная величина может принимать одно из значений 0,1,2,…,n. Вероятности этих значений определяются по формуле Бернулли. Закон распределения дискретной случайной величины X задается таблицей

X	0	1	2	...	n
P	$p_n(0)$	$p_n(1)$	$p_n(2)$	...	$p_n(n)$

Этот закон называется биномиальным.

На рис.1.11 показаны вероятности $P(X=m)$ значений биномиального распределения при n=10, p=0,2 и p=0,4 соответственно.

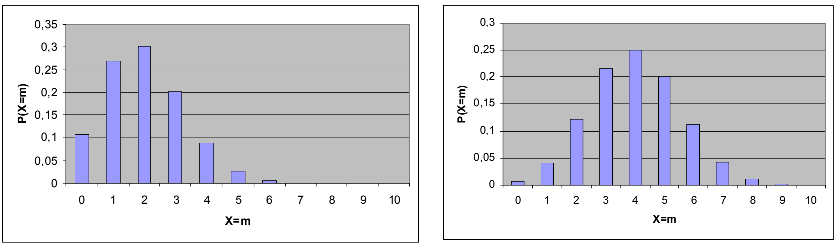


Рис. 1.11. Биноминальное распределение случайной величины

Для биномиального распределения $M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Распределение Пуассона. Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она принимает любые целые неотрицательные значения m=0,1,2,… с вероятностями

$$p(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} .$$

Число λ называется параметром распределения Пуассона.

Таким образом, X может принимать счетное множество значений, и закон распределения этой случайной величины задается следующей таблицей

X	0	1	2	3	...
P	$p(X=0)$	$p(X=1)$	$p(X=2)$	$p(X=3)$	...

На рис. 1.12 показаны вероятности $P(X{=}m)$ значений распределения Пуассона при λ=0,5 и λ=2 соответственно.

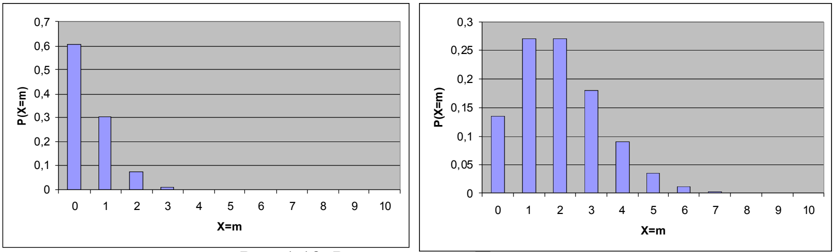


Рис. 1.12. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является предельным для биномиального распределения, если в схеме Бернулли число испытаний n стремится к бесконечности, а вероятность p появления события A в каждом испытании стремится к нулю, причем так, что $np \to \lambda$. Отсюда получаем приближенную формулу

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \ \lambda = np,$$

пригодную для практических расчетов. Этой формулой рекомендуется пользоваться, если $p < 0{,}1$, а $npq \le 9$.

Геометрическое распределение. Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Производится серия из нескольких независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A. Испытания продолжаются до тех пор пока не появится событие A. Случайная величина X, равная числу испытаний до первого появления события , имеет геометрическое распределение вероятностей.

Очевидно, что случайная величина X может принять одно из значений m=1,2,3,…. Значение X равно m, если в m-1-ом испытании событие A не произойдет, а в m-ом испытании событие A произойдет. Поэтому

$$p(X=m) = q^{m-1}p.$$

Для геометрического распределения $M(X) = \frac{1}{p}, \ D(X) = \frac{q}{p^2}$.

Равномерное распределение. Равномерным называется распределение случайной величины, все значения которой лежат на некотором отрезке $[a, b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке (рис. 1.13). Таким образом,

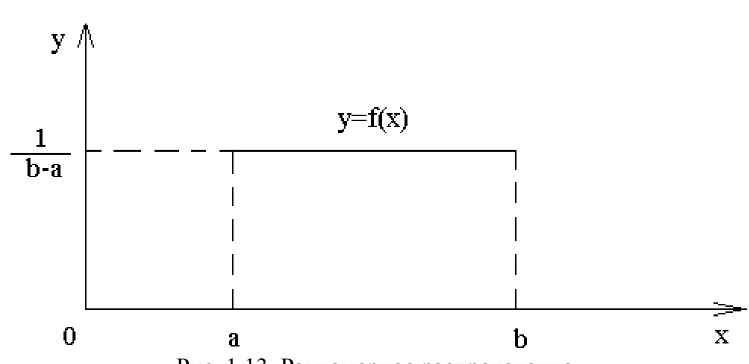


Рис. 1.13. Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & при \;\; a\le x\le b\\ 0, & при \;\; x>a \;\; и \;\; x<b\end{cases}.$$

Значение $\dfrac{1}{b-a}$ выбрано с тем расчетом, чтобы площадь под «ступенькой» была бы равна единице.

Числовые характеристики равномерного распределения: математическое ожидание $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное (экспоненциальное) распределение. Плотность показательного распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \;\; x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \;\; x\ge 0\end{cases},$$

где $\lambda>0$ - постоянный параметр (рис. 1.14).

Рис. 1.14. Показательное распределение

Числовые характеристики показательного распределения $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Нормальное распределение. Нормальное распределение играет существенную роль в психолого-педагогических исследованиях в силу следующей причины. Если индивидуальная изменчивость некоторого свойства есть следствие действия множества причин, то распределение частот для всего многообразия проявлений этого свойства соответствует нормальному распределению.

Нормальный закон распределения случайной величины X характеризуется плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m и $\sigma>0$ - постоянные параметры. График этой функции называется кривой Гаусса и имеет вид, представленный на рис. 1.15.

Параметр m служит абсциссой точки максимума кривой,

$$f(m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Рассмотрим влияние параметра σ на форму кривой. Параметр σ показывает насколько пологой является кривая Гаусса. Если σ велико, то кривая сильно прижата к оси абсцисс, а если σ - мало, то кривая имеет ярко выраженный максимум, а все значения случайной величины группируются достаточно близко к точке m (рис. 1.16).

Для нормального распределения $M(X)=m$, $D(X)=\sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$.

Нормальный закон распределения - один из самых популярных в теории вероятностей, поскольку он часто используется для описания многих процессов и явлений.

Если m=0, σ=1, то соответствующая функция распределения

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

называется функцией Лапласа. Эта функция табулирована и содержится во всех справочниках по теории вероятностей и математической статистике.

Пользуясь таблицами $\Phi(x)$, легко вычислить значения функции распределения $F(x)$ с параметрами m и s. Действительно, так как

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

то, делая замену переменных $\dfrac{t-m}{\sigma}=u$, получим

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

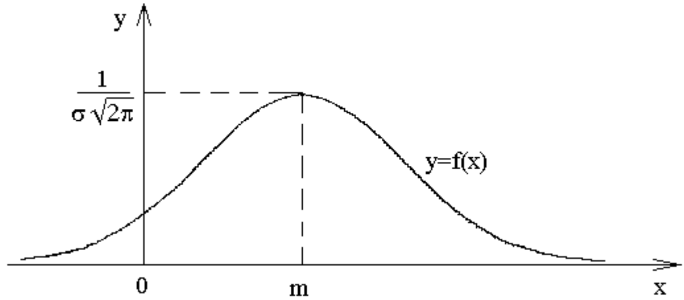


Рис. 1.15. Нормальное распределение

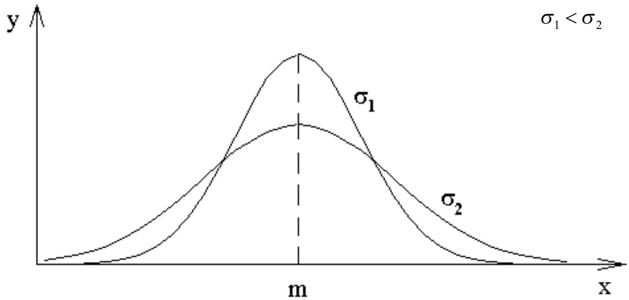


Рис. 1.16. Зависимость формы плотности нормального закона распределения от дисперсии

Отсюда следует простая формула для вычисления вероятности попадания случайной величины X в промежуток

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Вычислим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в промежуток $[m\text{-}3\sigma,\ m\text{+}3\sigma]$, пользуясь таблицами $\Phi(x)$:

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}997\ .$$

Соответствующая площадь показана штриховкой на рис. 1.17. Полученный результат можно записать следующим образом

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 0{,}997\ , \text{ или } P(|X - m| \geq 3\sigma) = 0{,}003\,.$$

Таким образом, вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от m превысит утроенное значение σ, очень мала и равна 0,003. Такое событие является практически невозможным. Полученное свойство называется правилом «трех сигм».

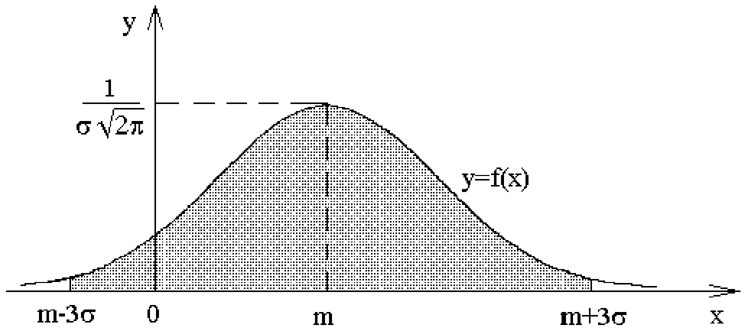


Рис. 1.17. К правилу «трех сигм»

Широкое распространение нормального распределения объясняется *центральной предельной теоремой*: если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному. Таким образом, каково бы ни было «индивидуальное» распределение случайных величин X_i, i=1, 2 ,…, n, с ростом n исчезает влияние этой "индивидуальности" на «поведение» случайной величины $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

Распределение X достаточно точно задается функцией Лапласа.

С помощью нормального распределения определяются три распределения, которые в настоящее время часто используются при статистической обработке данных.

Распределение Пирсона χ^2 (хи – квадрат,) – распределение случайной величины $x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$, где случайные величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ независимы и имеют одно и тоже распределение $N(0,1)$ – нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. При этом число слагаемых, т.е. n, называется «числом степеней свободы» распределения хи – квадрат.

Распределение хи-квадрат используют при оценивании дисперсии (с помощью доверительного интервала), при проверке гипотез согласия, однородности, независимости, прежде всего для качественных (категоризованных) переменных, принимающих конечное число значений, и во многих других задачах статистического анализа данных.

Распределение *t* Стьюдента – это распределение случайной величины $T = \frac{u\sqrt{n}}{\sqrt{x}}$, где случайные величины u и x независимы, u имеет распределение стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, а x – распределение хи – квадрат с n степенями свободы. При этом n называется «числом степеней свободы» распределения Стьюдента.

В настоящее время распределение Стьюдента – одно из наиболее известных распределений среди используемых при анализе реальных данных. Его применяют при оценивании математического ожидания, прогнозного значения и других характеристик с помощью доверительных интервалов, по проверке гипотез о значениях математических ожиданий, коэффициентов регрессионной зависимости, гипотез однородности выборок и т.д.

Распределение Фишера – это распределение случайной величины $F = \dfrac{\frac{1}{k_1}x_1}{\frac{1}{k_2}x_2}$, где случайные величины x_1 и x_2 независимы и имеют распределения хи – квадрат с числом степеней свободы k_1 и k_2 соответственно. При этом пара (k_1, k_2) – пара «чисел степеней свободы» распределения Фишера.

Распределение Фишера используют при проверке гипотез об адекватности модели в регрессионном анализе, о равенстве дисперсий и в других задачах прикладной статистики.

Выражения для функций распределения хи - квадрат, Стьюдента и Фишера, их плотностей и характеристик, а также таблицы, необходимые для их практического использования, можно найти в специальной литературе.

Подводя итог, отметим, что в теории вероятностей считается заданной модель явления и производится расчет возможного реального течения этого явления. Это может быть использовано при моделировании в педагогике и психологии. В отличие от теории вероятностей в математической статистике подбирается подходящая теоретико-вероятностная модель, исходя из статистических данных. Исходя из этого основными задачами математической статистики являются:

определение закона распределения случайной величины или системы случайных величин;

проверка правдоподобия гипотез;

определение неизвестных параметров распределения.

