П. Ф. Севрюков

ШКОЛА РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание второе, исправленное

Москва
Ставрополь
2018

УДК 51:37.03
ББК 22.1:74.262.21
С28

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор ***А. Я. Симоновский***;

кандидат физико-математических наук ***В. М. Ищенко***

Севрюков, П. Ф.

С28 Школа решения олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. – М. : Илекса ; Ставрополь : Сервисшкола, 2018. – 176 с.

ISBN 978-5-89237-553-5
ISBN 978-5-93078-752-8

В данном издании содержится материал не только для начинающих участников олимпиад, но и для учащихся, которые уже знакомы с основными «олимпиадными» подходами.

Особое внимание уделяется разделам, традиционным для олимпиад: теория игр, графы, уравнения в целых числах, принцип Дирихле, элементы теории чисел, четность, логические задачи, математические парадоксы, уравнения высших степеней, тригонометрические подстановки в алгебраических уравнениях и неравенствах и др. Автор на достаточно простых тренировочных примерах познакомит вас с принципами анализа и решения самых распространенных типов олимпиадных заданий.

Книга рассчитана на учителей, которые занимаются подготовкой учащихся к олимпиадам. Она будет интересна и любознательным юным математикам. Указанный в конце книги библиографический список разделен на две части: для учителей и для учащихся. Во введении указаны сайты наиболее популярных в России олимпиад по математике.

УДК 51:37.03
ББК 22.1:74.262.21

ISBN 978-5-89237-553-5
ISBN 978-5-93078-752-8

© Севрюков П. Ф., 2018
© Илекса, 2018
© Сервисшкола, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

I. О чем необходимо помнить при решении олимпиадных задач 7

II. Задачи для разминки. Начинаем думать 12

III. Принцип Дирихле 16

IV. Графы 22

V. Игры 35

VI. Четность 45

VII. Делимость и остатки 54

VIII. Уравнения в целых и натуральных числах 63

IX. Метод математической индукции 69

X. Элементы комбинаторики 77

XI. Логические задачи 87

XII. Геометрические задачи 100

XIII. Квадратичная функция 125

XIV. Неравенства на олимпиадах. «Замечательные» неравенства 137

XV. Некоторые примеры решения уравнений высших степеней 157

XVI. Тригонометрические подстановки в алгебраических уравнениях и неравенствах 164

Заключение 173

Библиографический список 174

Введение

Само словосочетание «одаренный ребенок» порой вызывает улыбку. Для одного это худой «ботаник» в очках, с трудом несущий портфель, набитый научно-популярной литературой и учебниками, для которого самым большим наказанием является поход на урок физкультуры. Для другого – человек, живущий в своем, совершенно никому не понятном научном мире, по своим законам. Не все слышали о программе «Одаренные дети», ориентированной именно на этих «странных» ребят, которые в будущем должны стать интеллектуальной элитой нашей страны.

Для них каждый учебный год проводятся всероссийские олимпиады по отдельным учебным предметам. Каждая предметная олимпиада проводится в несколько туров. Известны и международные олимпиады. На международных олимпиадах по математике призерами традиционно становятся школьники Китая и России.

Министерство образования и науки РФ ежегодно издает приказ об утверждении перечня олимпиад школьников. В каждой предметной области олимпиаде (той или иной) присваивается уровень и соответствующие льготы при поступлении.

Подготовка учащегося к участию в олимпиаде – труд не одного года. Ясно, что не каждого учащегося, имеющего по предмету отличную оценку, имеет смысл направлять на олимпиаду. Дело в том, что на выполнение олимпиадного задания отводится строго определенное время, в качестве задач предлагаются не задачи обязательного или повышенного уровня (по школьным меркам), а задания нестандартные. Эти задания могут быть простыми по формулировке, но выходящими за рамки школьной программы.

Мы разберем не самые трудные нетрадиционные разделы математики, необходимые для решения заданий на олимпиадах. Следует отметить, что практически все предлагаемые вашему вниманию разделы могут быть с одинаковым успехом рассмотрены на кружковых занятиях как в 5-м, так и в 11-м классах. Конечно, подача материала будет отличаться объемом и глубиной, перечнем рассматриваемых разделов математики (они должны соответствовать изучаемому школьному курсу).

