МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Л.Г. Зверева

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ставрополь
«АГРУС»
2019

УДК 512.643+512.644
ББК 22.1
З–43

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ГОУ ВПО Ставропольского государственного
педагогического института

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой общенаучных дисциплин
Армавирского механико-технологического института (филиала)
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»
Л. А. Горовенко;
кандидат технических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и информатики
ГОУ ВПО Ставропольского государственного педагогического института
В. С. Тоискин

Зверева, Лариса Геннадиевна
З-43 Элементы линейной алгебры: учебное пособие для студентов педагогического вуза. – Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2019. – 88 с.

ISBN 978-5-9596-1584-0

Содержит типовые задания, задания для самостоятельной работы, вопросы к зачету, тесты для проверки остаточных знаний. Представляет собой руководство по дисциплине «Алгебра» для использования в первом семестре.

Для студентов очной формы обучения Ставропольского государственного педагогического института, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 44.03.05. Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика», «Информатика».

УДК 512.643+512.644
ББК 22.1

ISBN 978-5-9596-1584-0

© Авторский коллектив, 2019
© ГБОУ ВО Ставропольский государственный педагогический институт, 2019
© ФГБОУ ВО Ставропольский государственный аграрный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Пособие, предлагаемое вниманию читателя, содержит учебные материалы по дисциплине «Алгебра», читаемой кафедрой математики и информатики Ставропольского государственного педагогического института, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата, 44.03.05 «Педагогическое образование» Педагогическое образование с двумя профилями подготовки, профили «Математика», «Информатика».

Содержание учебного пособия соответствует государственному стандарту, принятому для направления подготовки профили «Математика», «Информатика», а также тем требованиям, которые предъявляют к содержанию курса «Алгебра» последующие дисциплины. Авторы надеются, что публикация предлагаемого пособия поможет студентам Ставропольского государственного педагогического института сориентироваться в той разнообразной литературе, которая существует по алгебре, отобрать материал для изучения в течение семестра и подготовки к зачету.

ЗАНЯТИЕ 1

МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. (ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ПРЯМОЕ (ДЕКАРТОВО) ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ)

Задачи изучения темы: овладеть основными теоретико-множественными понятиями, знание которых необходимо учителю как для понимания особенностей построения и языка курса математики, так и для освоения в дальнейшем ведущих понятий начального курса математики – понятий числа и величины.

Итогом изучения данной темы должно быть усвоение следующих понятий: множество, элемент множества, равные множества, подмножество, пересечение множеств, объединение множеств, вычитание множеств, дополнение подмножества, разбиение, множества на классы, упорядоченная пара, кортеж, декартово умножение множеств.

Основные понятия теории множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Множеством М** называется объединение в единое целое определенных различимых объектов a, которые называются **элементами** множества. $a \in M$

Множество можно описать, указав какое-нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два множества называются равными, ели они состоят из одних и тех же элементов.

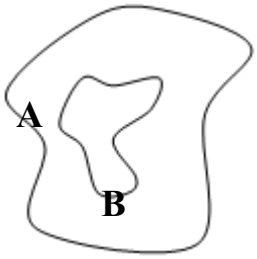
Способы задания множеств

1. Перечислением A = {а,в,с}
2. Указанием характеристик и свойств B = {x|xєN, и x<25}

N – натуральные, Z – целые (положительные и отрицательные), Q – рациональные (m/n, mєZ, nєN), R – действительные, C – комплексные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что множество A **включается (содержится)** в множестве B.

A ⊂ B



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если A ⊆ B, то множество A называется **подмножеством** множества B, а если при этом A ≠ B, то множество A называется **собственным подмножеством** множества B и обозначается A ⊂ B.

Для трех множеств A, B, C справедливы следующие соотношения.

$A \subseteq A$; $A \not\subset A$; $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$; $A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C$;

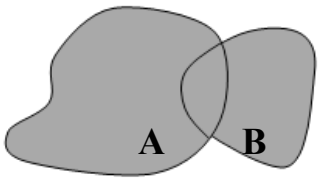
Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением: $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

Здесь знак ∧ обозначает **конъюнкцию** (логическое “и”).

Операции над множествами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Объединением** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

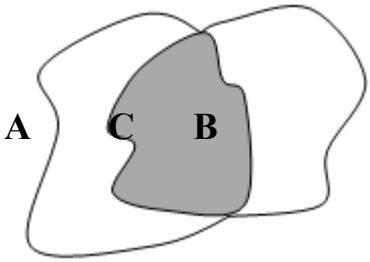
Обозначается: C = A ∪ B.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Пересечением** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B.

Обозначение: C = A ∩ B.

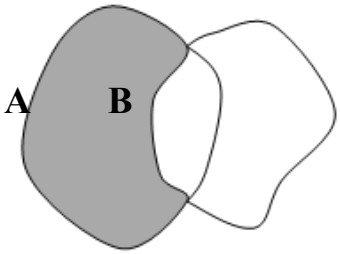


Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

A ∩ A = A ∪ A = A;	(A ∪ B) ∪ C = = A ∪ (B ∪ C);	A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C);
A ∪ B = B ∪A;	(A ∩ B) ∩ C = = A ∩ (B∩ C);	A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);
A ∩ B = B ∩ A;	A ∪ (A ∩ B) = A;	$A \cup \varnothing = A$;
	A ∩ (A ∪ B) = A;	A ∩ ∅ = ∅;

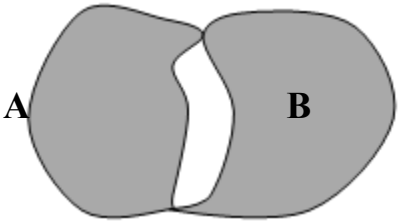
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Разностью** множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Обозначается: $C = A \setminus B$.

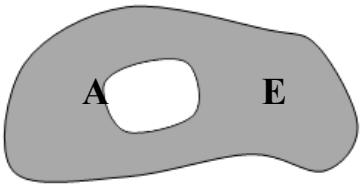


ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается: $A \Delta B$. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$A \setminus B \subseteq A$; $A \setminus A = \varnothing$;	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;	$(A \cap B) \setminus C =$ $= (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;	$A \setminus (B \setminus C) =$ $= (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
$A \Delta B = B \Delta A$;	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;	$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
$C_E E = \varnothing$; $C_E \varnothing = E$; $C_E C_E A = A$;	$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;	$A \cap (B \Delta C) =$ $= (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
$A \cup C_E A = E$; $A \cap C_E A = \varnothing$;	$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$;	$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;

Например.

Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Решение:

Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество $A \setminus B$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество $A \setminus C$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C.

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Отношения и функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Упорядоченной парой** (a, b) двух элементов a и b называется множество $\{\{a\},\{a, b\}\}$. Для любых элементов a, b, c, d справедливо соотношение:

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d;$$

Пара называется упорядоченной, если четко определено, какой элемент первый, а какой второй. A = {1;2;3}; B = {а;в} A×B = {(1;а); (2;а); (3;а); (1;в); (2;в); (3;в)}

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, первый элемент которого принадлежит A, второй B.

$$\boxed{A \times B = \{(a,b) | a \in A; \quad b \in B\}}$$

Декартово произведение n равных множеств A будет называться n – й **декартовой степенью** множества A и обозначаться A^n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***n* – мерным отношением** R на непустом множестве A называется подмножество A^n. Если R – n – мерное отношение на множестве A и $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$, то говорят, что отношение R выполняется для элементов $a_1, a_2, \ldots a_n$ и записывают R $a_1 a_2 \ldots a_n$. Если n = 2, то такое отношение называется **бинарным**.

Для бинарного отношения вместо общей записи Ra_1a_2 применяют запись a_1Ra_2.