1.5. Вероятностные расчеты в Excel

Вычисление биноминальных вероятностей

Пример 1.14. Проводится тестирование обучаемых. Используются тестовые задания с множественным выбором. Определить вероятность случайного правильного ответа на тестовое задание при условии, что

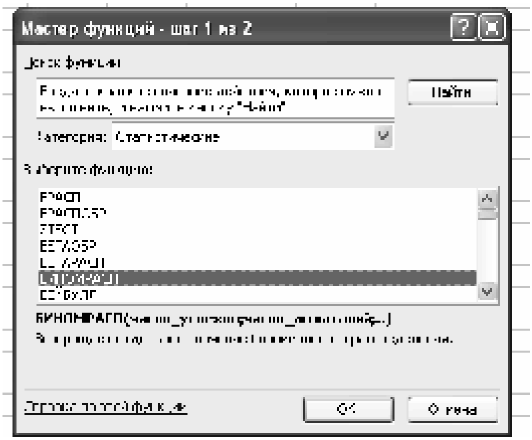


Рис. 1.18. Окно мастера функций

оно содержит 5 ответов, из которых 3 правильных. В случае независимости ответов вероятность угадывания одного правильного ответа из 5 будет равна 0,6. Для расчета по формуле Бернулли воспользуемся Мастером функций Excel.

Вызвать Мастер функций, в категории «Статистические» выбрать функцию БИНОМРАСП (рис. 1.18). Щелкнуть Ок.

В раскрывшемся окне «Аргументы функции» ввести число успехов 3, число испытаний 5, вероятность успеха 0,6 и интегральная «ЛОЖЬ» (рис. 1.19).

Искомая вероятность равна 0,3456.

Если выбрать интегральная ИСТИНА, то будет произведен расчет вероятности того, что количество правильных ответов случайным образов выбранных не будет больше трех.

Вычисление вероятностей Пуассона

Пример 1.15. Предположим, что в результате эксперимента в течение 1 часа испытуемый решал в среднем по 2 задачи за 10 минут. При-

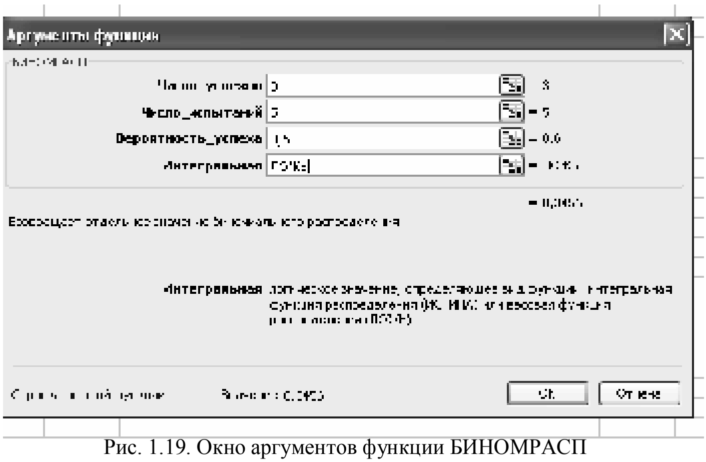


Рис. 1.19. Окно аргументов функции БИНОМРАСП

чем установлено, что среднее время решения подчинено распределению Пуассона. Какова вероятность того, что в следующем испытании он решит 3 или более задачи такой же трудности за 10 минут?

Для решения задачи воспользуемся формулой $p(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ Пуассона, в которой примем λ =2, а m=3.

Вызвать мастер функций и выбрать в категории «Статистические» функцию ПУАССОН (рис. 1.20).

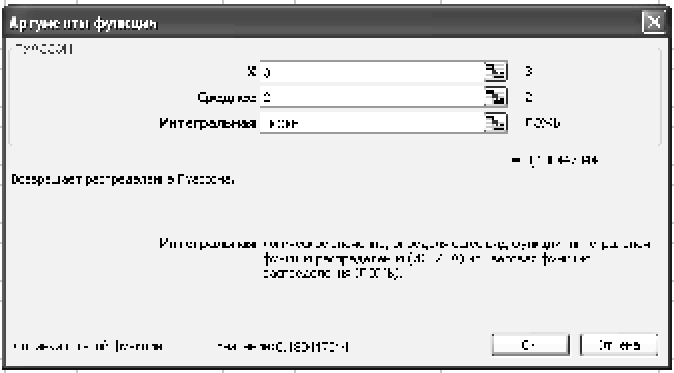


Рис. 1.20. Аргументы функции ПУАССОН

В поле «Х» вести 3, в поле «Среднее» ввести 2. В поле «Интегральная» ввести ЛОЖЬ, если необходимо получить вероятность в точности 3 реализаций или ИСТИНА, если необходимо получить вероятность не более 3 реализаций.

Искомая вероятность равна 0,180447044.

Вычисление вероятностей экспоненциального распределения

Пример 1.16. Количество усвоенной информации Z описывается уравнением $Z = \delta(1 - \exp(-\lambda t))$, где $\delta = a\alpha / m$; a – коэффициент, характеризующий интенсивность или скорость подачи информации обучаемому; α - коэффициент, показывающий во сколько раз при отсутствии потери информации в ходе учебного процесса усвоенная информация меньше (или больше) поступившей информации; λ - коэффициент утомляемости; m – коэффициент пропорциональности, характеризующий процесс забывания информации[1]. Примем условно a=1000; α =0,8; $\lambda = m$ =0,7. Тогда δ =400 и $Z = 400(1 - \exp(-0{,}7t))$. Требуется определить объем усвоенной информации через время t=10 (единицы измерения в рассматриваемом примере не играют существенного значения, например t может измеряться в часах или сутках, а δ и Z в килобитах, Мегабитах).

---

[1] Потеев М.И. Практикум по методике обучения во втузах. – М.: Высшая школа, 1990. С. 87.

Используя мастер функций вызвать функцию ЭКСРАСП и ввести в поля ввода данные, как показано на рис. 1.21. Если аргумент «Интегральная»=1, то рассчитывается интегральная функция распределения $1-\exp(-\lambda t)$, если аргумент «Интегральная»=0, то рассчитывается значение дифференциальной функции распределения.

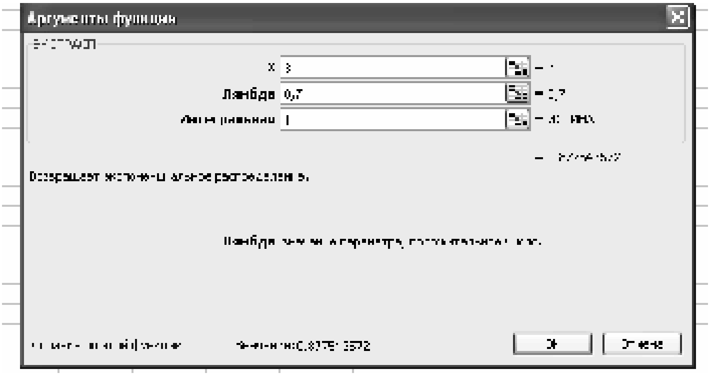


Рис. 1.21. Аргументы функции ЭКСПРАСП

Вычисление нормальных вероятностей

Пример 1.17. В результате обработки результатов эксперимента доказано, что время выполнения некоторой операции подчиняется нормальному закону распределения со средним значением 2 минуты и стандартным отклонением 0,1 минута. Определить вероятность того, что операция будет выполнена за время, не превышающее 2,2 минуты.

Воспользуемся функцией НОРМРАСП (рис. 1.22). В результате вычисления получим искомую вероятность 0,691.

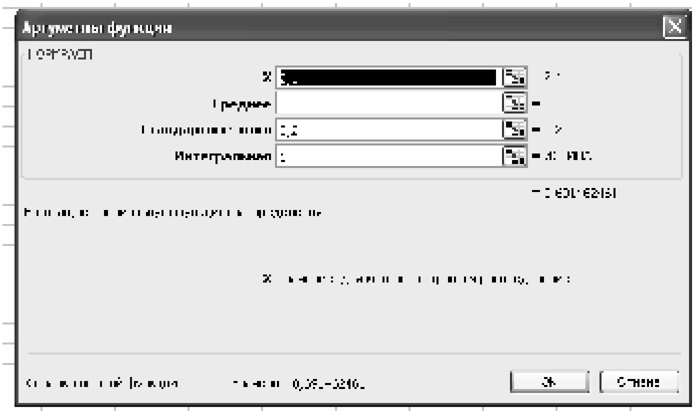


Рис. 1.22. Аргументы функции НОРМРАСП

Пример1.18. При исходных данных предыдущего примера определить время, при котором операция будет выполнена с вероятностью 0,9. Для решения задачи воспользуемся функцией НОРМОБР (рис. 1.23). В результате решения получаем время 2,256 минуты.

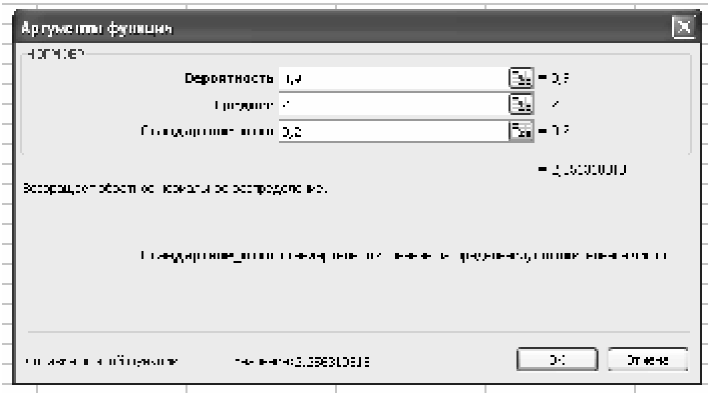


Рис. 1.23. Аргументы функции НОРМОБР

Пример 1.19. При исходных данных примера 1.17 определить нормированное значение времени выполнения операции при значении случайной величины 2,3 минуты. Напомним, что нормализация (нормирование) заключается в переходе от случайной величины x с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 к нормированной величине $t = (x - m)/\sigma$, в результате чего нормированная случайная величина будет иметь нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Воспользуемся функцией НОРМАЛИЗАЦИЯ (рис. 1.24). Вычисленное значение нормированной случайно величины равно 1,5. Заметим, что эта случайная величина не имеет размерности (безразмерная).

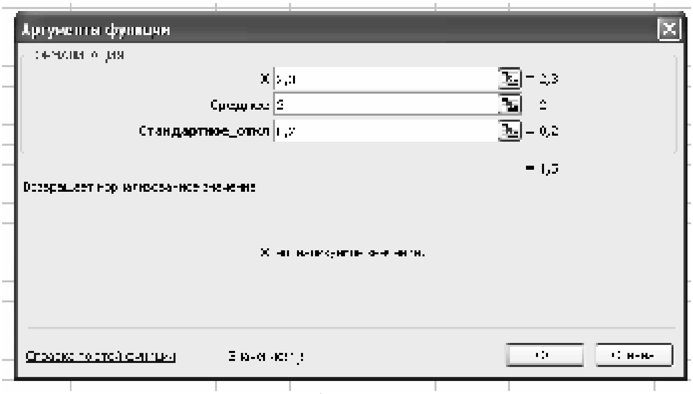


Рис. 1.24. Аргументы функции НОРМАЛИЗАЦИЯ

Подводя итог, отметим, что в теории вероятностей считается заданной модель явления и производится расчет возможного реального течения этого явления. Это может быть использовано при моделировании в педагогике и психологии. В отличие от теории вероятностей в математической статистике подбирается подходящая теоретико-вероятностная модель, исходя из статистических данных. Исходя из этого основными задачами математической статистики являются:

определение закона распределения случайной величины или системы случайных величин;

проверка правдоподобия гипотез;

определение неизвестных параметров распределения.

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Статистическая проверка гипотез является вторым после статистического оценивания параметров распределения и в то же время важнейшим разделом математической статистики.

Полученные в экспериментах выборочные данные всегда ограничены и носят в значительной степени случайный характер. Методы математической статистики позволяют обобщать закономерности, полученные на выборке, и распространять их на всю генеральную совокупность, проверить предположения о законе распределения некоторой случайной величины (генеральной совокупности), о значениях параметров этого закона, о наличии корреляционной зависимости между случайными величинами, определенными на множестве объектов одной и той же генеральной совокупности.

2.1. Общий алгоритм статистической проверки гипотез

В своей практической деятельности человек то и дело выдвигает и экспериментально проверяет различные гипотезы, при этом сохраняется следующий общий порядок: формулируется гипотеза («Наверное, моего друга еще нет дома»), планируется эксперимент, причем заранее известно, какой результат приведет к принятию гипотезы («Позвоню ему по телефону, если никто не подойдет, то его нет дома»), затем эксперимент выполняется, и гипотеза принимается или отвергается. При этом практически всегда имеется некоторая вероятность ошибочного решения по результатам эксперимента (друг прослушивал новые магнитофонные записи и не слышал звонка, хотя и был дома, или Вы ошибочно набрали не его номер). Все эти черты присущи и статистической проверке гипотез, только здесь порядок действий строго формализован.

Пусть по некоторым данным имеются основания выдвинуть предположения о законе распределения или о параметре закона распределения случайной величины (или генеральной совокупности, на множестве объектов которой определена эта случайная величина). Задача заключается в том, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, используя выборочные (экспериментальные) данные.