Еще раз отметим, что успешно участвовать в предметной олимпиаде может учащийся, знакомый со стандартными приемами решения задач, выходящих за рамки школьного курса. Определенную роль играет и скорость мышления учащегося. Целесообразно начи-

нать подготовку «олимпиадников» в 5–7 классах. Только при таком подходе учащийся, попавший на олимпиаду в 8–9 классах, будет чувствовать себя уверенно: скажется опыт решения нестандартных задач, накопленный за несколько лет.

Учителям хорошо знакомы «тугодумы», которые обладают достаточно большим объемом знаний по предмету. Если подобному учащемуся предложить нестандартную, достаточно трудную для его одноклассников задачу, то эта задача им будет грамотно и всесторонне рассмотрена; правда, на решение может уйти не одна неделя. Понятно, что подобного учащегося не имеет смысла посылать на олимпиаду. Ему стоит предложить научно-исследовательскую работу школьника (НИРШ). В дальнейшем данная работа, представленная на секцию Малой Академии Наук, может положить начало долговременной научной работе. Ежегодно предметные конференции проводятся на базе ведущих вузов, научных центров и т.д.

Хорошо известна действующая система заочных физико-математических школ ведущих вузов страны:

1. Федеральная заочная физико-математическая школа при Московском физико-техническом институте (государственном университете) ежегодно объявляет набор в 8–11 классы групп учащихся отдельной школы (коллективный ученик). Форма обучения заочная.
2. Учебный центр при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана ежегодно объявляет набор учащихся 10 и 11 классов для индивидуального заочного обучения.
3. Заочная математическая школа при механико-математическом факультете Московского государственного университета ежегодно объявляет набор учащихся 10 и 11 классов для индивидуального заочного обучения.

Приведем самые распространенные сайты, посвященные математическим олимпиадам для школьников.

1. cendop.bmstu.ru. Общий регламент проведения Олимпиады школьников «Шаг в будущее». Типовые варианты задач по математике и физике. Рекомендуемая литература для подготовки к олимпиадам по математике, физике и «технике и технологиям».
2. president-school.ru. Ежегодно образовательный центр проводит олимпиаду – ИнтеллекТ «Поверь в свои силы» для школьников. В 2011 году впервые в отборочный тур олимпиады включены задания по математике.

3. mathkang.ru. В начале года заинтересованные учителя могут зарегистрироваться на сайте конкурса «Кенгуру». Подробная информация на сайте, там же размещены задания всех тестирований, проведенных ранее.
4. math-on-line.com.Олимпиада школьников по математике «Сократ». Онлайн учебный центр по проведению олимпиад, игр-тренингов и конкурсов по математике для учащихся 5–8 классов.
5. turgor.ru. Турнир Городов – международная олимпиада по математике для школьников. Задания рассчитаны на учащихся 8–11 классов. Проводится ежегодно с 1980 года.
6. lomonosov.msu.ru. Задания отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике.
7. talent.hse.ru. Поиск по сайту. Межрегиональная олимпиада школьников. ГУ-ВШЭ, БелГУ, ИрГТУ, МарГТУ, ОмГУ, РУДН, СПбГУ ИТМО, ТПУ, УлГУ, УрФУ по математике. Результаты участников (математика).
8. olymp.mifi.ru. Открытая интернет-олимпиада школьников по математике.
9. matholymp.ru. Общее число участников олимпиады «Физтех» по математике и физике из года в год достигает 8000 человек.
10. mathschool.ru. 31.05.2011 опубликован образец заявки на предоставление льгот по итогам олимпиад школьников для поступления в СУНЦ МГУ (г. Москва).
11. mathematics@schoolpress.ru. Конкурс «Эврика» для учащихся 5–9 классов проводится журналом «Математика для школьников». Информация по адресу электронной почты.
12. школьнаяпресса.рф. Информация об олимпиадах МГУ им. Ломоносова «Покори Воробьевы горы» и «Ломоносов» может быть найдена на сайте журнала «Математика в школе».
13. rosolymp.ru. Информационный портал Всероссийской олимпиады школьников.

В журналах «Математика в школе» и «Физика в школе», приложениях «Математика» и «Физика» к газете «Первое сентября» публикуются задания всевозможных вузовских и всероссийских конкурсов, решения задач для учащихся всех ступеней обучения, предложения участвовать в творческих конкурсах с подробными комментариями и рекомендациями.

В заключение отметим, что занятия с одаренными детьми – это работа не одного года. Подобная подготовка должна иметь собственную программу (желательно индивидуальную для каждого неординарного ребенка).

I. О ЧЕМ НЕОБХОДИМО ПОМНИТЬ ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

1. Внимательно прочитайте условие задачи. Проверьте условие задачи на правдоподобность.