Свойства бинарных отношений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведением двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, называется множество

$$\{(x,y)|\exists z(z \in A) \wedge (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}$$

Знак | называется **штрих Шеффера** и обозначает антиконъюнкцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Обратным (инверсным)** отношением к отношению R, заданному на множестве A, называется отношение R^{-1}, определяемое равенством:

$$R^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in R\}$$

Если R, S и T – бинарные отношения на множестве A, то выполняются следующие равенства:

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T); \qquad (R \cup S) \cdot T = (R \cdot T) \cup (S \cdot T);$$

$$(R \cap S) \cdot T = (R \cdot T) \cap (S \cdot T); \qquad (R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1};$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}; \qquad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

Решить на занятии:

1. Известно, что множество M состоит из двузначных чисел, кратных 7 . Образуйте подмножество множества M, состоящее из чисел, которые не делятся на 14.

2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие множества:
A – множество книг по юриспруденции,
B – множество книг в твердом переплете,
C – множество книг, изданных в 2001 г.,
D – множество документальных фильмов,
E – множество книг, изданных в 2001 году по юриспруденции.

3. Найдите объединение и пересечение множеств A и B, если
A = {э, к, з, а, м, е, н}, B = {з, а, ч, е, т}.

4. Найдите пересечение множеств: A = {x| x∈N, x – двузначное число},
B = { x| x∈N, x оканчивается цифрой 7}.

5.Сформулируйте свойства элементов множества P∩Q∩S и перечислите его элементы, если, P = {x| x∈N, x<20}, Q = {x| x∈N, x-четное число}, S = {x|, x кратно 3}.

6. Найдите пересечение а) смежных углов, б) вертикальных углов.

7. Даны множества $A = \{x|\ x \in R,\ -6 \le x \le 2\}$, $B = \{x|\ x \in R,\ -1 \le x \le 6\}$; $C = \{x|\ x \in R,\ -5 \le x \le 5\}$. Используя числовую прямую, укажите характеристическое свойство элементов множества $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$.

8. Найдите дополнение к множеству B до множества A, если

а) $A = \{11,12,48,54,7\}$, $B = \{7,12\}$,

б) $A = \{а, б, в, г, д, е\}$, $B = \{а, е\}$,

в) A – множество студентов СГПИ, B – множество отличников СГПИ

9.Найдите разность множеств P и Q, Q и P, если

$P = \{к, о, м, п, ь, ю, т, е, р\}$, $Q = \{м, ы, ш, ь\}$

10. Даны два множества : $X = \{3;4;5\}$, $У = \{б;в\}$.

Запишите элементы множеств $X \times У$ и $У x X$ в виде таблицы.

11. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства

$(A \setminus B) \cap A \cap (C \setminus B) = C \cap (A \setminus B)$, если $A \subset C$, $B \subset A$

12. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства

$(A \subset B) \setminus A \setminus (C \cup B) = C \setminus (A \cap B)$, если $A \cap C$, $B \cap C = \varnothing$ $B \subset A$

13. Расположите два угла так, чтобы их пересечение представляло собой отрезок.

Домашнее задание

1. Пусть A – множество студентов в нашем университете, B – множество студентов старше 20 лет. Опишите множество $A \cap B$ и изобразите эти множества графически (изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна).

2. Используя числовую прямую, найдите пересечение и объединение множеств A и B, если $A = \{x|\ x \in Z,\ x > -1\}$, $B = \{x|\ x \in Z,\ x < 4\}$

3. A – множество букв в слове «единорог», B – множество букв в слове «легенда», C – множество букв в слове «год», а D – множество цифр в числе 12112212. Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $C x D$;

д) дополнение к подмножеству C до множества A.

4. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства $(A \setminus B) \cup C = C \setminus (C \cap B)$, если $A \cap B$, $C \subset A$, $C \cap B$

5. Найдите дополнение к множеству B до множества A,

если $A = \{x|\ x \in N,\ x < 5\}$, $B = \{x|\ x \in N,\ x < 2\}$

6. Найдите разность множеств $P \setminus Q$ и $Q \setminus P$,

если $P = \{x|\ x \in R,\ -5 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|\ x \in R,\ -1 \le x \le 4\}$

7. Даны множества $B = \{f;\ k;\ g\}$ и $C = \{2;3;4\}$. Запишите множества $B x C$ и $C x B$.

ЗАНЯТИЕ 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ, ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ. (АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ. АКСИОМАТИКА КОЛЬЦА. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ).

Необходимость знакомства с этими абстрактными алгебраическими объектами обусловлена тем, что в последнее время процесс, связанный с переходом математики на теоретико-множественную основу и выходом на передний план аксиоматических методов исследования, изменил представления об алгебре как математической дисциплине.

Начиная со своего возникновения, алгебра понималась как наука о решении уравнений или систем уравнений сначала для чисел, позднее для других конкретных математических объектов. В настоящее время основной объект исследования алгебры свойства операций, производимых над объектами произвольной природы. Возникающие на этом пути абстрактные алгебраические системы достаточно универсальны, чтобы конкретные их реализации можно было найти в разных областях, как математики, так и других наук.

Алгебра, как вам известно из опыта, имеет дело с операциями на множествах. Например, если рассмотреть множество натуральных чисел, то для любых двух чисел m и n вы сумеете определить их сумму и произведение, которые в свою очередь являются натуральными числами. Не проводя вычислений, вы способны предсказать, что сумма n+m совпадёт с суммой m+n. Если $m < n$, то вы сумеете найти единственное натуральное число x , удовлетворяющее уравнению $x + m = n$ и т. д. В течение долгого времени именно решение уравнений (или систем уравнений) считалось основным предметом алгебры.

Решению уравнений (в том числе и квадратных) был посвящен и труд ¾Китаб аль-джебрваль-мукабала арабского математика Эль Хорезми (Хорезми Мухаммед бен Муса), жившего около 800 г. н.э., в котором впервые появился термин аль-джебр, давший в латинизированном варианте название всей математической дисциплине.

Однако полезно помнить, что этим термином Эль Хорезми называл не конкретное уравнение, а одно из двух основных преобразований, используемых им при решении уравнений. Иными словами, свойство операции, заданной на множестве (в данном случае, числовом).

Взгляд на алгебру как на науку, изучающую свойства операций на множествах, возобладавший с развитием математики, оказался весьма плодотворным. Оказалось, что полезно рассматривать не только различные числовые множества, но и множества функций, преобразований (в том числе преобразований геометрических объектов) и даже множества произвольной природы. В соответствии с этим взглядом расширилось и понятие алгебраической операции.

Обратить внимание на:

– Определение группы.
– Примеры групп.
– Аддитивные группы.
– Мультипликативные группы.
– Основные свойства групп.
– Определение подгруппы.
– Определение кольца.
– Примеры колец.
– Основные свойства колец.
– Делители нуля.
– Мультипликативная группа кольца с единицей.
– Понятие поля.
– Примеры полей.
– Основные свойства полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. На множестве А определена **алгебраическая операция,** если каждым двум элементам этого множества, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие некоторый третий элемент из этого же множества.

Примерами алгебраических операций могут служить такие операции как сложение и вычитание целых чисел, сложение и вычитание векторов, матриц, умножение квадратных матриц, векторное умножение векторов и др.

Отметим, что скалярное произведение векторов не может считаться алгебраической операцией, т.к. результатом скалярного произведения будет число, и числа не относятся к множеству векторов, к которому относятся сомножители.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество А с определенной на нем алгебраической операцией (например, умножением) называется **группой**, если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов $a, b, c \in$ А выполняется свойство ассоциативности: $a(bc) = (ab)c$

2) в множестве А существует такой элемент e, что для любого элемента a из этого множества выполняется равенство: $ae = ea = a$

3) для любого элемента a множества существует элемент a' из этого же множества такой, что $aa' = a'a = e$

Различные множества могут являться группой относительно какой – либо операции и не являться группой относительно другой операции.

Число элементов называется **порядком** группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Между элементами множеств M и N установлено **взаимно однозначное соответствие**, если каждому элементу множества M поставлен в соответствие определенный элемент множества N, причем различным элементам одного множества соответствуют различные элементы другого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две группы M и N называются **изоморфными**, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором для любых двух элементов $a, b \in M$ и соответствующим им элементам $a', b' \in N$ элементу

$c = ab$ будет соответствовать элемент $c' = a'b'$.