Гипотезы о значениях параметров распределения или о сравнительной величине параметров двух распределений называются *параметрическими гипотезами.* Гипотезы о виде распределения называются *непараметрическими гипотезами.*

Проверить статистическую гипотезу – это значит проверить, согласуются ли данные, полученные из выборки с этой гипотезой. Проверка осуществляется с помощью статистического критерия. *Статистический критерий* – это случайная величина, закон распределения которой (вместе со значениями параметров) известен в случае, если принятая гипотеза справедлива. Этот критерий называют еще *критерием согласия* (имеется в виду согласие принятой гипотезы с результатами, полученными из выборки).

Гипотезу, выдвинутую для проверки ее согласия с выборочными данными, называют *нулевой гипотезой* и обозначают H_0. Вместе с гипотезой H_0 выдвигается *альтернативная* или *конкурирующая* гипотеза, которая обозначается H_1.

Поясним идею проверки статистической гипотезы на примере [1]. Предположим, что психолог проверяет пригодность разработанных ранее норм для имеющегося в его распоряжении теста интеллекта. Прежний нормативный показатель A=10. Но новой выборке численностью n=100 эксперимент подучены следующие результаты: $\bar{x} = 10{,}6$, $\sigma = 3$.

Налицо различия. Но интуитивно понятно, что результаты, полученные по случайной выборке, являются тоже случайными. Исследователь может принять решение о наличии различий, хотя на самом деле их нет. Поэтому сделать однозначный вывод в отношении генеральной совокупности по результатам выборочного обследования невозможно. Геометрическая интерпретация ситуации приведена на рис. 3.1.

Если извлекать из генеральной совокупности многократно выборки (X_1, X_2,…,X_p) одного и того же объема и каждый раз вычислять

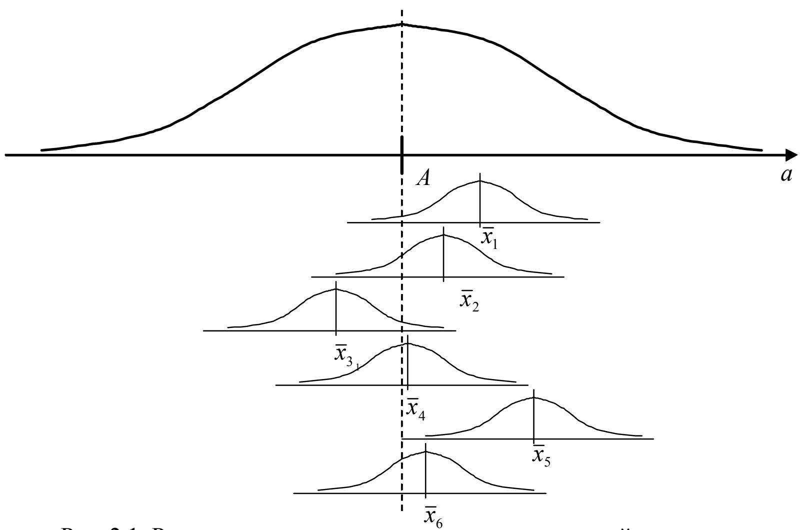


Рис. 2.1. Распределение среднего значения генеральной совокупности и выборок

выборочное среднее значение для каждой выборки ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$), то можно построить распределение выборочного среднего. Как видно из рис. 2.1 выборочные средние могут отличаться от среднего значения генеральной совокупности. Для многих случаев форма выборочного распределения известна заранее (поэтому распределение называется теоретическим распределениям). В соответствие с центральной предельной теоремой распределение средних значений выборок, извлекаемых из одной и то же совокупности, при достаточно большом количестве выборок соответствует нормальному распределению. Среднее значение всех выборочных средних будет равно среднему значению совокупности, а дисперсия выборочных средних составит величину $m^2 = \sigma_x^2 / n$, где σ_x^2 - дисперсия совокупности, n – объем каждой выборки (m еще называют *ошибкой среднего*).

Таким образом, заранее известно распределение средних для случая, когда верна гипотеза H_0. Это распределение позволяет определить, насколько вероятно то или иное отклонение выборочного среднего от A – среднего в генеральной совокупности.

Для рассматриваемого примера сначала необходимо определить, насколько выборочное среднее отличается от A в единицах стандартного отклонения, т.е. определить соответствующее z-значение:

$$z_э = (\bar{x} - A) / \left(\sigma_x / \sqrt{n}\right).$$

Подобные формулы позволяют получить так называемое *эмпирическое значение критерия* для соответствующего теоретического распределения. Выборочное распределение средних соответствует нормальному виду, если объем выборки более 100. Для выборок меньшего объема распределение средних начинает зависеть от объема выборок, точнее от числа *степеней свободы* df, и соответствует другому теоретическому распределению – t-Стьюдента. Однако общая последовательность проверки статистической гипотезы остается той же, т.е. сначала вычисляется соответствующее эмпирическое значение $t_э = (\bar{x} - A) / \left(\sigma / \sqrt{n}\right)$, $df=n$-1. Затем вычисленное эмпирическое значение сопоставляется с теоретическим t-распределением для соответствующего числа степеней свободы df. Это позволяет определить p-уровень – вероятность того, что выборка принадлежит генеральной совокупности, для которой верна нулевая гипотеза.

Статистическая значимость или *p-уровень* – основной результат проверки статистической гипотезы. Это вероятность того, что обнаруженная связь между параметрами генеральной совокупности и выборки носит случайный характер, а не является свойством совокупности. Или, говоря по-другому, это вероятность получения данного результата выборочного исследования при условии, что на самом деле для генеральной совокупности верна нулевая статистическая гипотеза – т.е. связи нет. Чем меньше значение p-уровня, тем выше статистическая значимость результата исследования, подтверждающего выдвинутую гипотезу.

Уровень значимости при прочих равных условиях выше (значение p-уровня меньше), если величина связи (различия) больше, изменчивость признаков меньше, объем выборки больше.

Число степеней свободы df - это количество возможных направлений изменчивости признака. Как правило, число степеней свободы прямолинейно зависит от объема выборки, от числа признаков или их градаций. Заметим, что каждая формула для расчета эмпирического значения критерия обязательно сопровождается правилом (формулой) для определения числа степеней свободы.

Итак, каждый критерий включает в себя: формулу расчета эмпирического значения критерия по выборочным статистикам; правило (формулу) определения числа степеней свободы; теоретическое распределение для данного числа степеней свободы; правило соотнесения эмпирического значения критерия с теоретическим распределением для определения вероятности того, что нулевая гипотеза верна.

Общая формулировка этапов проверки гипотезы следующая:

формулируется проверяемая гипотеза H_0;

выбирается критерий проверки – K;

выбирается уровень значимости а и критическая область Q , так, чтобы условная вероятность попадания критерия в Q при условии справедливости гипотезы равнялась а, т.е. $P\{X \in Q/H_0\} = \alpha$;

проводится эксперимент и определяется экспериментальное значение критерия $K_э$;

если критерий не попадает в критическую область, гипотеза принимается, если $K \in Q$ - то отвергается;

результат оформляется так: гипотеза H_0 проверена критерию K на уровне значимости α и принята (или отвергнута).

Пусть случайная величина t – статистический критерий проверки некоторой гипотезы H_0. При справедливости гипотезы H_0 закон распределения случайной величины t характеризуется некоторой известной нам плотностью распределения $p_K(x)$.

Выберем некоторую малую вероятность α, равную 0,05 , 0,01 или еще меньшую. Определим *критическое значение критерия* $t_{кр}$ как решение одного из трех уравнений, в зависимости от вида нулевой и конкурирующей гипотез:

$$P(t > t_{кр}) = \alpha \qquad (2.1)$$

$$P(t < t_{кр}) = \alpha \qquad (2.2)$$

$$P((t < t_{кр1}) \cap (t > t_{кр2})) = \alpha \qquad (2.3)$$

Решение уравнения (2.1) (то же самое для уравнений (3.2) и (3.3)) заключается в следующем: по вероятности α, зная функцию распределения $p_t(x)$, заданную как правило таблицей, нужно определить $t_{кр}$.

Что означает условие (2.1)?

Если гипотеза H_0 справедлива, то вероятность того, что критерий t превзойдет некоторое значение $t_{кр}$ очень мала – 0,05 , 0,01 или еще меньше, в зависимости от нашего выбора. Если $t_э$ – значение критерия t, рассчитанное по выборочным (экспериментальным) данным, превзошло значение $t_{кр}$, это означает, что выборочные данные не дают основания для принятия нулевой гипотезы H_0 (например, если α=0,01 , то можно сказать, что произошло событие, которое при справедливости гипотезы H_0 встречается в среднем не чаще, чем в одной из ста выборок). В этом случае говорят, что *гипотеза H_0 не согласуется с выборочными данными и должна быть отвергнута.* Если $tэ_в$ не превосходит $t_{кр}$, то говорят, что *выборочные данные не противоречат гипотезе H_0,* и нет оснований отвергать эту гипотезу.

Для уравнения (2.1) область $t > t_{кр}$ является *критической* областью. *Если значение $t_э$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается.*

Для уравнения (2.1) область $t < t_{кр}$ называется *областью принятия гипотезы. Если значение $t_э$ попадает в область принятия гипотезы, то гипотеза H_0 принимается.*

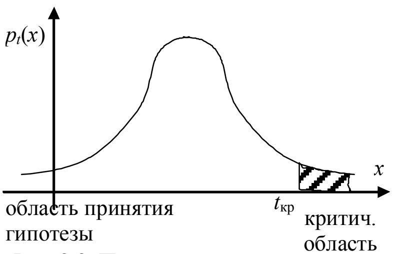


Рис. 2.2. Правосторонняя критическая область

Рис. 2.2 иллюстрирует решение уравнения (2.1). Здесь $p_t(x)$ – известная плотность распределения случайной величины t при условии справедливости гипотезы H_0.

Пусть выбрано некоторое малое значение вероятности α, по нему определено значение $t_{кр}$ и по выборочным данным определено значение $t_э$, которое попало в критическую область.

В этом случае гипотеза H_0 отвергается, но она может оказаться справедливой, просто случайно произошло событие, которое имеет очень малую вероятность α. В этом смысле α есть вероятность отвержения правильной гипотезы H_0.

Отвержение правильной гипотезы называется *ошибкой первого рода.* Вероятность a называется уровнем значимости. Таким образом *уровень значимости – это вероятность совершения ошибки первого рода*.

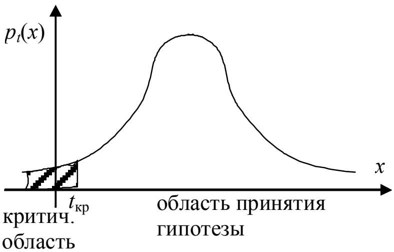


Рис. 2.3. Левосторонняя критическая область

Критическая область, полученная для уравнения (2.1) и приведенная на рис. 2.2., называется *правосторонней*.

Уравнение (2.2) определяет *левосторонюю критическую область*. Ее изображение приводится на рис. 2.3.

Отметим, что каждая из заштрихованных фигур на рис. 2.2. и 2.2. имеет площадь, равную α.

Уравнение (2.3) определяет *двусторонюю критическую область*. Такая область изображена на рис. 2.4. Здесь критическая область состоит из двух частей. В случае двусторонней критической области границы ее частей $t_{кр1}$ и $t_{кр2}$ определяются таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$P(t \le t_{кр}) = P(t \ge t_{кр}) = a / 2.$$

На рисунке 2.4 площадь каждой из заштрихованных фигур равна $\alpha / 2$.

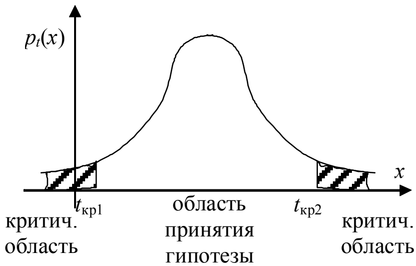


Рис. 2.4. Двусторонняя критическая область

Вид критической области зависит от того, какая гипотеза выдвинута в качестве конкурирующей.

Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0, когда она верна, то есть совершить ошибку первого рода. Но с уменьшением уровня значимости расширяется область принятия гипотезы H_0 и увеличивается вероят-

ность принятия проверяемой гипотезы, когда она неверна, то есть когда предпочтение должно быть отдано конкурирующей гипотезе.

Пусть при справедливости гипотезы H_0 статистический критерий t имеет плотность распределения $p_0(x)$, а при справедливости конкурирующей гипотезы H_1 – плотность распределения $p_1(x)$. Графики этих функций приведены на рис. 2.5. При некотором уровне значимости находится критическое значение $t_{кр}$ и правостороняя критическая область. Если значение $t_э$, определенное по выборочным данным, оказывается меньше, чем $t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Предположим, что спра-

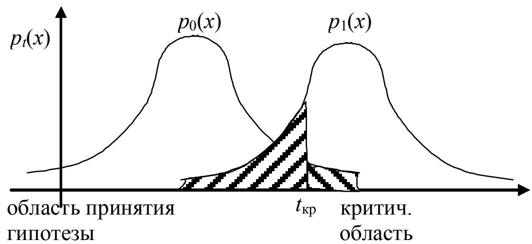


Рис. 2.5. Мощность критерия

ведлива на самом деле конкурирующая гипотеза H_1. Тогда вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы H_0 есть некоторое число β, равное площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$ и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей слева от точки $t_{кр}$. Очевидно, что β – это вероятность того, что будет принята неверная гипотеза H_0.