Пример. Определите площадь треугольника со сторонами 27, 56 и 28 см. Ясно, что треугольника с такими сторонами не может существовать, поскольку не выполняется неравенство треугольника. Задача решения не имеет.

2. При решении задачи должны быть рассмотрены все возможные варианты постановки задачи.

Пример. Пусть задача начинается словами «В произвольном треугольнике…». Поскольку по условию задачи не сказано, какой именно треугольник имеется в виду, без разбора случаев прямоугольного, остроугольного и тупоугольного треугольников задача не будет решена полностью. В некоторых частных случаях (например, если рассматривался равнобедренный треугольник) при отсутствии ошибки в решении задача может быть оценена членами жюри не более чем в $\frac{1}{3}$ баллов от общей «стоимости» задачи.

Задача 1. Автобус, в котором находились 38 пассажиров, сломался на трассе. Проезжающий мимо водитель легковой машины согласился «подбросить» пассажиров автобуса до ближайшего населенного пункта. Сколько раз водителю легковушки придется съездить туда и обратно, если в автомобиль кроме водителя могут сесть еще четыре пассажира?

& Эта задача интересна тем, что необходимо рассмотреть два случая: решение зависит от того, в какую сторону едет по своим делам водитель автомобиля.

Если водитель едет в сторону населенного пункта, то «туда и обратно» он съездит 9 раз (при этом отвезет $4\times9 = 36$ пассажиров), еще двух пассажиров довезет до населенного пункта и возвращаться не будет, т.е. «туда и обратно» водитель съездит 9,5 раза.

Если водитель едет из ближайшего населенного пункта, то после поездки с последней парой он вернется, т.е. «туда и обратно» водитель съездит 10 раз. &

Следующая задача хорошо известна, она встречается в книге «Живая математика» Я.И. Перельмана.

Задача 2. Охотник, войдя в лес, видит на дереве белку. Белка выглядывает из-за ствола, смотрит на охотника, а сама охотнику не показывается. Охотник начинает медленно обходить дерево вокруг. Белка, цепляясь коготками за кору дерева, перемещается по стволу так, что все время, выглядывая из-за ствола, смотрит на охотника, но свою спинку и хвостик охотнику не показывает. Охотник три раза обошел вокруг дерева, сколько раз он обошел вокруг белки?

& Решая задачи подобного типа (а именно такие задачи появляются на олимпиадах для учеников младших классов), нужно четко понимать, что в задачу нельзя добавлять «от себя» ни одного слова, поскольку при этом мы невольно производим подмену условия задачи. Обратим внимание на то, что из условия задачи нельзя понять, что означает фраза «обойти вокруг белки». Эта задача, как и задача 1, допускает два варианта подхода.

Если мы будем считать, что «обойти вокруг белки» – это увидеть спинку белки, то охотник не обошел вокруг белки ни разу. Если же «обойти вокруг белки» – обойти вокруг того места, где сидит белка (дерево), то охотник обошел вокруг белки три раза. Полный ответ на вопрос, поставленный в задаче, состоит в разборе двух рассмотренных вариантов. &

3. Прочитайте полностью записанное условие задачи. Запись условия задачи в сокращенном виде может привести к ошибке.

Пример. Первый член арифметической прогрессии равен 1. Сумма первых пяти членов этой прогрессии в четыре раза меньше суммы последующих пяти членов этой прогрессии. Найти арифметическую прогрессию.

& Сокращенная запись условия задачи дает: $a_1 = 1$, $S_5 = \frac{1}{4}S_{6-10}$.

(a_n) – ? (*)

Для решения задачи необходимо применить формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$.

$$S_5 = \frac{2 + 4d}{2} \cdot 5 = (1 + 2d) \cdot 5; \qquad (**)$$

$$S_{6–10} = S_{10} – S_5 = (2 + 9d) \cdot 5 – (1 + 2d) \cdot 5 = (1 + 7d) \cdot 5. \qquad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в (*), получаем $d = –3$. &

Примечание. Если ограничиться проверкой сокращенной записи условия, ответ можно записать двояко: $a_1 = 1$, $d = –3$; или 1; –2; –5; … Проверка полного текста задачи дает возможность утверждать, что при $d = –3$ мы имеем дело с убывающей прогрессией, частичные суммы которой (по 5, 7, 100 членов) возрастать не могут. Далее смешные равенства $S_5 = –25$ и $S_{6–10} = –100$ являются справедливыми для (*), но абсурдными при упоминании о том, что высказывания «больше (или меньше) во столько-то раз» определены на множестве положительных действительных чисел.