При этом отображение группы M на группу N называется **гомоморфизмом**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если операция, определенная в группе коммутативна, (т.е. для любых элементов a и b группы верно соотношение $ab = ba$), то такая группа называется **коммутативной** или **абелевой** группой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество R с двумя определенными в нем алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется **кольцом**, если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения дистрибутивна, т.е. для любых элементов a, b и $c \in$ R справедливы равенства:

$$a(b+c) = ab + ac; \qquad (b+c)a = ba + ca;$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если операция умножения, определенная в кольце коммутативна, то такое кольцо называется **коммутативным** кольцом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Полем** называется коммутативное кольцо, в котором для любого ненулевого элемента $a \neq 0$ и любого элемента b существует единственный элемент x такой, что $ax = b$.

Решить на занятии: [2] 55.5(а-е) ,55.6(р,с), 55.10, 63.1(з, и, к), 63.2(г,д).

Домашнее задание: [2] 55.1 (г, д, е), 55.6(а-з), 63.1(а -г), 63.2(а,в).

ЗАНЯТИЕ 3

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ. (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ НА ЧИСЛО. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ. ОПЕРАЦИЯ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ).

Понятие матрицы настолько часто встречается в различных математических приложениях, что с течением времени возник самостоятельный раздел математики – теория матриц. Становление этой теории относится к середине XIX века, но полноту и изящество она приобрела позднее, вместе с развитием линейной алгебры. До сих пор теория матриц остается важным инструментом исследования, хорошо приспособленным и к запросам практики, и к абстрактным конструкциям современной математики.

Приведем примеры использования матриц в технических приложениях.

1. Матрицы используются для описания систем сигналов. В этом случае строки матрицы представляют собой координаты сигнальных точек в n-мерном пространстве.

2. Структуры сетей связи задаются в виде матриц связности и инциденций, т.е. матрицы являются одним из средств описания структур сетей связи.

3. В теории кодирования сигнал представляется в виде матрицы – строки. Результат произведения такой матрицы на так называемую производящую матрицу позволяет судить об искажении сигнала.

Без матричной техники немыслимы многие разделы современной физики, оптики, квантовой механики, теории оптимального управления и.т.д.

Линейные операции над матрицами (сложение матриц и умножение их на действительные числа) обладают свойствами, аналогичными правилам действий с обычными числами. Поэтому по аналогии с алгеброй чисел можно говорить о матричной алгебре.

Произведение матриц – специфическая операция, составляющая основу алгебры матриц. Данная операция обладает рядом характерных особенностей. Во-первых, произведение AB матриц A и B имеет смысл только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Во-вторых, произведение матриц в общем случае некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. В-третьих, произведение двух ненулевых матриц может оказаться нулевой матрицей.

В матричной алгебре понятие обратной матрицы вводится аналогично понятию обратного числа в обычной алгебре и распространяется только на квадратные матрицы. При этом обозначение обратной матрицы A^{-1} не должно вводить в заблуждение – это не возведение в минус первую степень, а просто обозначение. Во всем остальном присутствует аналогия с числами.

При изучении темы обратить внимание на:

– Понятие матрицы.

– Прямоугольные и квадратные матрицы.
– Элементарные преобразования матриц.
– Эквивалентные матрицы.
– Ступенчатые матрицы.
– Приведение матрицы к ступенчатому виду.

Матрицы и действия над ними. Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Матрицей** размера m×n, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m = n), то матрица называется **квадратной**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они *определены только для матриц одинакового размера*. Таким образом, возможно, определить операции сложения и вычитания матриц:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$
$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

Решение.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \; 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \; O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение B^TA^T и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^TA^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.Место для уравнения.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Что такое det будет рассмотрено ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

Пример.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};\ A^TB + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример.

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Алгебраическим дополнением** минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и

строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \ldots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E – единичная матрица того же самого порядка, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}\text{ , i = (1,n), j = (1,n),}$$

$$e_{ij} = 0,\ i \neq j,$$
$$e_{ij} = 1,\ i = j\ .$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример.

Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$\boxed{x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},}$$

где Mji – дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

Пример.

Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

det A = 4 – 6 = -2.

$M_{11} = 4$; $M_{12} = 3$; $M_{21} = 2$; $M_{22} = 1$

$x_{11} = -2$; $x_{12} = 1$; $x_{21} = 3/2$; $x_{22} = -1/2$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример.

Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

ЗАНЯТИЕ 4,5

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. (СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ)

Теория определителей является универсальным аппаратом линейной алгебры и широко используется не только в различных разделах математики, но и в других дисциплинах.

Первое систематическое и обширное изложение теории определителей дал французский математик А. Вандермонд в 1772г. Следует отметить, что фундаментальные работы 1812-го года еще двух французских математиков О. Коши и Ж. Бине сыграли немаловажную роль в этой теории и привлекли к ней внимание многих европейских ученых XIX века, в частности английского математика А. Кэли и немецкого математика К. Якоби. Собственно, только после работ А. Кэли определители, так же как и матрицы, стали самостоятельным объектом интереса математиков. Теория определителей сама послужила основой и дала жизнь новому и сложному разделу современной геометрии – теории инвариантов. Кроме того, в терминах определителей выражаются векторное и смешанное произведение векторов, которые имеют много содержательных приложений в механике и физике.

Теория определителей – аппарат, который широко используется в аналитической геометрии и других разделах высшей математики. Определители невысоких порядков желательно уметь вычислять согласно определению. Вычисление определителя второго и третьего порядков желательно иллюстрировать схемой. Вычисление определителей выше третьего порядка производят путем использования различных свойств, которыми обладают определители. Т.е. преобразовывать их таким образом, чтобы все элементы некоторой строки, (столбца), кроме одного, обратились бы в нули. В этом случае каждое понижение порядка определителя приводит только к одному определителю (в отличие от разложения по строке (столбцу), которое сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$-х порядков).

Обратить внимание на:

– Определение определителя квадратной матрицы n-го порядка.

– Вычисление определителей 2-го порядка.

– Вычисление определителей 3-го порядка.

– Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, неизменяющие его.

– Равноправность строк и столбцов определителя.

– Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, обращающие его в 0.

– Самый общий случай равенства нулю определителя.

– Преобразования определителя квадратной матрицы n-го порядка, подвергающие его легко отслеживаемым изменениям.

Определители
(детерминанты)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Определителем** квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}\,,} \qquad (1)$$

где (1) $M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Формула (1) позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}} \qquad (2)$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}\,,\ i = 1,2,\dots,n.} \qquad (3)$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение: $\det A = \det A^T$;

Свойство 2. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B$.

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой – либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример.

Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:

Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ:

det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13;

det (AB) = det A ·det B = -26.

2 – й способ:

AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

det (AB) = 7·18 – 8·19 = 126 – 152 = – 26.

Решить на занятии:

[1] 188, 189, 190,197,198, 199,200, 1,5,6, 14,43,44,45,56,

[2] 11.2(а), 11.3(а, г), 11.5,11.7; вычислить определители 13.1 (а, в, д), используя свойства и определение.

Домашнее задание:

[2] 10.1, 10.2, 10.3,10.4(в,г), 9.1 (а, б,в,г), 9.2(а, б,в,г), 11.2(6), 11.3(6, в), 11.4,11.6; вычислить определители 13.1(6, г, е),используя свойства и определение.

ЗАНЯТИЕ 6

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. ПРОСТЕЙШИЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. (ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ПОРЯДОК ЕЕ ПОЛУЧЕНИЯ ДВУМЯ СПОСОБАМИ

Методы решения простейших матричных уравнений).