Принятие неверной гипотезы называется *ошибкой второго рода*. В рассмотренном случае число β – это вероятность ошибки второго рода. *Число 1 – β, равное вероятности того, что не совершается ошибка второго рода, называется мощностью критерия*. На рис. 2.5 мощность критерия равна площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$.и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей справа от точки $t_{кр}$.

Традиционная трактовка вычислений уровня значимости включает следующие градации:

α >0,1 – принимается гипотеза H_0 и делается вывод6 «статистически достоверные различия не обнаружены»;

$\alpha \leq 0,1$ – неопределенность в отношении H_0 с выводом: «возможны различия на уровне статистической тенденции»;

$\alpha \leq 0,05$ – значимое отклонение H_0 с выводом «обнаружены статистически достоверные различия»;

$\alpha \leq 0,01$ - отклонение H_0 с выводом «различия обнаружены не высоком уровне статистической значимости».

Выбор статистического критерия и вида критической области осуществляется таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной.

Статистические критерии делятся на параметрические и непараметрические. Параметрические критерии включают в формулу расчета параметры распределения изучаемого признака такие как, среднее, стандартное отклонение, дисперсию. К параметрическим критериям относится критерий *t*-Стьюдента и линейный коэффициент корреляции по Пирсону.

Эмпирическое значение критерия вычисляется по формуле $t_э = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}$, где $\bar{x},\ \bar{y},\ \sigma_x^2,\ \sigma_y^2,\ n_x,\ n_y$ - средние значения признака первой и второй выборки, дисперсии изучаемого признака первой и второй выборки, число испытуемых в первой и второй выборках соответственно.

Затем вычисляются число степеней свободы по формуле $df = n_x + n_y - 2$. Для вычисленного значения *df* по таблице критерия *t*-Стьюдента (Приложение 5) находят критические значения ($t_{кр}$) для заданного уровня значимости $\alpha \le 0{,}05$ и $\alpha \le 0{,}01$, т.е. $t_{кр} = \begin{cases} t_{кр1}(\alpha \le 0{,}05) \\ t_{кр2}(\alpha \le 0{,}01) \end{cases}$.

После чего сравнивают $t_э$ с $t_{кр}$, при этом возможны два случая: $t_э \ge t_{кр}$ принимается гипотеза H_1 на соответствующем уровне значимости; $t_э < t_{кр}$ принимается гипотеза H_0.

Эмпирическое значение линейного коэффициента корреляции по Пирсону вычисляется по формуле

.

Вычисленное значение линейного коэффициента корреляции проверяют на надежность $t_э = |r_э| \cdot \sqrt{n-3}$, где $t_э$ – коэффициент надежности, а n – число коррелируемых пар.

Затем для степеней $df = \infty$ по таблице *t*-Стьюдента находят критические значения, т.е. $t_{кр} = \begin{cases} t_{кр1}(\alpha \le 0{,}05) \\ t_{кр2}(\alpha \le 0{,}01) \end{cases}$, которые сравнивают с $t_э$ и делают выводы аналогичные предыдущему случаю.

Параметрические критерии можно применять только в том случае, когда изучаемый признак подчиняется нормальному закону распределения.

Непараметрические критерии не включают в формулу расчета параметры распределения изучаемого признака и основываются на оперировании частотами или рангами. Примерами таких критериев могут служить U-критерий Манна-Уитни, S-критерий Джонкира, Т-критерий Вилкоксона, угловой критерий Фишера, Крамера-Уэлча, χ^2 и др.

Рассмотрим более подробно статистические критерии и покажем, как их применять для решения конкретных задач педагогики и психологии.

При выборе непараметрического критерия можно воспользоваться рекомендациями, представленными на рис. 2.6 [14].

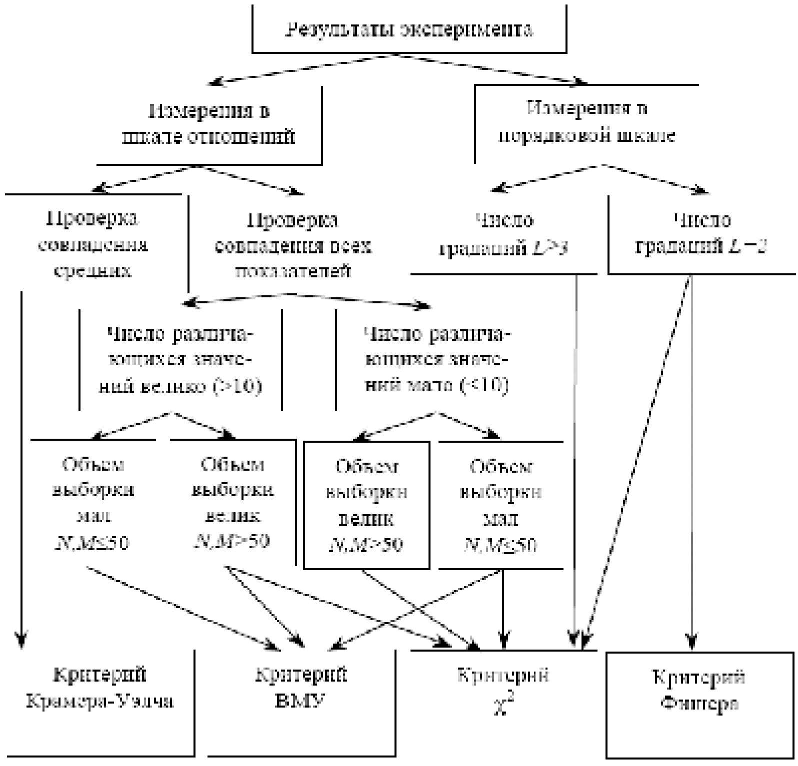


Рис. 2.6. Выбор критерия

С точки зрения классификации решаемых задач в [3] предлагаются следующие рекомендации.

Если статистические данные уже получены, то:

по первому столбцу таблицы «Классификация задач и методов их решения» определить, какая из задач стоит в исследовании;

по второму столбцу таблицы определить, каковы условия решения задачи;

выбрать метод решения.

Если эксперимент находится на стадии планировании, то:

определить, какая модель является наиболее подходящей для доказательства научных предположений;

ознакомиться с описанием метода (если он не приведен в данном пособии, то воспользоваться рекомендованной литературой, например [3];

уяснить ограничения метода;

провести исследования и обработать полученные данные по выбранному алгоритму.

Классификация задач и методов их решения

Задачи	**Условия**	**Методы**
1. Выявление различий в уровне исследуемого признака	2 выборки испытуемых	Q-критерий Розенбаума; U-критерий Манна-Уитни; фи-критерий Фишера
	3 и более выборок испытуемых	S-критерий тенденций Джонкира; H-критерий Крускала-Уоллиса
2. Оценка сдвига значений исследуемого признака	2 замера на одной и то же выборке испытуемых	T-критерий Викоксона; G-критерий знаков; фи-критерий Фишера
	3 и более замеров на одной и то же выборке испытуемых	хи-квадрат критерий Фридмана; L-критерий тенденций Пейджа;
3. Выявление различий в распределении признака	При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	хи-квадрат Пирсона; λ-критерий Колмогорова-Смирнова; m-биноминальный критерий
	При сопоставлении двух эмпирических распределений	хи-квадрат Пирсона; λ-критерий Колмогорова-Смирнова; фи-критерий Фишера
4. Выявление степени согласованности изменений	двух признаков	коэффициент ранговой корреляции Спирмена
	двух иерархий или профилей	коэффициент ранговой корреляции Спирмена
5. Анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий	под влиянием одного фактора	S-критерий тенденций Джонкира; L-критерий тенденций Пейджа; Однофакторный дисперсионный анализ Фишера
	под влиянием двух факторов одновременно	Двухфакторный дисперсионный анализ Фишера

Приведенный перечень не является исчерпывающим. В связи с ограниченностью объема пособия рассмотрение ряда критериев не производится.

2.2. Практическое применение статистических критериев с использование Excel

Критерий *t*-Стьюдента применяется для сравнения двух выборок по уровню какого-либо признака, количественно измеренного.

Пример 2.1. У студентов двух групп был измерен уровень вербального интеллекта с помощью методики Векслера. В первой группе 14 человек, а во второй 12 человек. Можно ли утверждать, что одна из групп превосходит другую по уровню вербального интеллекта? Аналогом этой психологической задачи является следующая педагогическая задача. В экспериментальной группе учащихся использовалась новая методика преподавания. В контрольной группе преподавание осуществлялось по традиционной методике. До проведения эксперимента и после него оценивался уровень знаний учащихся методом решения тестовых задач. Можно ли утверждать, что до эксперимента учащиеся обеих групп были подготовлены одинаково, а после эксперимента уровень знаний учащихся экспериментальной группы выше уровня знаний учащихся контрольной группы?

Набранные баллы студентами приведены в таблице

Гр1	132	134	124	132	135	132	131	132	121	127	136	129	136	136
Гр2	126	127	132	120	119	126	120	123	120	116	123	115		

Расчет произведем, используя Excel.

Сформулируем гипотезы. H_0: уровень вербального интеллекта в первой группе не выше, чем во второй; H_1: первая группа превосходит вторую по уровню вербального интеллекта.

Результаты решения представлены на рис. 2.7.

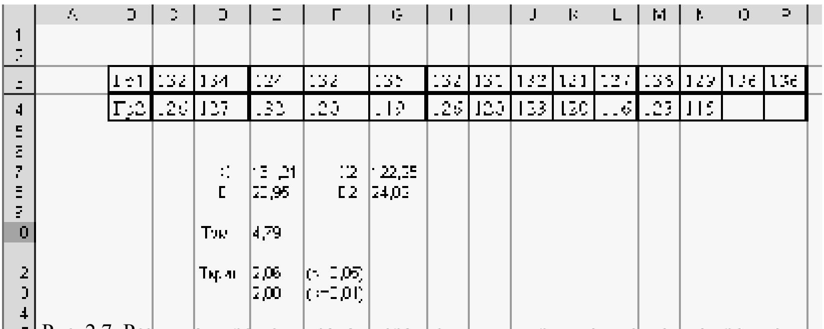


Рис. 2.7. Результаты решения задачи сравнения двух групп студентов по уровню вербального интеллекта

При этом в соответствующие ячейки записаны следующие формулы:

(E7) → =СРЗНАЧ(C3:P3)

вычисляет среднее значение первой выборки;

(G7) → =СРЗНАЧ(C4:P4)

вычисляет среднее значение второй выборки;

(E8) → =ДИСП(C3:P3)

вычисляет дисперсию первой выборки;

(G8) → =ДИСП(C4:P4)

вычисляет дисперсию второй выборки;

(E10) → =ABS(E7-G7)/КОРЕНЬ(E8/СЧЁТ(C3:P3)+G8/СЧЁТ(C4:N4))

вычисляет эмпирическое значение критерия (функция ABS() вычисляет абсолютное значение разности средних двух выборок, функция КОРЕНЬ вычисляет квадратный корень, функция СЧЕТ осуществляет подсчет количества элементов выборок);

(E12) → =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;СЧЁТ(C3:P4)-2)

вычисляет обратное распределение Стьюдента (встроенная функция) для уровня значимости $\alpha \leq 0{,}05$ при количестве степеней свободы 12 (СЧЁТ(C3:P4)-2);

(E13) → =СТЬЮДРАСПОБР(0,01;СЧЁТ(C3:P4)-2)

вычисляет обратное распределение Стьюдента (встроенная функция) для уровня значимости $\alpha \leq 0{,}01$ при количестве степеней свободы 12 (СЧЁТ(C3:P4)-2).

Из сравнения $T_{эмп}$ с $T_{кр}$ видно, что $T_{эмп} > T_{кр}$ на уровне значимости $\alpha \leq 0{,}01$, т.е. принимается гипотеза H_1 на уровне значимости 1%. Или по другому: с вероятностью 0,9 первая группа превосходит вторую по уровню вербального интеллекта.

Линейный коэффициент корреляции по Пирсону позволяет изучить тесноту связи между двумя зависимыми признаками.