***Ответ*:** такой арифметической прогрессии не существует.

4. Необходима проверка правдоподобности полученных результатов. После написания олимпиадной работы внимательно ее прочитайте. Автору приходилось из ответов узнавать о том, что существуют мухи, летающие со скоростью до 200 км/час; существует многоугольник, одновременно являющийся и выпуклым, и вогнутым, и т.д.

5. Часто в олимпиадных задачах описывается определенная конструкция, которая может находиться в различных состояниях, и набор допустимых преобразований, меняющих эти состояния, и спрашивается, можно ли из одного данного состояния перейти в другое. Если ответ в такой задаче положителен, то для доказательства достаточно привести любой пример, показывающий, как можно осуществить такое преобразование. Если же ответ отрицательный, то необходимо доказать, что как бы мы ни производили допустимые преобразования, мы никогда не сможем получить требуемого состояния. Один из возможных способов доказательства этого состоит в нахождении такой величины, определенной для всех возможных состояний, которая не меняется при допустимых преобразованиях. Такая величина называется *инвариантом*. Если существует инвариант, который принимает различные значения для начального и конечного состояния, то очевидно, что преобразовать начальное состояние в конечное с помощью допустимых преобразований невозможно. С такими инвариантами

мы встретимся при рассмотрении, например, четности, делимости, остатков, графов и т.д.

6. Роль парадоксов в математике при подготовке к олимпиадам.

Среди причин, способных возбуждать интерес к математике, особую роль играют парадоксы, демонстрирующие несоответствие интуитивных ожиданий реальному положению дел. Когда вдруг выясняется, что здравый смысл без вычислений не всегда дает возможность делать правильные выводы, возникают соображения типа «не пора ли выучить дроби и логарифмы». Парадоксы фокусируют внимание и дают энергию, без которых учение не идет впрок.

7. Разговор учителю удобнее вести на конкретном материале.

Пример 1. Землю опоясали веревкой по экватору. Веревку удлинили на 10 метров. Концы получившейся веревки соединили и расправили веревку так, что с экватором получилась концентрическая окружность. Подобное действие произвели с футбольным мячом. В каком случае зазор будет больше: между Землей и веревкой или мячом и веревкой?

Интуитивно кажется, что в зазор между веревкой и экватором и муравей не пролезет, а для мяча… Однако правильное решение

$$2\pi(R + x) - 2\pi R = 10; \qquad x = \frac{10}{2\pi} \approx 1{,}5$$

показывает, что зазор не зависит от радиуса шара и составляет около полутора метров.

Для новичка – это открытие, способное дать толчок в нужном направлении. Конечно, с ростом квалификации такие «фокусы» быстро тускнеют и теряются в массе более оригинальных задач. Поэтому, занимаясь преподаванием, важно сохранить свежесть восприятия. Особая ценность «аномалий» состоит в том, что они не требуют глубокой математической подготовки.

Вот еще несколько подобных задач.

Пример 2. На карте России 1:10 000 000 все размеры уменьшены в 10 миллионов раз. Казалось бы, если население в 150 миллионов тоже уменьшить в 10 миллионов раз, то оставшиеся 15 человек должны свободно поместиться на карте. Но не помещаются. (?)

Пример 3. Окружность C с выделенной нижней точкой A катится по горизонтальной прямой. Сколько оборотов совершит окруж-

ность, двигаясь в плоскости, когда A возвратится на прямую? Очевидно, один.

А если окружность C катится по другой окружности того же радиуса? Тогда при возвращении точки A в исходное положение окружность C совершит два оборота. Интуиция чаще подсказывает – один.

Пример 4. Имеются два многоугольника. Длины сторон одного – меньше сантиметра, длины второго – больше километра. Может ли площадь первого многоугольника быть больше площади второго? (Может.)

Пример 5. Записано равенство $\sqrt{6\frac{6}{35}} = 6\sqrt{\frac{6}{35}}$. Под первым радикалом стоит число шесть целых шесть тридцать пятых. Если в записи допущена ошибка, то в чем она состоит?