В матричной алгебре понятие обратной матрицы вводится аналогично понятию обратного числа в обычной алгебре и распространяется только на квадратные матрицы. При этом обозначение обратной матрицы не должно вводить в заблуждение – это не возведение в минус первую степень, а просто обозначение. Во всем остальном присутствует аналогия с числами.

Обратить внимание на:

– Обратная матрица.
– Единственность обратной матрицы.
– Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований
– Формула для вычисления обратной матрицы.
– Условия существования обратной матрицы.
– Невырожденные матрицы
– Матричные уравнения.

Пример.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Базисный минор матрицы. Ранг матрицы

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких – либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы – понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример.
Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} = 2.$$

Пример:
Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре

Теорема. *В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если A – квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Решение матричных уравнений

Матричные уравнения имеют следующий вид:

1. $A\lambda = B$ 2. $XA = B$ 3. $AXB = C$

1) $AX = B$ 2) $XA = B$ 3)$AXB = C$
$A^{-1}AX = A^{-1}B$ $XA\,A^{-1} = B\,A^{-1}$ $A^{-1}AXB\,B^{-1} = A^{-1}C\,B^{-1}$
$EX = A^{-1}B$ $XE = B\,A^{-1}$ $EXE = A^{-1}\,CB^{-1}$
$X = A^{-1}B$ $X = B\,A^{-1}$ $X = A^{-1}\,CB^{-1}$

Типовое матричное уравнение состоит, как правило, из нескольких матриц и неизвестной матрицы X, которую предстоит найти. То есть, **решением матричного уравнения является матрица**.

Пример
Решить матричное уравнение, выполнить проверку $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2X = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Как решить матричное уравнение?
В правой части умножаем каждый элемент матрицы на три, а матрицу левой части переносим направо со сменой знака:

$$-2X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2X = \begin{pmatrix} -3-1 & 3-(-3) \\ 0-8 & 12-0 \end{pmatrix}$$

$$-2X = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Выразим X, для этого обе части уравнения умножим на $-\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} \cdot (-2X) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Все числа матрицы делятся на 2, поэтому уместно избавиться от дроби. А заодно и от «минуса». Делим каждый элемент матрицы на –2: $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

Как выполнить проверку?

Подставим найденное значение $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ в левую часть исходного уравнения и проведём упрощения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-4 & -3-(-6) \\ 8-8 & 0-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Последним действием вынесли «тройку» из матрицы.

Получена правая часть исходного уравнения, значит решение найдено правильно.

Кстати, всегда ли матричное уравнение вообще имеет решение? Конечно не всегда.

Простейшее доказательство: $(1 \quad 2) + X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Решить на занятии:

Привести матрицы [2] 7.1 (а, в, д, ж) к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Найти с помощью элементарных преобразований обратную к матрице

[1] 836,837,840,842, 844.

Найти с помощью присоединенной матрицы обратную к матрице

[1] 836,842,844; [2] 18.3(а, г,е, л).

Домашнее задание:

Привести матрицы [2] 7.1(6, г, е, к) к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

[2] 18.9(б, в, з, к,л).

[2] 18.8(з, и, к), 18.3(6,в,д,ж,к).

ЗАНЯТИЕ 7

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. (ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛАУ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ. РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ)

Теория систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одним из основных разделов линейной алгебры. Нет такой отрасли науки и приложений, где в том или ином виде не использовались бы СЛАУ.

Хотя общая теория СЛАУ и была завершена к концу XIX века, исследования в этой области продолжаются до сих пор. Они стали более чем актуальными в связи с применением в исследованиях электронных вычислительных средств и необходимостью экстраполировать различные задачи со многими параметрами в физике, космонавтике, теории кодирования, некоторых разделах математики и т.д. Представляет большой практический интерес построение алгоритмов получения решений СЛАУ с минимальной допустимой погрешностью и минимальной вычислительной трудоемкостью. Таким образом, вполне вероятно, что новые практические и теоретические задачи выдвинут новые проблемы перед старейшим разделом математики – теорией СЛАУ.

Обратить внимание на:

– Обратная матрица.

– Единственность обратной матрицы.

– Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
Решение произвольных систем линейных уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют выражение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, где $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n, b$ – числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением линейного уравнения с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют последовательность n чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$, если данное уравнение превращается в верное числовое равенство после подстановки $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$, a – коэффициент при неизвестной, b – свободный член (любое число).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнения, имеющие одни и те же корни (в случае кратных корней не важно, чтобы кратности соответствующих корней совпадали), называют равносильными. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Решить уравнение это значит найти такие числа (корни уравнения), что при подстановке их вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ получается верное равенство, либо понять, что корней нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Противоречивым линейным уравнением называется уравнение вида

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, так как b≠0, то оно не имеет решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, называется тривиальным, его решением является любая последовательность чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Переменная x, называется разрешенной, если какое-нибудь уравнение системы содержит x, с коэффициентом, равным 1, а во все остальные уравнения системы переменная x не входит, т.е. входит с коэффициентом, равным нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Переменные системы, которые не входят в данный набор разрешенных неизвестных, называются свободными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – коэффициенты системы

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободные члены

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением СЛАУ называется последовательность чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ при подстановке которых в СЛАУ вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ каждое уравнение обращается в верное равенство.
$x_1 = k_1;\ x_2 = k_2$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ – решение уравнения.

Решить СЛАУ – значит найти все решения или доказать, что их нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два СЛАУ называются эквивалентными или равносильными, если они имеют одинаковые решения.

Замечание. С помощью элементарных преобразований получаются эквивалентные СЛАУ.

Под элементарными преобразованиями будем понимать:
1. Перестановка местами уравнений.
2. Умножение всех элементов уравнения на одно и тоже число. ($\neq 0$)
3. Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СЛАУ называется
1. Совместной, если она имеет хотя бы одно решение.
2. Определенной, если она имеет ровно одно решение.
3. Неопределенной, если она имеет более одного решения.
4. Несовместной, если она не имеет решений.

СЛАУ

Совместная Несовместная

определенная неопределенная

Определенная СЛАУ => совместная неопределенная СЛАУ.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ одно решение

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 = 4 - 3x_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -26 \\ x_2 = 10 \end{cases}$ множество решений.

3. несовместная $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \begin{cases} 0 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ решений нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. Однородная система всегда совместна.

Теорема Кронекера – Капелли

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$RgA = RgA^*$.

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы А, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \to A^*$ не изменяют ранга.

2) Если RgA = RgA*, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример.
Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0 \text{ RgA = 2.}$$

$$\text{A*} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \text{ RgA* = 3.}$$

Система несовместна.

Пример.
Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \text{ RgA = 2;}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

RgA* = 2.

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; матрица системы

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; матрица свободных членов $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ матрица столбец неизвестных.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.
Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,
т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Данный метод применим только в случае, когда m = n. И матрица невырожденная (квадратная).

Пример.
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1}=\frac{5}{30};\qquad a_{12}^{-1}=\frac{1}{30};\qquad a_{13}^{-1}=\frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30};\qquad a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30};\qquad a_{23}^{-1}=\frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1}=\frac{5}{30};\qquad a_{32}^{-1}=\frac{19}{30};\qquad a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30};$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30}\\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11\\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33\\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22\end{pmatrix}=E$$

Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x = 1; y = 2; z = 3.

Недостатки:

1) m = n (число неизвестных равно числу уравнений)

2) если матрица вырожденная, то решение найти невозможно.

3) огромное решение. Данный метод не используется для СЛАУ с числом неизвестных больше 3.

Решить на занятии:
Найти с помощью элементарных преобразований обратную к матрице
[1] 836, 837, 840, 842, 844.

Домашнее задание:
[2] 18.9 (б, в, з, к, л).

ЗАНЯТИЕ 8

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КРАМЕРА. (ФОРМУЛЫ КРАМЕРА. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КРАМЕРА. ОГРАНИЧЕНИЯ ДАННОГО МЕТОДА)

Метод Крамера (правило Крамера) – способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

Обратить внимание на:

-Теорему Крамера о системах п линейных уравнений с п неизвестными.
-Условия, при которых применяется теорема Крамера.