Пример 2.2. Приводятся данные о времени решения тестовых задач и успеваемости по математике (данные из примера 2.10):

X	122	105	100	145	130	90	162	172	120	150
Y	4,7	4,5	4,4	3,8	3,7	4,6	4,0	4,2	4,1	3,6

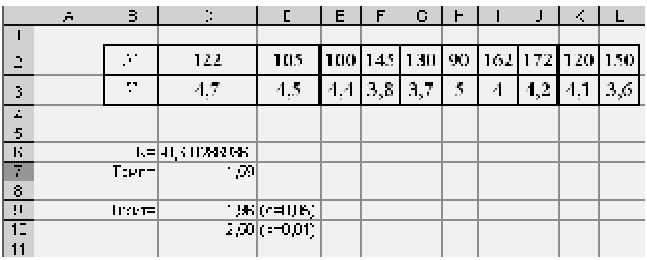


Рис. 2.8. Результаты решения задачи определения степени связи успеваемости и времени решения тестовых задач

Что можно сказать о существовании связи между этими параметрами? Покажем как решить эту задачу с помощью линейного коэффициента корреляции по Пирсону (предполагаем, что проверка на нормальность распределения прошла успешно). На рис. 2.8. приведены результаты решения.

При этом в соответствующие ячейки записаны следующие формулы:

(B6) $\rightarrow$ =ПИРСОН(C2:L2;C3:L3)

вычисляет коэффициент корреляции по Пирсону между двумя выборками (встроенная функция);

(C7) $\rightarrow$ =ABS(C6)*КОРЕНЬ(СЧЁТ(C2:L2)-3)

вычисляет надежность вычисленного значения коэффициента корреляции;

(C9) =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;10000000000)

вычисляет обратное распределение Стьюдента (критическое значение критерия при уровне значимости 0,05 (число 10000000000 заменяет бесконечность);

(C10) $\rightarrow$ =СТЬЮДРАСПОБР(0,01;10000000000)

вычисляет обратное распределение Стьюдента (критическое значение критерия при уровне значимости 0,01 (число 10000000000 заменяет бесконечность).

Видим, что эмпирическое значение критерия Стьюдента меньше критического на уровне 0,05. Следовательно принимается гипотеза H_0 о том, что связь между временем решения тестовых задач и успеваемостью существенно незначима на уровне значимости 0,05. Или по-другому, с вероятностью 0,95 можно предполагать, что связь между временем решения тестовых задач и успеваемостью в данном примере незначима. Однако связь имеется, т.к. коэффициент корреляции не равен нулю. Причем связь прямопропорциональная (коэффициент отрицательный): меньшему времени решения задач соответствует более высокая успеваемость.

Коэффициент корреляции рангов по Спирмену используется для определения тесноты связи между признаками в случае их количественного представления. Напомним, что коэффициент корреляции по Спирмену определяется по формулам: $r_S = 1 - \frac{6S}{n^3 - n}$, $S = \sum_{i=1}^{n} \left(x_j - y_i\right)^2$.

Для определения рангового коэффициента корреляции ранжируют все значения признака X и вместе с тем записывают соответствующие значения признака Y. Затем определяют ранг по обоим признакам, т.е. номер каждого признака в ранжированных рядах. Для равных значений признака ранг находится путем деления суммы приходящихся на них рангов на число равных значений.

Пример 2.3. Исследуется взаимосвязь продолжительности ознакомления (в секундах) и времени восприятия (в секундах) системы пространственных линий. Что можно сказать о существовании связи между этими параметрами?

Выдвигаются гипотезы: H_0 - связь между параметрами отсутствует; H_1 – корреляция между изучаемыми параметрами отличается от нуля.

Решение задачи приведено на рис. 2.9.

При этом в соответствующие ячейки записаны следующие формулы:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2		X	Y	Ранг X	Частота ранга X	Ранг X по Спирмену	Ранг Y	Частота ранга Y	Ранг Y по Спирмену	[illegible]
3		2,5	7,2	[illegible]	2	11,5	14	2	14,5	3,0
4		1,9	1,5	3	1	3,0	1	[illegible]	1,0	4,0
5		3,7	2,7	18	1	18,0	2	2	2,5	[illegible]
6		2	2,6	4	2	4,5	17	3	17,3	164,7
7		4,3	4,5	20	1	20,0	24		24,0	13,0
8		2,4	3	9	2	9,5	17	3	10,3	[illegible]
9		2,3	7,1	6	3	6,3	17	[illegible]	10,0	[illegible]
10		[illegible]	4,2	22	1	22,0	22	[illegible]	22,0	[illegible]
11		[illegible]	2,9	24	1	24,0	7	3	7,3	277,8
12		[illegible]	7,5	15	1	15,0	15		16,0	1,0
13		3,6	[illegible]	17	1	17,0	21	[illegible]	21,0	16,0
14		2,3	3	6	3	6,3	[illegible]	3	10,3	[illegible]
15		4,9	4,3	23	1	23,0	[illegible]	[illegible]	23,0	[illegible]
16		1,8	2,5		2	1,5	4	2	4,5	3,0
17		2,0	7,9	10	1	10,0	7	3	7,3	[illegible]
18		1	7,6	19	1	19,0	13	3	13,3	7,0
19		1,8	2,5	[illegible]	2	1,5	4	2	4,5	[illegible]
20		3	3,2	14	1	14,0	14	2	14,5	[illegible]
21		2,4	7,9	9	2	9,5	7	3	7,3	4,7
22		[illegible]	7,9	21	1	21,0	[illegible]	[illegible]	20,0	1,0
23		2,3	2,7	6	3	6,3	[illegible]	[illegible]	6,0	[illegible]
24		3,4	2,6	16	1	16,0	17	3	17,3	1,8
25		2	2,4	4	2	4,5	3	2	2,5	4,0
26		2,5	3	[illegible]	2	11,5	17	3	10,3	1,4
27									Σ= [illegible]	
29					Rнабл	0,62756	Rкрит	0,4	(α=0,05)	
30								0,5[illegible]	(α=0,01)	

Рис. 2.9. Результаты решения задачи определения тесноты связи между признаками

(B3:B26) → данные о продолжительности ознакомления;
(C3:C26) → данные о времени восприятия;
(D3) → =РАНГ(B3;$B$3:$B$26;1)
……………………………………
(D26) =РАНГ(B26;$B$3:$B$26;1)
вычисляются ранги выборки X;
(E3) → =СЧЁТЕСЛИ($B$3:$B$26;B3)
…………………………………………
(E26) → =СЧЁТЕСЛИ($B$3:$B$26;B26)
вычисляются частоты рангов X (количество равных рангов);

(F3) →
=ЕСЛИ(E3=1;D3;ЕСЛИ(E3=2;(D3*2+1)/2;ЕСЛИ(E3=3;(D3*3+1)/3)))
………………………………………………………………………
(F26) →
=ЕСЛИ (E26=1;D26;ЕСЛИ(E26=2;(D26*2+1)/2; ЕСЛИ (E26=3; (D26*3+1)/3)))

вычисляются ранги по Спирмену (учитывается наличие равных рангов и вычисляется их среднее значение);

(G3) → =РАНГ(C3;$C$3:$C$26;1)
……………………………………
(G26) → =РАНГ(C26;$C$3:$C$26;1)

вычисляются ранги выборки Y;

(H3) → =СЧЁТЕСЛИ($C$3:$C$26;C3)
…………………………………………
(H26) → =СЧЁТЕСЛИ($C$3:$C$26;C26)

вычисляются частоты рангов Y (количество равных рангов);

(I3) →
=ЕСЛИ(H3=1;G3;ЕСЛИ(H3=2;(G3*2+1)/2;ЕСЛИ(H3=3;(G3*3+1)/3)))
………………………………………………………………………
(I26) →
=ЕСЛИ(H26=1;G26;ЕСЛИ(H26=2;(G26*2+1)/2; ЕСЛИ (H26=3; (G26*3+1)/3)))

вычисляются ранги по Спирмену;

(J3) → =(F3-I3)^2
……………………
(J26) → =(F26-I26)^2

вычисляется квадрат разности рангов X и Y;

(J27) → =СУММ(J3:J26)

вычисляется сумма квадратов разностей рангов;

(F29) → =1-(6*J27/(24*(24^2-1)))

вычисляется коэффициент корреляции рангов;

(H29) и (H30) – критические значения коэффициента корреляции по Спирмену для n=24, уровней значимости 0,05 и 0,01 (определяются по таблице, приведенной в Приложении 7).

Сравнение эмпирического значения коэффициента корреляции по Спирмену и критических значений показывает, что эмпирическое значение превосходит критическое на уровне значимости 0,01 (1%), следовательно принимаем гипотезу H_1 о том, что корреляция между изучаемыми параметрами отличается от нуля, т.е. присутствует на уровне значимости 1%.

Коэффициент ассоциации по Пирсону (для дихотомических переменных) применяется в случае, если переменные принимают значения 0 или 1 [10]. Коэффициент ассоциации вычисляется по формуле

$$A = \frac{P_{xy} - P_x P_y}{\sqrt{P_x \cdot P_y \cdot q_x \cdot q_y}},$$

где P_x и P_y – частоты появления переменной X и Y соответственно (относительное количество единиц в выборках); q_x=1-P_x; q_y=1-P_y; P_{xy} - относительное количество одновременного наличия единичного значения признаков X и Y.

Уровень значимости для коэффициента ассоциации по Пирсону определяется по формуле:

$$t_э = |A_э|\sqrt{\frac{n-2}{1-A_э^2}},$$

где n – число пар коррелирующих признаков.

Число степеней свободы df=n-2.

Пример 2.4. Предположим, что исследуется связь интереса к сериалам учеников школьного класса и их родителей (две градации: 1 – интерес есть; 0 – интереса нет). Множество X – ученики, множество Y – родители. Результаты исследования сведены в таблицу:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
Y	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0

Выдвигаются гипотезы: H_0 – корреляционная связь отсутствует (не отличается от нуля) и коэффициент ассоциации не является значимым; H_1 – корреляционная связь имеет место.

Решение задачи приведено на рис. 2.10.

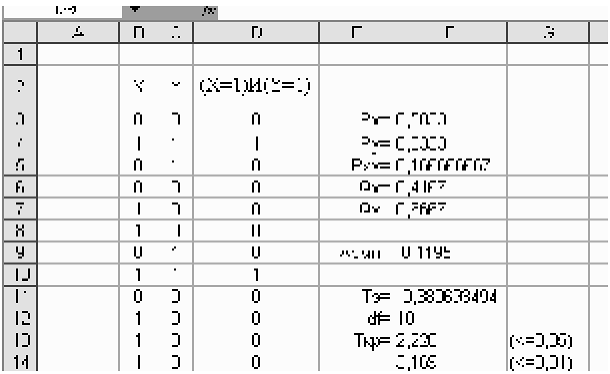


Рис. 2.10. Результаты решения задачи о тесноте связи между дихотомическими признаками

При этом в соответствующие ячейки записаны следующие формулы:

(D3) → =ЕСЛИ(И(B3=1;C3=1;1);1;0)

……………………………………………..

(D14) =ЕСЛИ(И(B14=1;C14=1;1);1;0)

определяет факт одновременного единичного качества;

(F3) → =СЧЁТЕСЛИ(B3:B14;1)/СЧЁТ(B3:B14)

вычисляет частоту появления единичного значения свойства в выборке X;

(F4) → = =СЧЁТЕСЛИ(C3:C14;1)/СЧЁТ(C3:C14)

вычисляет частоту появления единичного значения свойства в выборке Y;

(F5) → =СЧЁТЕСЛИ(D3:D14;1)/СЧЁТ(B3:B14)

вычисляет относительное количество одновременного наличия единичного значения признаков *X* и *Y*;

(F6) → =1-F3

вычисляет частоту появления нулевого значения свойства в выборке X;

(F7) → =1-F4

вычисляет частоту появления нулевого значения свойства в выборке Y;

(F9) → =(F5-F3*F4)/КОРЕНЬ(F3*F4*F6*F7)

вычисляет эмпирическое значение коэффициента ассоциации;

(F11) → =ABS(F9)*КОРЕНЬ((СЧЁТ(B3:B14)-2)/(1-F9^2))

вычисляет уровень значимости для эмпирического значения коэффициента ассоциации;

=СЧЁТ(B3:B14)-2

вычисляется число степеней свободы;

(F13) → =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;F12)

вычисляется критическое значение критерия *t*-Стьюдента для уровня значимости 0,05;

(F14) → =СТЬЮДРАСПОБР(0,01;F12)

вычисляется критическое значение критерия *t*-Стьюдента для уровня значимости 0,01.

Видно, что критическое значение критерия *t*-Стьюдента больше эмпирического значения коэффициента ассоциации, а это означает, что подтверждается гипотеза H_0, т.е. теснота связи (корреляционная связь) между интересом учеников и их родителей к сериалам отсутствует (не отличается существенно от нуля) и значение коэффициента ассоциации не является значимым.

В данном параграфе рассмотрены некоторые примеры использования электронной таблицы Excel для выполнения статистических расчетов. Примеры имели в большей степени методическую цель: показать возможности Excel. Используя электронную таблицу можно решать и другие, более сложные задачи статистического анализа. Однако гораздо удобнее и проще использовать специализированное программное обеспечение, ориентированное на решение именно статистических задач. Наиболее простыми являются программы «Педагогическая статистика» и STADIA, тем более они являются свободно распространяемыми и могут быть загружены с адресов http://www.mtas.ru/uploads/stat.zip и http://statsoft.msu.ru/stadia.zip.