Как правило, получаемый ответ: «Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда!» Элементарная проверка

$$\sqrt{6\frac{6}{35}} = \sqrt{6 + \frac{6}{35}} = \sqrt{\frac{6\cdot 35 + 6}{35}} = \sqrt{\frac{6(35+1)}{35}} = \sqrt{\frac{6\cdot 36}{35}} = 6\sqrt{\frac{6}{35}}$$

показывает, что ошибка в записи равенства отсутствует. В задании ответ определяется подбором чисел. Ясно, что равенство $\sqrt{p\frac{p}{p^2-1}} = p\sqrt{\frac{p}{p^2-1}}$ справедливо для любого натурального p.

Пример 6. В последовательности a_1; …; a_{11} сумма любых трех рядом стоящих чисел больше нуля. Может ли сумма $a_1 + \ldots + a_{11}$ быть отрицательной?

Может. Такова, например, последовательность

–7; 2; 6; –7; 2; 6; –7; 2; 6; –7; 2.

Это означает, что фирма может быть прибыльной за любые три подряд идущих дня, но убыточной – за 11 дней.

Все упомянутые задачи выделяются тем, что могут заинтересовать человека, далекого от математики, и не требуют для своего решения особых знаний. Владение коллекцией таких задач учителем делает из него почти волшебника. На первом этапе. В дальнейшем требуются задачи другого уровня.

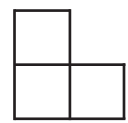
II. ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗМИНКИ. НАЧИНАЕМ ДУМАТЬ

Начнем с рассмотрения 30 элементарных задач. Такие задачи, часто называемые «занимательными», можно встретить как в школьных учебниках, так и на страницах обычной периодической печати (см., например, игротеку газеты «Московский Комсомолец»). Автор-составитель предупреждает читателей о том, что он не «изобретал» задачи. Многие из них кочуют по изданиям для внеклассных занятий по математике более 50 лет, есть и более «древние» задачи (см. список литературы). Рассматриваемые простые задания, не требующие долгих вычислений, не будут сопровождены ответами (они во многих случаях очевидны).

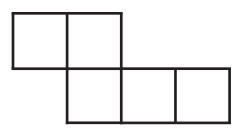
1. Если 5 кошкам нужно 5 минут, чтобы поймать 5 мышек, сколько потребуется кошек, чтобы за 100 минут поймать 100 мышек?
2. В стакане находятся бактерии. Через секунду каждая из бактерий делится пополам, затем каждая из получившихся бактерий через секунду делится пополам, и так далее. Через минуту стакан полон. Через какое время стакан будет заполнен наполовину?
3. На поверхности сферы наугад выбраны 3 точки. Какова вероятность того, что они окажутся в одном полушарии?
4. Из старой толстой книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами, только в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?
5. Имеется лист бумаги. Его разрезают на 4 части, затем некоторые из полученных кусков (или все) снова разрезают на 4 части. Доказать, что при этом нельзя получить 50 листов бумаги.
6. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?
7. Каждые полчаса паром переплывает реку. Если в первый раз он отправился к другому берегу в 7^{30} утра, а в последний – в 8 вечера, то сколько раз паром переплывает реку за день?
8. Водолаз работает на глубине 20 метров под водой. Расстояние от поверхности воды до палубы корабля составляет $\frac{1}{8}$ длины троса, причем $\frac{2}{3}$ его длины остались на катушке. Какова максимальная глубина, на которую может опуститься водолаз?

9. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?
10. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 3 см, а за каждую ночь спускается вниз на 1 см. Когда он достигнет верхушки столба, если высота столба 75 см?
11. Крокодил Гена с Чебурашкой плыли вверх по течению реки. Гена сидел на веслах, а Чебурашка, сидя на корме, ел апельсины. В момент, когда лодка проплывала под мостом, а Крокодил Гена был поглощен движением, Чебурашка заснул и нечаянно столкнул ящик с апельсинами в воду. Через полчаса Гена обнаружил пропажу ящика с апельсинами, развернул лодку по течению реки и стал догонять уплывающий ящик; еще через полчаса выловил его на расстоянии двух километров ниже моста по течению реки. Какова скорость течения реки?
12. В январе некоторого года было четыре пятницы и четыре понедельника. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?
13. На вечеринке было 20 танцующих. Мария танцевала с семью танцорами, Ольга – с восемью, Вера – с девятью, …, Лариса танцевала со всеми танцорами. Сколько танцоров (мужчин) было на вечеринке?
14. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размером 199×991?
15. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4 и при делении на 6 дает в остатке 5.
16. Петя говорит: «Позавчера мне еще было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13». Может ли такое быть?
17. Кот Васи перед дождем всегда чихает. Сегодня он чихнул. «Значит, будет дождь», – думает Вася. Прав ли он?
18. Словам соответствуют цифры: корова – 2, кошка – 3, кукушка – 4. Какая цифра по Вашему мнению должна соответствовать слову «собака»?
19. Учитель рисует на листке бумаги несколько кружков и спрашивает одного ученика: «Сколько здесь кружков?». «Семь», – отвечает ученик. «Правильно. Так сколько здесь кружков?» – спрашивает учитель второго ученика. «Пять», – отвечает тот. «Правильно», – снова говорит учитель. Так сколько же кружков нарисовал учитель на листке?