Метод Крамера

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое – либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой – либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое – либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера)

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta,$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$;

Пример.

Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}; \textit{ Ответ: } x = 0;\ y = 0;\ z = -2.$$

Решить на занятии:
[1] 562, 560, 554, 556, 558.

Домашнее задание:
[l] 555, 557, 559, 561, 563.

ЗАНЯТИЕ 9

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА. (АЛГОРИТМ МЕТОД ГАУССА. НИСХОДЯЩАЯ И ВОСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ МЕТОДА РЕШЕНИЯ. МЕТОД ЖОРДАНО-ГАУССА)

Методы решения СЛАУ – матричный метод и метод Крамера являются очень трудоемкими по количеству вычислительной работы. Оба они требуют порядка арифметических действий для нахождения решения СЛАУ. При это составит около 3000 действий, при – около действий. При решении серьезных прикладных задач приходится иметь дело с системами уравнений порядка и более. При таких масштабах даже суперкомпьютерам потребуется огромное время для нахождения решения СЛАУ. Кроме того, погрешности компьютерного округления чисел приводят к значительным ошибкам в расчетах численного решения систем уравнений большого порядка. Между тем существуют более экономичные методы решения СЛАУ, основанные на предварительном преобразовании расширенной матрицы системы к специальному виду. В частности, одним из них является метод Жордана-Гаусса.

На методе Жордана-Гаусса основаны многие алгоритмы линейной алгебры. Этот метод обладает двумя важнейшими чертами – он процедурен и рекурсивен.

Процедурность означает, что в методе выделена некоторая последовательность однотипных шагов (процедура исключения неизвестного), а рекурсивность означает, что процедура последовательно применяется к исходной системе, результату применения процедуры и т.д. Выход из этой цепочки происходит автоматически, когда применение процедуры становится невозможным.

В общем случае число уравнений в СЛАУ не равно числу неизвестных. Если это не так, то система уравнений может быть либо несовместной, либо совместной. В последнем случае она эквивалентна либо системе уравнений с неизвестными, имеющей единственное решение, либо неопределенной системе уравнений, имеющей бесконечное множество решений.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности произвольной СЛАУ дает теорема Кронекера-Капелли. Следствия из данной теоремы служат базой для практического разыскания всех решений совместной СЛАУ.

Универсальным методом решения СЛАУ является метод Жордана-Гаусса. По сравнению с другими этот метод имеет ряд достоинств: он существенно менее трудоемок, позволяет однозначно установить, является ли данная система определенной, неопределенной или несовместной, а в случае совместности системы – определить число её независимых уравнений и исключить «лишние». Таким образом, методом Жордана-Гаусса можно решить любую систему линейных уравнений или установить, что она решений не имеет.

В теории систем линейных уравнений системы однородных уравнений играют важную роль вследствие особых свойств их решений и существующей

простой связи между решениями произвольной системы линейных уравнений и ассоциированной с ней системы линейных однородных уравнений.

Система линейных однородных уравнений всегда совместна и имеет, по крайней мере, одно решение – нулевое.

Решения системы однородных уравнений образуют векторное пространство. Базисом данного пространства является фундаментальная система решений (ФСР). При этом общее решение системы однородных уравнений определяется как линейная комбинация решений, входящих в ФСР.

Общее решение произвольной совместной системы линейных уравнений представляется в виде суммы любого её частного решения и общего решения ассоциированной с ней системы линейных однородных уравнений.

Обратить внимание на:

– Основные понятия теории решения систем линейных уравнений.
– Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
– Равносильные системы линейных уравнений.
– Метод Гаусса
– Теорему Кронекера-Капелли.
– Критерий определённости системы линейных уравнений.
– Применение критерия совместности системы линейных уравнений при решении систем линейных уравнений с параметрами.

Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases},$$

где $d_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, 3, \ldots, n+1$.

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$ $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 2, 3, \ldots, n+1$.

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом для третьего и т.д.

Пример.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

A* =

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases},$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример.

Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases},$$

откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Достоинства:

1) легкость метода,
2) число неизвестных и число уравнений могут не совпадать,
3) для любого числа неизвестных,
4) алгоритмичность метода.

Метод Жордана-Гаусса

Алгоритм:

1. Выбирают первый слева столбец матрицы, в котором есть хоть одно отличное от нуля значение.

2. Если самое верхнее число в этом столбце ноль, то меняют всю первую строку матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.

3. Все элементы первой строки делят на верхний элемент выбранного столбца.

4. Из оставшихся строк вычитают первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.

5. Далее проводят такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.

6. После повторения этой процедуры n-1 раз получают верхнюю треугольную матрицу.

7. Вычитают из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.

8. Повторяют предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получают единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

Пример.

Для решения следующей системы уравнений: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$

запишем её в виде матрицы 3×4, где последний столбец является свободным членом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ 4 & 2 & 1 & |1 \\ 9 & 3 & 1 & |3 \end{pmatrix}$$

Проведём следующие действия:
К строке 2 добавим: −4 × Строку 1.
К строке 3 добавим: −9 × Строку 1.

Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & -2 & -3 & |1 \\ 0 & -6 & -8 & |3 \end{pmatrix}$$

К строке 3 добавим: −3 × Строку 2.
Строку 2 делим на −2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |\,0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & |-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & |\,3 \end{pmatrix}$$

К строке 1 добавим: −1 × Строку 3.
К строке 2 добавим: −3/2 × Строку 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mid -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \mid 0 \end{pmatrix}$$

К строке 1 добавим: −1 × Строку 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \mid -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \mid 0 \end{pmatrix}$$

В правом столбце получаем решение:

$.a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}; c = 0$.

Решить на занятии:
[2] 8.1 (а, в, д, ж), 8.2(а,е, з).

Домашнее задание:
[2] 8.1(6, г, е,з), 8.2(6, в,ж).

ЗАНЯТИЕ 10

ОДНОРОДНЫЕ СЛАУ. (ПОНЯТИЕ ОДНОРОДНО СЛАУ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ)

Для изучения этой темы желательно вспомнить тему "Система линейных алгебраических уравнений». Следствие из теоремы Кронекера-Капелли однозначно указывает на то, что если СЛАУ имеет решение, то есть только два варианта. Либо это решение единственно (и тогда СЛАУ называют определённой), либо этих решений бесконечно много (такую СЛАУ именуют неопределённой).

Возникает первый вопрос: как выяснить, сколько решений имеет заданная однородная СЛАУ? С однородными СЛАУ связано дополнительное понятие – фундаментальная система решений. Если ранг матрицы системы однородной СЛАУ равен r, то такая СЛАУ имеет n−r линейно независимых решений. Однородная система всегда совместна, поскольку любая однородная линейная система имеет по крайней мере одно решение. Если однородная система имеет единственное решение, то это единственное решение – нулевое, и система называется тривиально совместной. Если же однородная система имеет более одного решения, то среди них есть и ненулевые и в этом случае система называется нетривиально совместной. Доказано, что при m = n для нетривиальной совместности системы необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

Обратить внимание на:

– Ненулевые решения однородной системы линейных уравнений.

– Свойства решений однородной системы линейных уравнений.

– Базис множества решений однородной системы линейных уравнений.

– Нахождение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

– Выражение общего решения системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений.

Однородные СЛАУ

Однородными СЛАУ называются:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СЛАУ называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю. ($b_i = 0, i = 1, \ldots, m$) СЛАУ имеет тривиальное решение.

Представляет интерес не нулевое решение СЛАУ.

Теорема. *Однородная СЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа ее неизвестных.*

Следствие1. Если число уравнений однородной СЛАУ меньше числа ее неизвестных, то эта СЛАУ имеет ненулевое решение.

Следствие2. Если в однородной СЛАУ число уравнений равно числу неизвестных, то эта СЛАУ имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю. (ранг – число линейно независимых уравнений)

Пример.