2.3. Обзор программного обеспечения для статистического анализа данных

Потребность в средствах статистического анализа данных очень велика, что и послужило причиной для развития рынка статистических программ.

Наилучший выбор статистического пакета для анализа данных зависит от характера решаемых задач, объема обрабатываемых данных, квалификации пользователей, имеющегося оборудования.

Число статистических пакетов, получивших распространение в России, достаточно велико (несколько десятков). Из зарубежных пакетов это STATGRAPHICS, SYSTAT, STATISTICA, SPSS, SAS, CSS. Из отечественных можно назвать такие пакеты, как STADIA, ЭВРИСТА, МЕЗОЗАВР, САНИ, КЛАСС-МАСТЕР, СТАТЭксперт и др.

Для пользователей, имеющих дело со сверхбольшими объемами данных или узкоспециальными методами анализа, пока нет альтернативы использованию профессиональных западных пакетов. Среди интерактивных пакетов такого рода наибольшими возможностями обладает пакет SAS.

Если Вам необходимо обработать данные умеренных объемов (несколько сотен или тысяч наблюдений) стандартными статистическими методами, подойдет универсальный или специальный статистический пакет, надо только убедиться, что он содержит нужные методы обработки.

Пакеты STADIA и STATISTICA являются универсальными пакетами, содержащими большинство стандартных статистических методов. Пакеты SPSS и SyStat перенесены на персональные компьютеры с больших ЭВМ предыдущих поколений, поэтому, наряду с представительным набором тщательно реализованных вычислительных методов, они сохраняют и некоторые архаические элементы. Однако имеющиеся в них возможности командного языка (впрочем, очень непростые в изучении и использовании) могут быть весьма полезны для сложных задач обработки данных. Пакеты STADIA и STATISTICA исходно разработаны для ПЭВМ, а поэтому проще в обращении. Эти пакеты, пожалуй, содержат наибольшее количество методов статистического анализа.

Для того, чтобы статистический пакет общего назначения был удобным и эффективным в работе, он должен удовлетворять многочисленным и весьма жестким требованиям. В частности, необходимо, чтобы он:

содержал достаточно полный набор стандартных статистических методов;

был достаточно простыми для быстрого освоения и использования;

отвечал высоким требованиям к вводу, преобразованиям и организации хранения данных как в самом пакете, так и обмену с широко распространенными базами данных;

имел широкий набор средств графического представления данных и результатов.

имел подробную документацию, хорошо продуманную с учетом интересов как начинающего пользователя, так и специалиста-статистика.

Наконец, немаловажное значение имеет цена пакета. Профессиональные западные статистические пакеты обычно стоят от 2 до 10 тысяч долларов и более. Эти пакеты позволяют обрабатывать гигантские объемы данных, включают средства описания задач на встроенном языке и дают возможность построения на их основе систем обработки информации для целых предприятий.

Пакеты, рассчитанные на массового пользователя, стоят дешевле - обычно 500…1500 долларов. Эти пакеты отличаются от профессиональных прежде всего ориентацией на индивидуального пользователя: преимущественно диалоговым режимом работы, наличием ограничений по объему обрабатываемых данных и т.д. Имеются и более дешевые пакеты (200…300 долларов и ниже), но они обычно обладают весьма скромными возможностями.

Отечественные статистические пакеты стоят существенно дешевле, как правило, их цена составляет от 200 до 500 долларов.

В отличие от западных, многие отечественные пакеты в гораздо большей степени подходят для нужд среднего российского пользователя. Здесь основные операции обычно сразу обозримы из головных меню, а рутинные процедуры выполняются с минимумом действий и разветвлений по принципу: «прямым путем – к понятному результату».

Наиболее развитой системой контекстной экранной помощи включающей объемный справочник-гипертекст и экспертную систему по выбору метода статистического анализа, обладает пакет STADIA. Здесь каждый числовой статистический вывод сопровождается короткой и понятной интерпретацией (впрочем, более искушенный в статистике пользователь может сделать интерпретацию результатов сам, благо все данные для этого также выводятся на экран).

В пакете Мезозавр реализована оригинальная система экспертной оценки сложных моделей временных рядов. Система Эвриста выделяется живо и изобретательно написанной документацией, которая читается как захватывающее повествование о возможностях статистических методов.

Все три пакета аккумулируют передовой опыт российской науки, что не удивительно: их создавали ведущие специалисты Академии наук и Московского университета. Они стабильно распространяются и эксплуатируются сотнями пользователей на протяжении целого ряда последних лет.

STATISTICA - это универсальная интегрированная система, предназначенная для статистического анализа, визуализации данных и разработки пользовательских приложений. Программа содержит широкий набор процедур анализа для применения в научных исследованиях, технике, бизнесе. Помимо общих статистических и графических средств в системе имеются специализированные модули, например, для проведения социологических или биомедицинских исследований, решения технических и промышленных задач: карты контроля качества, анализ процессов и планирование эксперимента.

Система STATISTICA может служить не только эффективным инструментом для научных исследований, но и чрезвычайно удобной средой для обучения методам статистического анализа. Система STATISTICA активно используется в учебном процессе в многих ведущих вузах России.

Пакет STATISTICA является наиболее динамично развивающимся статистическим пакетом и по многочисленным рейтингам является мировым лидером на рынке статистического программного обеспечения.

Пользователь может добавить собственную панель инструментов с тем или иным методом статистического анализа. Несомненным достоинством пакета является возможность дописывать (наращивать) систему при помощи встроенного языка программирования.

STATISTICA Neural Networks - универсальный и мощный нейронно-сетевой пакет. Он дает возможность автоматически получать эффективные и правильные решения для широкого круга задач, в которых использование традиционных статистических методов затруднено, например, из-за отсутствия априорных моделей или конкретных гипотез.

Универсальный российский статистический пакет STADIA - за 12 лет существования и развития стал аналитическим инструментом для многих тысяч пользователей в различных областях науки, техники, планирования, управления, производства, сельского хозяйства, экономики, бизнеса, маркетинга, образования, медицины по всей русскоязычной Евразии. По своим базовым возможностям сопоставим с наиболее известными западными статистическими пакетами. Отличается простотой использования применительно к отечественной аудитории.

Следует обратить внимание на удивительную компактность пакета STADIA: он требует в несколько раз меньше места на диске, чем его конкуренты, и при этом не уступает, а часто и превосходит их по своим функциональным возможностям.

Пакет работает на любом IBM-совместимом компьютере и в любой среде Windows. Программа занимает на диске 4.1 Мб и требует минимальной памяти от 8 Мб.

Возможности:

исчерпывающий набор самых современных и эффективных методов анализа: описательная статистика, дисперсионный, корреляционный и спектральный анализ, сглаживание, прогнозирование, простая, нелинейная регрессия, кластерный и факторный анализ, методы контроля качества, анализ и замена пропущенных значений.

полный комплект деловой и научной, 2-х, 3-х и многомерной графики: функции, зависимости, прогнозы, диаграммы рассеяния, карты, гистограммы, столбиковые, башенные и круговые диаграммы, установка размеров, надписей по осям и под рисунком и проч.

разнообразные преобразования и вычисления, импорт / экспорт данных и результатов;

развитая экранная помощь, понятная интерпретация результатов.

Demo-версия программы STADIA обладает всеми возможностями пакета и позволяет обрабатывать данные небольшого объема (до 400 чисел), вводимые с клавиатуры. Тем самым она позволяет самостоятельно и практически овладеть всеми современными методами прикладной статистики, а во многих областях исследования сразу получить научные и практически значимые результаты.

Программа «Педагогическая статистика» позволяет сравнивать выборки с использованием ряда статистических критериев.

Для данных, измеренных в шкале отношений: критерий Вилкоксона-Манна-Уитни; критерий Крамера-Уэлча; критерий хи-квадрат.

Для данных, измеренных в порядковой шкале: критерий хи-квадрат; критерий Фишера.

2.4. Практическое применение статистических критериев с использование программы «Педагогическая статистика»

Критерий Вилкоксона-Манна-Уитни оперирует с результатами парных сравнений двух выборок и позволяет установить достоверность их совпадения или различия. Эмпирическое значение критерия задается следующей формулой:

$$W_э = \frac{\left| \frac{N \cdot M}{2} - U \right|}{\sqrt{\frac{N \cdot M \cdot (N + M + 1)}{12}}},$$

где N и M – объем выборок;

$$\left| a_1 + a_2 + ... - a_N - \frac{1}{2} (b_1 + b_2 + ... + b_N) = \sum_{i=1}^{N} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} b_i \right.$$

Алгоритм определения достоверности совпадений и различий для экспериментальных данных, измеренных в шкале отношений, с помощью критерия Вилкоксона-Манна-Уитни заключается в следующем:

1. Вычислить для сравниваемых выборок $W_э$ – эмпирическое значение критерия Вилкоксона.

2. Сравнить это значение с критическим значением на уровне 0,05, равным 1,96: если $W_э \le 1{,}96$, то сделать вывод: «характеристики сравниваемых выборок совпадают с уровнем значимости 0,05»;

если $W_э > 1{,}96$, то сделать вывод «достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%».

Критерий Крамера-Уэлча применяется для определения достоверности совпадений и различий характеристик сравниваемых выборок, измеренных в шкале отношений.

Формула для вычисления эмпирического значения критерия имеет следующий вид:

$$T_э = \frac{\sqrt{MN|\bar{x} - \bar{y}|}}{\sqrt{M\sigma_x^2 + N\sigma_y^2}}.$$

Алгоритм определения достоверностей совпадения и различий характеристик сравниваемых выборок для экспериментальных данных, измеренных в шкале отношений, с помощью критерия Крамера-Уэлча заключается в следующем:

1. Вычислить для сравниваемых выборок $T_э$ – эмпирическое значение критерия Крамера-Уэлча.

2. Сравнить это значение с критическим значением на уровне значимости 0,05, равным 1,96:

если 1,96, то сделать вывод: «характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0,05»;

если $T_э > 1{,}96$, то сделать вывод «достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%».

Критерий однородности хи-квадрат целесообразно использовать при сравнении выборок, данные которых представлены в порядковой шкале. Эмпирическое значение критерия представлено формулой

$$\chi_э^2 = NM \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i},$$

где n_i и m_i – количество элементов выборок N и M соответственно получивших i баллов (имеющих ранг i); L – количество рангов.

Критическое значение критерия определяется для заданных уровней значимости по таблице Приложения 4 (в программе делается автоматически).

Критерий Фишера целесообразно использовать для анализа данных, представленных в дихотомической шкале. Эмпирическое значение критерия рассчитывается по формуле

$$\varphi_{эмп} = |2\,arcsin(\sqrt{p}) - 2\,arcsin(\sqrt{q})| \sqrt{\frac{M \cdot N}{M + N}}.$$

Здесь $p=m/M$; m – количество единичных элементов в первой выборке численности M; $q=n/$; n - количество единичных элементов во второй выборке численности N.

Критическое значение критерия на уровне значимости 0,05 равно 1,64.

Основное окно программы имеет вид, представленный на рис. 3.11.

Исходные данные по экспериментальной и контрольной группам вводятся в соответствующие поля.

Имеется возможность выбора шкалы измерений в поле с раскрывающимся списком «Шкала»: шкала отношений или порядковая.

Поле с раскрывающимся списком «Критерий» позволяет выбрать любой их рассмотренных типов критерия, либо предоставить возможность программе самостоятельно выбрать критерий.

Имеющиеся 4 вкладки позволяют осуществлять ввод индивидуальных данных по каждому испытуемому, групповые данные (в этом случае для каждой группы все индивидуальные данные равны групповым данным соответствующей группы); получать описательную статистику и результаты сравнительного статистического анализа в виде значений критериев и интерпретации результатов.

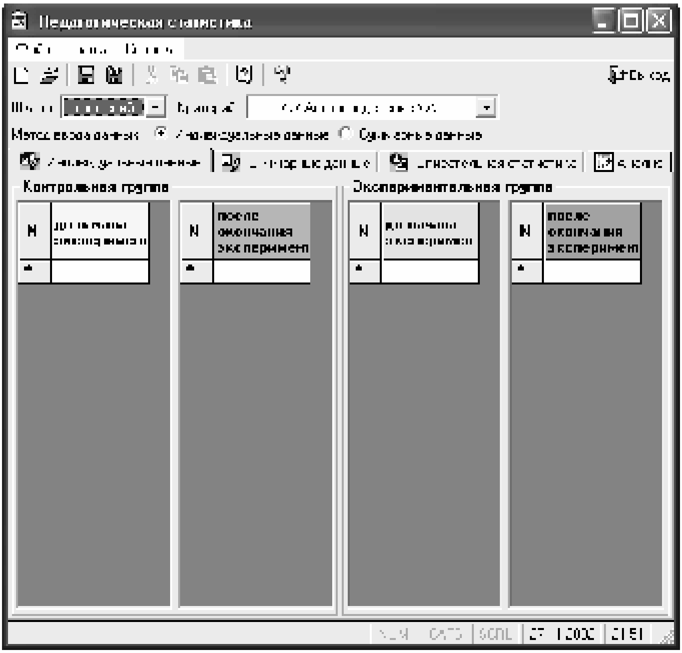


Рис. 2.11. Окно программы «Педагогическая статистика»

Пример заполнения экспериментальными данными в случае использования дихотомической шкалы приведен на рис. 3.12.