Определить значения параметра L, при которых система имеет нетривиальные решения, и найти эти решения:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x + y - z = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y - 2z = 0 \\ 4x + 4y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Решение. Эта система будет иметь нетривиальное решение тогда, когда определитель основной матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Таким образом, система нетривиальна, когда L = 3 или L = 2. При L = 3 ранг основной матрицы системы равен 1. Тогда оставляя только одно уравнение и полагая, что $y = a$ и $z = b$, получим $x = b–a$, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} b-a \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

При L = 2 ранг основной матрицы системы равен 2.

Тогда, выбирая в качестве базисного минор:

$$M = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

получим упрощенную систему

$$\begin{cases} 2x + y = z \\ 2x + 3y = 2z \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x = z/4$, $y = z/2$. Полагая $z = 4a$, получим

$$X = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 4a \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество всех решений однородной системы обладает весьма важным ***линейным свойством***:

если столбцы X_1 и X_2 – решения однородной системы $AX = 0$, то всякая их линейная комбинация $aX_1 + bX_2$ *также будет решением этой системы*.

Действительно, поскольку $AX_1 = 0$ и $AX_2 = 0$, то $A(aX_1 + bX_2) = aAX_1 + bAX_2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

Именно вследствие этого свойства, если линейная система имеет более одного решения, то этих решений будет бесконечно много.

Фундаментальная система решений однородной СЛАУ (ФСР)

С однородными СЛАУ связано дополнительное понятие – фундаментальная система решений.

Решения однородной СЛАУ обладают следующими свойствами: если $\propto = (\propto_1, \propto_2, \dots, \propto_n)$и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ решение однородной СЛАУ, а $k_1, k_2 \in R$, то:

1. $\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1;\ \alpha_2+\beta_2\ ;\dots;\alpha_n+\beta_n)$ – сумма решений будет так же решение СЛАУ.

2. $k \propto = (k \propto_1, k \propto_2, \dots, k \propto_n)$ так же решение СЛАУ.

$k_1\alpha = k_2\beta$ – решение.

Следовательно, линейная комбинация этих решений $k_1\alpha = k_2\beta$ –так же будет являться решением.

Дело в том, что если ранг матрицы системы однородной СЛАУ равен r, то такая СЛАУ имеет n−r линейно независимых решений: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любая совокупность n−r линейно независимых решений однородной СЛАУ называется *фундаментальной системой (или совокупностью) решений* данной СЛАУ.

Часто вместо словосочетания "фундаментальная система решений" используют аббревиатуру "ФСР". Если решения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ образуют ФСР, и X – матрица переменных данной СЛАУ, то общее решение СЛАУ можно представить в таком виде:

$X = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_{n-r}\varphi_{n-r}$, где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Алгоритм нахождения ФСР

1. Найти общее решение однородной СЛАУ
2. Выписать единичную матрицу размера n-r, например, n-r = 5-2 = 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Придавая свободным неизвестным значения первой строки единичной матрицы E найти первое фундаментальное решение F_1.
4. Повторяя шаг 3 для всех остальных F, используя вторую, третью и т.д. строки E.
5. ФСР образует полученные решения.

Пример.

Решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + 43x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ записать с помощью фундаментальной системы решений.

Решение. Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем её ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 7 \\ -2 & -7 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \\ -5 & -22 & 5 & 43 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ -5 & -22 & 5 & 43 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & -17 & 0 & 68 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

(1) У третьей строки сменили знак и переместили её на 1-е место.

(2) Ко 2-й и 4-й строкам прибавили первую строку, умноженную на 2 и 5 соответственно.

(3) Вторую строку разделили на –5, 4-ю строку разделили на –17.

(4) Вторая и 4-я строки одинаковы, последнюю строку удалили. К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 4.

x_1, x_2, x_3 – базисные переменные;
x_4– свободная переменная.

Выразим базисные переменные через свободную переменную.

Из последних двух уравнений:

$x_3 = 9x_4, x_2 = 4x_4$– подставим в первое уравнение:

$$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$x_1 + 4x_4 - 9x_4 + 5x_4 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Таким образом, общее решение: $(0; 4x_4; x_4; x_4)$

Найдем вектор фундаментальной системы решений.
Для этого выберем в качестве значения свободной неизвестной :

$$x_4 = 1;\ \overrightarrow{a_1} = (0; 4; 9; 1)$$

Ответ: общее решение однородной системы уравнений: $\overline{x_{00}} = c_1\overrightarrow{a_1} = c_1(0; 4; 9; 1)$, где $c_1 \epsilon$R (любое действительное число).

Пример.

Найти фундаментальную систему решений следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Найдем ранг основной матрицы системы:

$$Rg\begin{pmatrix}3 & 1 & -8 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3\end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -16 & 3\\ 0 & -8 & -7 & 25 & -4\\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8\\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8\end{pmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

Таким образом, множество решений данной системы уравнений образует линейное подпространство размерности $n - r = 5 - 2 = 3$. Выберем в качестве базисного минор

$$M_2 = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Тогда оставляя только базисные уравнения (остальные будут линейной комбинацией этих уравнений) и базисные переменные (остальные, так называемые свободные, переменные переносим вправо), получим упрощенную систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = \delta x_3 - 2x_4 - x_5\\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5\end{cases}$$

Полагая, $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$, находим

$$x_1 = -\frac{19}{8}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \;\; x_2 = -\frac{7}{8}a + \frac{25}{8}b - \frac{1}{2}c.$$

Полагая $a = 1$, $b = c = 0$, получим первое базисное решение; полагая $b = 1$, $a = c = 0$, получим второе базисное решение; полагая $c = 1$, $a = b = 0$, получим третье базисное решение.

В результате, нормальная фундаментальная система решений примет вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix}-19/2\\ -7/8\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}-3/8\\ 25/8\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы общее решение однородной системы можно записать в виде $X = aE_1 + bE_2 + cE_3$.

Отметим некоторые свойства решений неоднородной системы линейных уравнений $AX = B$ и их взаимосвязь соответствующей однородной системой уравнений $AX = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Общее решение неоднородной системы** *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы $AX = 0$ и произвольного частного решения неоднородной системы*.

Действительно, пусть Y_0 произвольное частное решение неоднородной системы, т.е. $AY_0 = B$, и Y – общее решение неоднородной системы, т.е. $AY = B$. Вычитая одно равенство из другого, получим $A(Y–Y_0) = 0$, т.е. $Y - Y_0$ есть общее решение соответствующей однородной системы $AX = 0$.

Следовательно, $Y – Y_0 = X$, или $Y = Y_0 + X$. Что и требовалось доказать.

Пусть неоднородная система имеет вид $AX = B_1 + B_2$. Тогда общее решение такой системы можно записать в виде $X = X_1 + X_2$, где $AX_1 = B_1$ и $AX_2 = B_2$.

Это свойство выражает универсальное свойство вообще любых линейных систем (алгебраических, дифференциальных, функциональных и т.д.). В физике это свойство называется *принципом суперпозиции*, в электро – и радиотехнике – *принципом наложения*. Например, в теории линейных электрических цепей ток в любом контуре может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызываемых каждым источником энергии в отдельности.

Рассмотрим задачу, приводящую к составлению и решению систем линейных уравнений.

Пример.

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех видов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице 1.

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Таблица1

Тип сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.**			**Запас сырья, вес. ед.**
	1	**2**	**3**	
I	6	4	5	2400
II	4	3	1	1450
III	5	2	3	1550

Решение. Задачи такого рода типичны при прогнозах и оценках функционирования предприятий, экспертных оценках проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также в планировании микроэкономики предприятий.

Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 240 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах):

$$x_1 = 150, x_2 = 250, x_3 = 100.$$

Решить на занятии:

Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений и выразить общее решение системы однородных линейных уравнений через фундаментальную систему решений [l] 735, 736, 737,738.

Домашнее задание:

[2] 8.4 (а,б, в).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1 И АТТЕСТАЦИИ 1

Контрольная работа 1

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}.