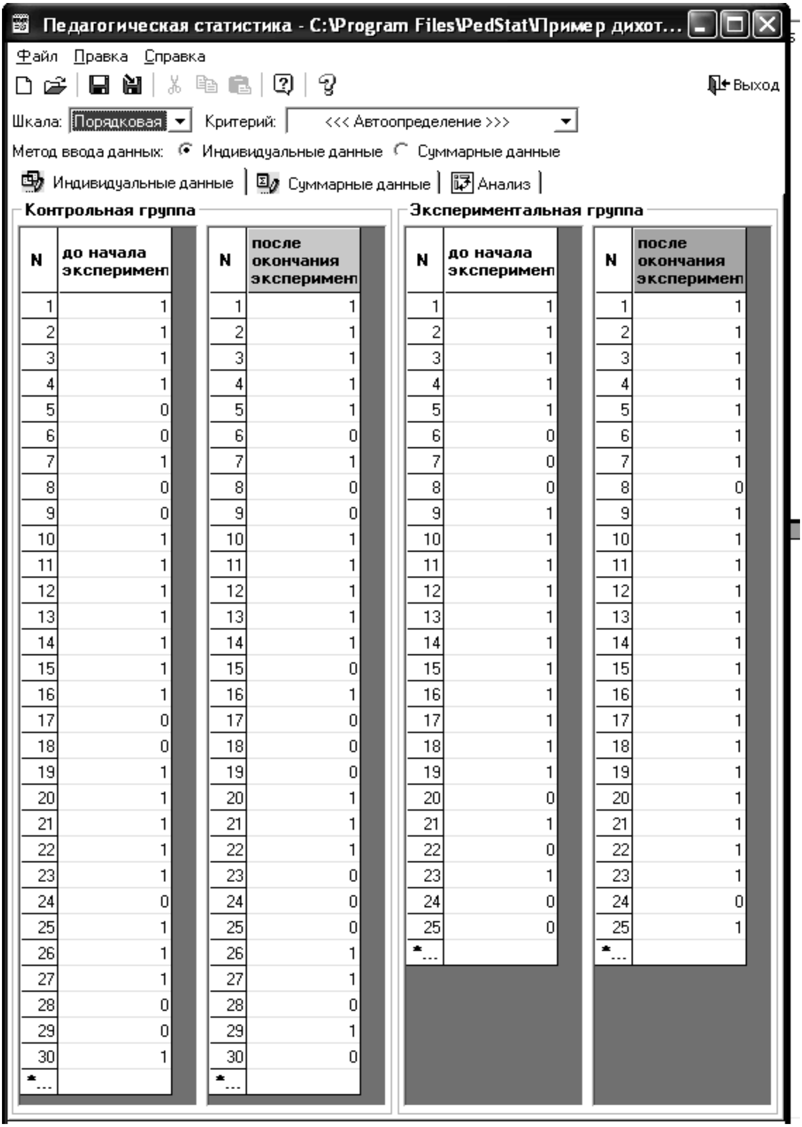


Рис. 2.12. Ввод исходных дихотомических данных

На рис. 3.13. показаны результаты анализа данного примера на основе критерия Фишера.

Как видно из примера, работа с этой программой весьма проста. Но эта простота достигается ограниченность возможностей програм-

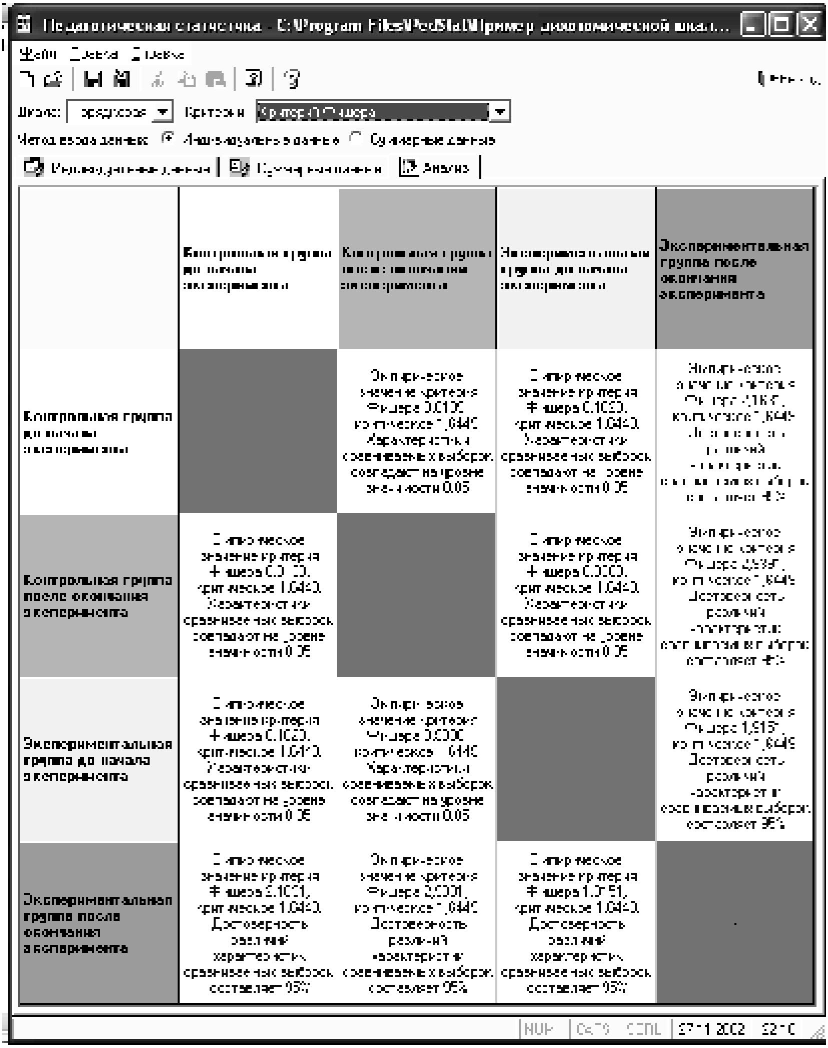


Рис. 2.13. Результаты анализа дихотомических данных

мы. Не смотря на это, можно рекомендовать данную программу для анализа результатов педагогических экспериментов, проводимых студентами при подготовке выпускных квалификационных работ.

Программа содержит весьма подробную и простую справку по работе.

2.5. Возможности программы STADIA

При работе со STADIA вы сможете:

даже без чтения инструкции буквально в течение получаса освоиться в работе, получая на экране справки по любой операции;

получить совет, какой метод анализа лучше применить для имеющихся данных;

легко и быстро ввести, просмотреть, изменить и сохранить данные с помощью экранного редактора типа электронной таблицы;

использовать широкий спектр возможностей высококачественного графического представления данных на печати и на экране в многоцветном исполнении;

провести всесторонний анализ данных с использованием самых современных и эффективных методов;

оперативно сохранить на диске все результаты, информацию и графики для включения в статьи и отчеты;

прочитать много полезного о статистике, статистических данных и методах;

удовлетворить запросы новичка и профессионала.

Кроме того:

в пакете реализован исчерпывающий комплект устоявшихся и общепризнанных статистических и вычислительных методов анализа данных;

результаты статистических вычислений сопровождаются более чем 60 видами графиков и диаграмм;

возможна работа с неполными и пропущенными данными;

имеются все необходимые средства преобразования данных;

а также многое другое.

Возможности новичка. Новичок сможет провести анализ выборочных распределений, временных рядов, парной корреляции и регрессии, получить прогноз развития процесса, построить и вывести на печать соответствующие графики и диаграммы. Меню, информативные подсказки и экраны помощи помогут начинающему пользователю быстро выполнить нужную ему обработку данных.

Средства для специалиста. Специалист найдет средства для углубленного анализа: регрессионный, кластерный, факторный, дискри-минантный анализ, параметрический и непараметрический дисперсионный анализ.

Все предоставляемые методы наглядны и легки в использовании.

Модификации. Система STADIA выпускается в четырех модификациях: учебная, студенческая, базовая и профессиональная, отличающихся только объемом обрабатываемых данных (400, 400, 4000, 20 000 и 32 000 чисел совокупно в матрице данных). Условия поставки пакета и инсталляцию учебной версии можно найти по адресу: http://statsoft.msu.ru.

STADIA работает на любом IBM-совместимом ПК и в любой версии Windows.

Составные компоненты

1. *Электронная таблица* является центральным компонентом и предназначена для ввода, хранения, просмотра и редактирования исходных данных. В этой таблице данные представляются в виде матрицы или вектора, где столбцы соответствуют переменным или выборкам, а строки — значениям переменных, измерениям или объектам. Элементы таблицы могут содержать как числовые, так и символьные *(номинальные)* значения.
2. *Файловая подсистема* обеспечивает ввод различного типа информации из дисковых файлов и запись данных на диск.
3. *Блок преобразований* предназначен для выполнения различных преобразований над исходными данными (алгебраические, логические, матричные, комбинаторные и другие преобразования).
4. *Калькулятор* обеспечивает оперативное выполнение различных вспомогательных вычислений по вводимым выражениям.
5. *Графопостроитель* обеспечивает построение различных графиков исходных данных.
6. *Графический редактор* позволяет редактировать графики данных и графики результатов анализа, сохранять их в дисковых файлах или выводить на печать.
7. *Блок статистики* содержит набор процедур, реализующих вычисления по наиболее употребительным статистическим методам.
8. *Текстовый редактор результатов* позволяет просматривать и редактировать выдачу числовых результатов анализа, сохранять ее в дисковом файле, выдавать на печать, переносить во внешние пакеты.
9. *Экранный справочник* состоит из серии разделов с сетью перекрестных электронных ссылок и содержит описание всех операций и математических методов.

2.6. Общие сведения о факторном анализе

Факторный анализ (от лат. factor — действующий, производящий и греч. analysis — разложение, расчленение) — совокупность методов, которые на основе объективно существующих корреляционных взаимосвязей признаков (или объектов) позволяют выявлять латентные (или скрытые) обобщающие характеристики структуры изучаемых объектов и их свойств.

Под фактором понимается гипотетическая, непосредственно не измеряемая, латентная (скрытая) переменная, которая имеет линейные корреляционные связи с исходными измеряемыми переменными. Цели ФА могут быть различными, в зависимости оттого, какая из имеющихся техник применяется в том или ином конкретном случае. Одной из таких целей является выявление гипотетических (ненаблюдаемых) факторов, призванных достаточно полно объяснить корреляционную матрицу наблюдаемых количественных признаков. При этом предполагается, что наблюдаемые переменные в свою очередь являются линейной комбинацией факторов. Отметим, что по определению каждый из факторов непосредственно для измерения недоступен - он гипотетичен, и представляет собой не более чем сумму измеряемых количественных признаков с различными весовыми коэффициентами.

Такое выражение для оценки величины фактора может иметь, например, такой вид, представленный на формуле

$$F_i = \sum_{j=1}^{p} a_j * X_{ij}$$

При этом индекс «*i*» относится к номеру наблюдения (строке в матрице данных), а индекс «*j*» относится к номеру измеряемой переменной (столбцу в матрице данных). Сомножитель a_j означает весовой коэффициент. Поскольку различие единиц измерений и масштаба измеряемых переменных могли бы оказывать влияние на величину такого коэффициента, то весовые коэффициенты вычисляются для так называемых безразмерных переменных. Процедура получения безразмерных переменных заключается в том, что для каждого значения количественных переменных в исходной матрице данных производится вычитание среднего значение (по данной конкретной переменной) и полученная разность делится на стандартное отклонение (для этой же переменной). Полученные таким образом безразмерные переменные имеют нулевое среднее и единичное стандартное отклонение. Итак, первое ограничение на использование факторного анализа заключается в том, что используемые в этом виде анализа признаки должны быть количественными. Далее, технология ФА построена на линейных соотношениях (корреляциях) между исходными количественными признаками. В качестве примера такой зависимости приведём двумерную диаграмму рассеяния, отражающую линейную корреляцию между ростом и весом человека (рис. 2.12).

Отметим также, что процедура ФА использует корреляционную матрицу, состоящую из коэффициентов корреляции Пирсона. Вычисление же коэффициентов корреляции Пирсона предполагает, что каждый из анализируемых количественных признаков, подчиняется нормальному закону. Ниже приведены гистограммы распределения для роста и веса.