Вычислить определитель Δ:

а) разложив его по элементам i-й строки;

б) разложив его по элементам j – го столбца;

в) получив предварительно нули в i – й строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 1.$

1.2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2.$

1.3. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2.$

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 3.$

1.5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3.$

1.6. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 4.$

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 1.$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 1.$

1.9. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4.$

1.10. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 3.$

1.11. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 3.$

1.12. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 3.$

1.13. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4.$

1.14. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 2.$

1.15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2.$

1.16. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 4.$

1.17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 2.$

1.18. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 1.$

1.19. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 2.$

1.20 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4.$

2. Даны две матрицы. А и В. Найти:
а) АВ.; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

2.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

2.3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.4. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.5. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.7. $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 01 \\ 2 & 2 & \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & =1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.8. $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

2.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

2.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

2.13. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.14. $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

2.15. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

2.16. $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

2.17. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{bmatrix}$.

2.18. $A=\begin{bmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2.19. $A=\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$.

2.20. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Вопросы и задание для подготовки к контрольной работе 2 и зачету

1. Множества. Операции над множествами.
2. Свойства операций над множествами.
3. Алгебраические операции, группы, кольца, поля. (Общие сведения)
4. Общие сведения о матрицах.
5. Сложение и умножение матрицы на число.
6. Линейные комбинации столбцов (строк) матрицы.

7. Умножение матриц.
8. Элементарные преобразования матрицы.
9. Определители и алгебраические дополнения.
10. Миноры и алгебраические дополнения.
11. Разложения определителя по строке или столбцу. Теорема Лапласа
12. Вычисление определителей.
13. Ранг матрицы и ее свойства.
14. Обратная матрица и порядок ее получения
15. Системы линейных уравнений.
16. Критерий совместимости системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).
17. Метод Гаусса.
18. Решение СЛАУ с помощью формул Крамера.
19. Решение СЛАУ методом обратной матрицы
20. Простейшие матричные уравнения.
21. Однородные системы линейных уравнений.

Контрольная работа 2

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$ 1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$ 1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

2.1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 2.3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2 \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 2.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$ 2.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$ 2.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 2.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ 2.15. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$ 2.17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ 2.18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 2.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 3.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 3.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 3.9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 3.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 3.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 3.14 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 3.15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

4.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 4.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 4.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 4.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 4.12. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_3 = 0 \end{cases}$ 4.14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 4.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 4.17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 4.18. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 4.20. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Комплект заданий для типовых контрольных работ

1. Множества

ВАРИАНТ 1

1. A – множество букв в слове «абракадабра», B – множество букв в слове «абрикос», C – множество букв в слове «рок», а D – множество цифр в числе 12112212. Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства $(A \setminus B) \cap C = C \setminus (C \cap B)$, если $A \cap B \neq \varnothing$, $C \subset A$, $C \cap B \neq \varnothing$

ВАРИАНТ 2

1.A-множество цифр в числе 37453754, B – множество цифр в числе 873908839, C – множество цифр в числе 898898,а D – множество букв в слове «тур». Укажите элементы следующих множеств :а)$A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства $(C \setminus B) \cap A = (A \setminus B) \cap C$, если $B \cap C \neq \varnothing$, $B \subset A$, $C \subset A$

ВАРИАНТ 3

1. A – множество букв в слове «мороженое», B – множество букв в слове «ремонт», C – множество букв в слове «мор», а D – множество цифр в числе 2233232332. Укажите элементы следующих множеств :а)$A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства

$C \setminus A \setminus B = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B)$, если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$

ВАРИАНТ 4

1. A – множество цифр в числе 129112298, B – множество цифр в числе 45999485, C – множество цифр в числе 44545», а D – множество букв в слове «сон». Укажите элементы следующих множеств :а)$A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства

$A \cap (C \setminus B) = C \cap (A \setminus B)$, если $A \subset C$, $B \subset A$

ВАРИАНТ 5

1. A – множество букв в слове «агрегат», B – множество букв в слове «автомат», C – множество букв в слове «ватт», а D – множество цифр в числе «3344434». Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства

$B \setminus (B \cap A) = C \cap (B \setminus A)$, если $B \subset C$, $B \cap A \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$

ВАРИАНТ 6

1. A – множество цифр в числе 55791991, B – множество цифр в числе 17722121, C – множество цифр в числе 22221, а D – множество букв в слове «век». Укажите элементы следующих множеств: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства:

$C \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C \setminus A)$, если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$

ВАРИАНТ 7

1. A – множество букв в слове «лекция», B – множество букв в слове «стекло», C – множество букв в слове «лот», а D – множество цифр в числе 4455545. Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства:

$A \setminus (A \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, если $B \cap C \neq \varnothing$, $B \subset A$, $C \subset A$

ВАРИАНТ 8

1.A – множество цифр в числе 242464466, B – множество цифр в числе 55664465, C – множество цифр в числе 45544, а D – множество букв в слове «кот». Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства:

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, если $A \cap B \neq \varnothing$, $C \subset (A \cap B)$

ВАРИАНТ 9

1.A-множество букв в слове «библиотека», B – множество букв в слове «фонотека», C – множество букв в слове «нота», а D – множество цифр в числе 556556. Укажите элементы следующих множеств : а)$A \cup B$; б)$A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) CxD ; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства:

$(B\setminus A)\setminus C = B\setminus (A \cup C)$, если $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$

ВАРИАНТ 10

1. A – множество цифр в числе 9986776, B – множество цифр в числе 23282988, C – множество цифр в числе 3222332, а D – множество букв в слове «кит». Укажите элементы следующих множеств : а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A\setminus B$; г) $C \times D$; д) дополнение к подмножеству C до множества B.

2.С помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте справедливость равенства:

$A \cap (B \cap C) = B \setminus (A \setminus C)$, если $C \subset B$, $B \subset A$

2. Матрицы. Определители

В-1

1. Вычислить матрицу:

$$D = 4C-(AB)^T,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

В-2

1. Вычислить матрицу:

$D = (3BC)^T - 2A^2$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

В-3

1. Вычислить матрицу:

D = $2A^TB+3C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: X $X \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

В-4

1. Вычислить матрицу: D = $(A+2E)^T$-BC^T,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}-2 & 5 & 4 & -7\\ -5 & 2 & 3 & 6\\ 3 & 7 & -1 & 0\\ 6 & -6 & 2 & 4\end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 2\\ 8 & 5 & -3 & 4\\ 3 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $X\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

В-5

1. Вычислить матрицу: $D = (BC)^T - 6A^2$,

где $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}3 & 3 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $X\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

В-6

1. Вычислить матрицу: D = BC+$(3A^2)^T$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

В-7

1. Вычислить матрицу: D = ABC-$(2E)^T$,

где $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -4 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

В-8

1. Вычислить матрицу:

D = ABC-$(2E)^T$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

В-9

1. Вычислить матрицу: D = $(A+2E)^T$-BC^T,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

В-10

1. Вычислить матрицу:

$D = (BC)^T - 6A^2$,

где $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу: $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. СЛАУ

В-1

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \quad + \quad 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

4 .Найти ФСР: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \quad 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

В-2

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

В-3

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 \quad = 1 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

В-4

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \quad + \quad 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 \quad + \quad x_3 = 1 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

В-5

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

В-6

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 \quad = 1 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad - \quad 3x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

В-7 К-2

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

В-8

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 \quad + \quad x_3 = 1 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

3 .Решить методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \quad + \quad 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + \quad 3x_4 = 0 \end{cases}$

В-9

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

В-10

1. Решить методом обратной матрицы: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

2. Решить с помощью формул Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

3. Решить методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 \quad = 1 \end{cases}$

4. Найти ФСР: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \quad - \quad x_4 = 0 \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАНЯТИЯМ

Основная

1. Смолин, Ю.Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. – 5-е изд., стер. – М.: ФЛИНТА, 2017. – 464 с. https://rucont.ru/read/3997603?file = 246494&f = 3997603

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, Часть 1, Основы алгебры, Учебник для вузов М.: Физико-математическая литература, 2001. – 272 с.