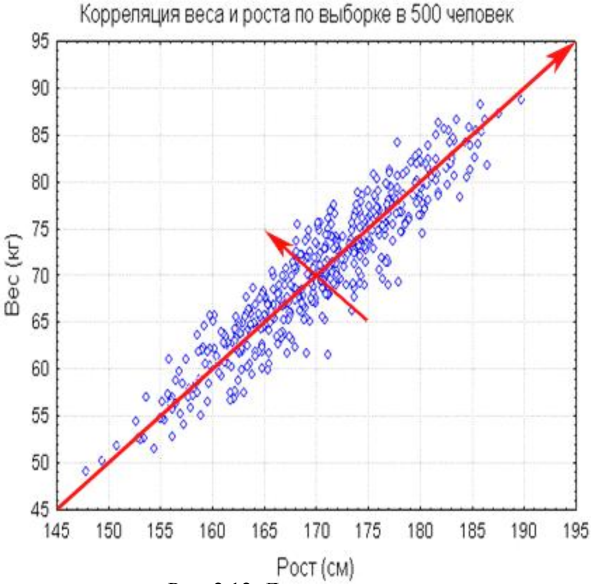


Рис. 2.12. Диаграмма рассеяния

На этих двух рисунках сплошной чертой изображена кривая плотности нормального распределения. Проверка гипотезы нормальности также подтверждается с помощью критериев Шапиро–Уилки и Колмогорова–Смирнова.

Вернувшись к двумерной диаграмме рассеяния роста и веса, можно отметить, что рассеяние наблюдений имеет форму эллипса. Причём одна из осей этого эллипса, изображённая непрерывной прямой линией, гораздо длиннее той оси, которую можно провести перпендикулярно к первой оси. Это означает, что дисперсия наблюдений гораздо больше по первой оси, чем по второй. Фактически первая ось в данном случае выступает в роли первого фактора, как линейной комбинации двух количественных признаков, роста и веса.

Разумеется, для случая всего лишь двух признаков использование ФА лишено смысла. Одна из целей ФА является редукция (свёртка) пространства исходных признаков. Под редукцией понимается переход от многих исходных количественных признаков к пространству факторов, число которых значительно меньше числа исходных количественных признаков. Например, от исходных 20–40 количественных признаков производится переход к 3–5 факторам. Что же даёт исследователю уменьшение размерности признакового пространства? Почему целесообразно использовать такой переход? Попытаемся ответить на эти вопросы поподробнее.

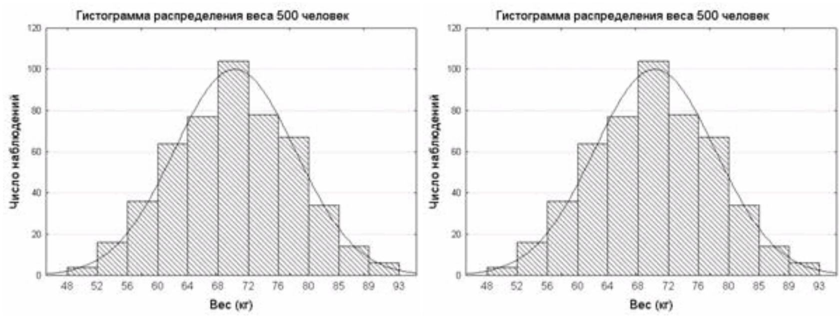


Рис. 2.13. Гистограммы роста и веса

Анализируемые в совокупности корреляционные коэффициенты отражают множество объективно существующих взаимосвязей, которые «зашумлены» большим количеством второстепенных, чаще всего не учитываемых, причин. Кстати, нередко в этом случае в качестве синонима термина причина используют и термин фактор, т.е. некая влияющая, действующая (на интересующий нас комплекс основных показателей) причина. В нашем контексте во избежание двусмысленности мы будем использовать термин «фактор» лишь в том смысле, как он первоначально определён выше. Неким аналогом такого неизмеряемого, а вычисляемого показателя, является индекс Кетле, вычисляемый с использованием роста и веса.

Технология ФА позволяет произвести некоторое разделение реальных взаимосвязей, и этого «шума». Такая «очищенная» от «шума» структура взаимосвязей позволяет сконцентрировать в некоторых из новых переменных – факторах, значительно больше информации, нежели в отдельно взятой исходной количественной переменной. Благодаря этому отдельный фактор можно рассматривать как совокупность наиболее сильно взаимосвязанных между собой исходных признаков. Вследствие этого ФА позволяет вычленить из всего многообразия исходных признаков отдельные конгломераты таких взаимосвязанных исходных признаков. Исходя из состава таких конгломератов, а также из величины весовых коэффициентов, возможно на вербальном уровне описать свойства такого фактора, связав его с соответствующим прилагательным (гормональный, спирометрический, гематологический, гуморальный, и т.п.). При этом оказывается, что отображение всех наблюдений в осях нескольких пар первых факторов, обычно это пары Ф1–Ф2, Ф1–Ф3, Ф2–Ф3 и т.п. (Ф*i* – *i*-тый фактор), даёт достаточно информативное представление о взаимном расположении сравниваемых многомерных групп наблюдений. Итак, с одной стороны выделение факторов позволяет выделить подгруппы взаимосвязанных количественных признаков, а с другой – более наглядно представить взаимное расположение имеющихся подгрупп наблюдений в осях этих новых, более информативных признаков.

Надо отметить, что разработано довольно много методик факторного анализа, в частности, так называемые техники R, Q, P, S, T и O. Имеется немало алгоритмов так называемого вращения осей, оценки первичных осей и т.д. В большинстве доступных современному исследователю статистических пакетах реализовано малая часть всех достижений ФА.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данном учебном пособии рассмотрены основные возможности компьютерной обработки экспериментальных данных. Появление данной работы обусловлено потребностью использования современных компьютерных, информационных технологий при обработке экспериментальных данных психолого-педагогических исследований. Правильное использование возможностей, предоставляемых современной компьютерной техникой, позволяет решить ряд задач, таких как оперативная обработка экспериментальных данных, возможность быстрой проверки некоторых теоретических предположений и др.

Обучение студентов и аспирантов проводится на базе общедоступной программы Excel и программы «Педагогическая статистика», одной из наиболее простых программ (с точки зрения авторов), предназначенных для численной обработки результатов экспериментальных работ. Ограничение рассмотренными программными средствами обусловлено спецификой математической и компьютерной подготовки студентов.

Несомненно, что в ближайшие годы значимость компьютерной обработки экспериментальных данных будет возрастать. В этой связи обучение студентов и аспирантов основным навыкам современной обработки экспериментальных данных является актуальной задачей, которой необходимо уделять должное внимание, чтобы не допустить отставание в этой области. Весьма мощными программными средствами являются комплексы Statistica, STADIA и SPSS. Их освоение требует отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. Учебное пособие. – СПб.: Речь, 2004.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.

3. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. – СПб.: ООО «Речь, 2004.

4. Глас Дж., Стенли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. / Пер. с англ. Под общ. Редакцией Ю.П. Адлера. – М.: Прогресс, 1976.

5. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. – М.: Педагогика, 1977. 136 с.

6. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Алгебра. Элементы еории множеств. Линейные уравнения и неравенства. Матрицы и определители. –М.: Просвещение, 1974,- 160 с.

7. Рубцова Н.Е. Линьков С.Л. Статистические методы в психологии: учебное пособие. – Изд-е 2-е, перераб. И доп. – М.: УМК «Психология», 2005.

8. Суходольский Г. В. Математические методы в психологии. 2-е изданием. – Харьков: Изд-во Гуманитарный центр, 2006.

9. Суходольский Г. В. Основы математической статистики для психологов. – Л. : ЛГУ, 1972.

10. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. – М.: Московский психолого-социальный институт. Изд-во Флинта, 2003.

11. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002.

12. Сепегин А.Г. Психологический анализ в среде Excel. Математические методы и инструментальные средства. М.: Ось-89, 2005.

13. Бодалев А.А., Столин В.В. Общая психодиагностика. – СПб., 2002.

14. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных. 4-е изд. перераб. И доп. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006.

15. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) – М.: МЗ-Пресс, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Приложение 3

Таблица значений функции Пуассона: $\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$

m	***a***								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3696
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	-	-	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	-	-	-	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0002	0,0003

m	***a***								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0081	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1318
8	-	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	-	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,0318
10	-	-	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1180
11	-	-	0,0002	0,0019	0,0082	0,0025	0,0452	0,0722	0,0970
12	-	-	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	-	-	-	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	-	-	-	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16	-	-	-	-	-	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17	-	-	-	-	-	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0029
19	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0004	0,0014
20	-	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0006
21	-	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0003
22	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0001

Приложение 4

Критические точки распределения c^2

Число степеней свободы $\boldsymbol{k}$	Уровень значимости $\boldsymbol{\alpha}$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 5

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (**двусторонняя** критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,37
Число степеней свободы k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (**односторонняя** критическая область)					

Приложение 6

Таблица значений $t_g = t(g, n)$

n	γ			***n***	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

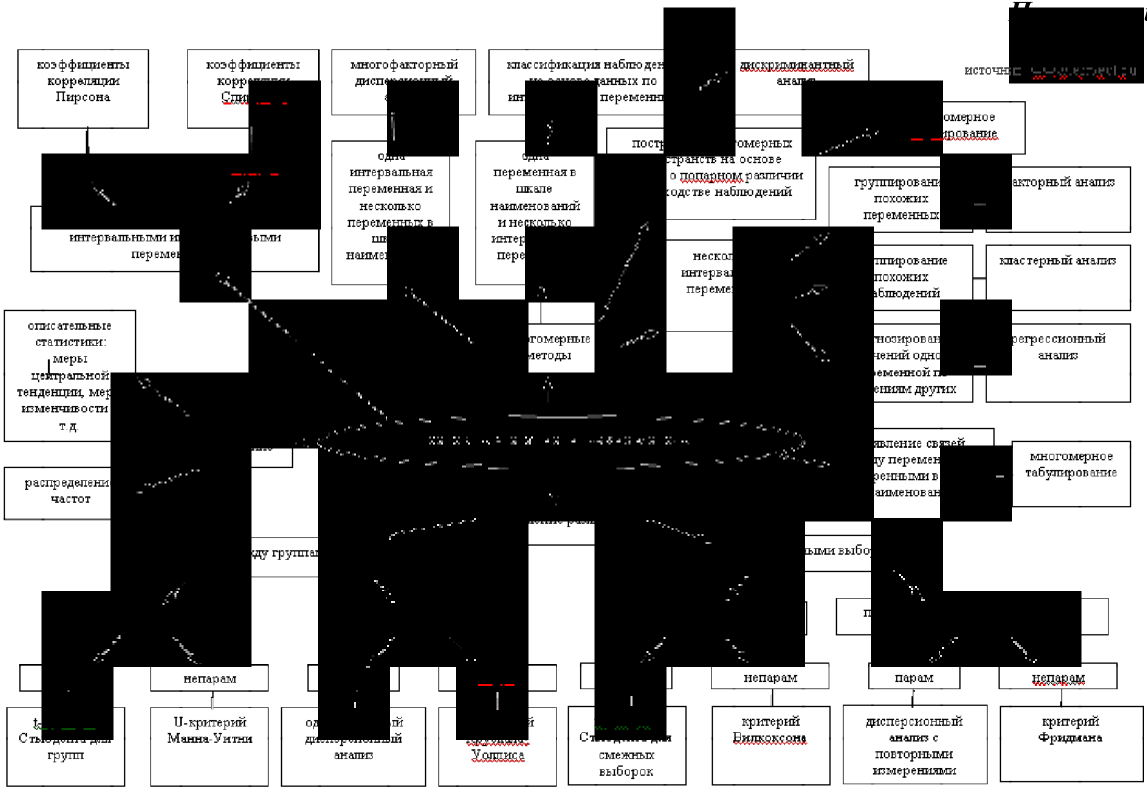
Приложение 7

Критические значения выборочного коэффициента корреляции рангов (по Спирмену)

Связь достоверна, если $r_{s\ эмп}$ i $r_{s\ 0,05}$, и более достоверна, если если $r_{s\ эмп}$ i $r_{s\ 0,01}$

n	α		*n*	α		*n*	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	-	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	-	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,40	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,51	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

П[redacted]ие 8



Содержание

Учебное издание

Красильников Владимир Вячеславович,
Тоискин Владимир Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка П.Г. Немашкалов

Подписано в печать 20.11.08

Формат 60х84 $^{1}/_{16}$	*Усл.печ.л. 5,12*	*Уч.-изд.л. 4,69*
Бумага офсетная	*Тираж 100 экз.*	*Заказ 58*

Типография ООО «Борцов»,
г. Ставрополь, ул. Семашко 16.
Тел./факс: (8652) 35-85-58.