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, Часть 2, Линейная алгебра, Учебник для вузов М.: Физико-математическая литература, 2001. – 368 с.

4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, Часть 3, Основные структуры алгебры, Учебник для вузов М.: Физико-математическая литература, 2001. – 272 с.

Дополнительная

1. Туганбаев, А. А. Линейная алгебра : учеб. пособие / А. А. Туганбаев .– М. : ФЛИНТА, 2012. – 75 с. https://rucont.ru/read/912194?file = 246505&f = 912194

2. Бестужева, Л. П. Линейная алгебра : практикум / Н. Л. Майорова, Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Л. П. Бестужева .– Ярославль : ЯрГУ, 2011 .– 58 с. https://rucont.ru/read/891034?file = 237866&f = 891034

3. Белоножко, Д. Ф. Введение в линейную алгебру в примерах и задачах : учеб. пособие / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Д. Ф. Белоножко .– Ярославль: ЯрГУ, 2011 .– 113 с. https://rucont.ru/read/891180?file = 237939&f = 891180

4. Петрова В. Т. Лекции по алгебре и геометрии: учеб. для студ. вузов: в 2 ч. / В. Т. Петрова. – М.: Владос. Ч. 1.-1999.-312 с., Ч.2.-344с.

Методическая

1. Бутузов В.Ф.. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – https://nashol.com/2013052071344/lineinaya-algera-v-voprosah-i-zadachah-butuzov-v-f-krutickaya-n-ch-shishkin-a-a-2002.html

Периодические издания

1. Алгебра и анализ. №№ 1-28 с 1989 по 2018 гг., – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/contents.phtml?jrnid = aa&wshow = aindex&year = 2017&volume = 29&option_lang = rus

Интернет-ресурсы (базы данных, информационно-справочные системы и др.)

1. Сайт Федеральных государственных образовательных стандартов. – Режим доступа: https://fgos.ru/

2. Сайт Федерального института развития образования. – Режим доступа: http://www.firo.ru/

3. Учебно-методический портал. – Режим доступа: http://www.uchmet.ru/

4. Онлайн-центр для детских специалистов «Мерсибо». – Режим доступа: https://mersibo.timepad.ru/events/

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ

№ п		Варианты ответов				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
1.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$	3	99	-91	91	-3
2.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	-12	-4	-37	-36	-76
3.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	-140	32	-32	0	140
4.	Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ определитель матрицы A^T равен	-3	5	3	6	-5
5.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$	56	-56	16	-16	32
6.	Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ определитель матрицы A^T равен	1	-2	0	-4	-1

7.	Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ определитель матрицы A^T равен	1	15	2	3	9
8.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	1	4	2	3	0
9.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	0	2	6	1	8
10.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	-15	0	15	3	2
11.	Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	-3	-1	1	3	0
12.	Решить уравнение $\begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & x & 3 \end{vmatrix} = -1$	2,1	2	-2	0	3
13.	Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$	134	-134	52	0	-52
14.	Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{32} определителя	134	-24	-5	0	140

	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$					
15.	Вычислить алгебраическое дополнение элемента $a_{13}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	-16	-33	18	0	34
16.	Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{11} определителя $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$	0	10	-10	-40	40
17.	Найти произведение A, B, если A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -14 & 36 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -14 & 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 14 & 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 106 \end{pmatrix}$
18.	Найти произведение A, B, если A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & 21 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & 21 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 41 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$
19.	Найти A+ B, если A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 10 & 19 \end{pmatrix}$
20.	Вычислить ранг матрицы A = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$	1	2	3	4	0
21.	Найти произведение A, B, если A = $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \\ -7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -51 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

	B = $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$					
22.	Вычислить ранг матрицы A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	1	2	3	0	5
23.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать $c_{12} + c_{21}$	18	6	4	24	-4
24.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать $c_{12} + c_{21}$	0	3	1	-3	6
25.	Найти -5A+2B, если A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ В ответе указать произведение элементов второго столбца матрицы.	0	-80	-140	-75	30
26.	Найти C = -5A+2B, если A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ указать $c_{12}+c_{21}$	-18	-39	-21	1	2
27.	Найти произведение BA, если B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать сумму всех элементов матрицы	6	4	8	13	9

28.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ в ответе указать $c_{12} + c_{21}$	-49	-13	15	18	20
29.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$в ответе указать $c_{11} + c_{22} + c_{32}$	11	10	4	20	3
30.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$в ответе указать c_{32}	-4	-12	28	-11	22
31.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в ответе указать размерность матрицы	1× 3	2 × 3	3 × 2	3 × 3	2 × 2
32.	Найти произведение C = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ в ответе указать размерность матрицы	1× 2	2 × 3	2 × 2	3 × 2	3 ×1
33.	Найти A-^{1} ,если A = $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

34.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 36 & -17 \\ 1 & 22 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 36 & 22 \\ 1 & 22 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 36 & -17 \\ 1 & 22 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 13 & 36 & 0 \\ 3 & 22 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 36 & 0 \\ 1 & 22 & -9 \end{pmatrix}$
35.	Найти A^{-1},если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	-6	-9	9	6	-3
36.	Найти A^{-1},если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	3	15	-9	13	21
37.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму всех элементов матрицы.	-5	-2	7	1	-5
38.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ В ответе указать сумму элементов первой строки матрицы.	0	5	-16	-12	24
39.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ В ответе указать сумму элементов первой строки матрицы $41A^{-1}$.	13	20	-11	17	9
40.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ В ответе указать сумму элементов первого столбца матрицы.	-9	25	-25	2,5	16

41.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ В ответе указать произведение элементов первой строки матрицы.	12	-96	154	-74	-42
42.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ В ответе указать сумму элементов второго столбца матрицы.	-5	-1	-2	0	6
43.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ В ответе указать сумму элементов третьей строки матрицы.	0	-4	-13	-52	12
44.	Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -10 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ В ответе указать произведение элементов главной диагонали матрицы $24A^{-1}$	15	48	60	24	40
45.	Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$ и в ответе указать 2x1-x2+x3	1	0	6	2	4
46.	Решить систему $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 11x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ и в ответе указать $x_1+x_2+x_3$	3	11	-3	2	1

47.	Решить систему $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$ и в ответе указать x_1-x_2-x_3	0	-4	-5	2	4
48.	Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ и в ответе указать $10x_1+2x_2+3x_3$	23	-3	17	-17	15
49.	Решить систему и в ответе указать значение произведения $x_1x_2x_3$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	6	7	-7	-6	0
50.	Решить систему $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 8x_3 = -35 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 46 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ и в ответе указать $10x_1+2x_2+3x_3$	27	-27	10	12	20
51.	Решить систему $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$ и в ответе указать x_1-x_2+x_3	3	-1	2	1	7
52.	Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ и в ответе указать x_1-x_2+x_3	6	2	-2	3	4

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ……. 3

Занятие 1. Множества. Операции над множествами……. 4

Занятие 2. Алгебраические операции, группы, кольца, поля…… 10

Занятие 3. Матрицы и действия над ними……... 13

Занятие 4, 5. Определители и их свойства…….. 22

Занятие 6. Обратная матрица. Простейшие матричные уравнения…….. 26

Занятие 7. Решение СЛАУ методом обратной матрицы…… 31

Занятие 8. Решение СЛАУ с помощью формул Крамера…….. 40

Занятие 9. Решение СЛАУ методом Гаусса…… 43

Занятие 10. Однородные СЛАУ…… 49

Вопросы и задание для подготовки к контрольной работе и аттестации…. 57

Список литературы…… 78

Приложение ……... 79

Учебное пособие

Зверева Лариса Геннадиевна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 05.11.2019.
Формат 60x841/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 4,65. Тираж 50 экз. Заказ № 152.

Отпечатано в типографии «Идея +»