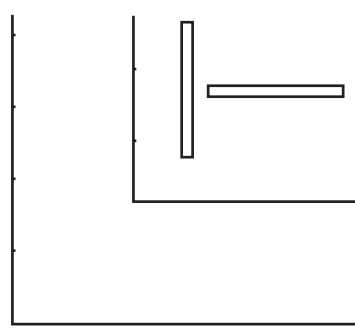
20. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и тщательно размешивают смесь. Затем три ложки смеси переливают обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком, или молока в стакане с чаем?
21. В кошельке лежат две монеты на общую сумму 15 копеек. Одна из монет не пятак. Что это за монеты?
22. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 магический квадрат, то есть разместите их в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.
23. Разрежьте уголок, изображенный на рисунке, на четыре таких же уголка вдвое меньшего размера.



24. Из спичек сложена фигура, изображенная на рисунке.



Как переложить две спички, чтобы получилось ровно четыре квадрата с длиной стороны, равной длине спички?
25. Река шириной 4 метра делает поворот под прямым углом. Как переправиться через нее на другой берег, имея лишь две доски длиной 3 метра 90 сантиметров?



26. Можно ли расположить 6 длинных круглых карандашей так, чтобы каждый из них касался любого другого?
27. При помощи ножниц вырежьте в тетрадном листе дырку, в которую Вы сами сможете пролезть.
28. Найдите сумму ста дробей: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}$.
29. Найдите сумму 99 дробей: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.
30. Вова, Петя и Коля сварили уху и съели ее поровну. Для ухи Вова дал 5 рыб, Петя – 3 рыбы. Коля рыбы не поймал и отдал за уху 2400 рублей. Как Вова и Петя должны разделить эти деньги, чтобы дележ был справедливым?

III. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Разговор об олимпиадных задачах мы начинали с решения занимательных задач. Для учащихся 5–6 классов очень важен этот «занимательный» подход. Начнем с рассмотрения забавного перевода С.Я. Маршака одного шутливого английского стихотворения.

Их было десять чудаков,
Тех путников усталых,
Что в дверь решили постучать
Таверны «Славный малый».

– Пусти, хозяин, ночевать,
Не будешь ты в убытке,
Нам только ночку переспать,
Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,
Да вот беда некстати:
Лишь девять комнат у него
И девять лишь кроватей.

– Восьми гостям я предложу
Постели честь по чести,
А двум придется ночь проспать
В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,
От гнева красны лица:
Никто из всех десятерых
Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,
Умерить те волненья?
Но старый плут хозяин был
И разрешил сомненья.

Двух первых путников пока,
Чтоб не судили строго,
Просил пройти он в номер «А»
И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,
В «Г» спал всю ночь наш пятый,
В «Д», «Е», «Ж», «З» нашли ночлег
С шестого по девятый.

Потом, вернувшись снова в «А»,
Где ждали его двое,
Он ключ от «И» вручить был рад
Десятому герою.

Хоть много лет прошло с тех пор,
Неясно никому,
Как смог хозяин разместить
Гостей по одному.

Иль арифметика стара,
Иль чудо перед нами,
Понять, что, как и почему,
Вы постарайтесь сами.

Внимательный читатель сразу заметит, что первого или второго путника в тексте сначала поместили в комнату «А», а потом одного из них невольно перебросили в десятую комнату, одного и того же человека подсчитали два раза.

Гораздо проще задача может быть пояснена при помощи принципа Дирихле (Дирихле Петер Лежен (1805–1859) – немецкий математик, член многих иностранных академий наук).

Представим этот принцип в такой шутливой форме:

«Если в N клетках сидят не менее $N + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов».

Обратим внимание на расплывчатость выводов – «в какой-то из клеток», «не менее». Это является, пожалуй, отличительной чертой принципа Дирихле, которая иногда приводит к возможности неожиданных выводов на основе, казалось бы, совершенно недостаточных сведений.

Доказательство самого принципа чрезвычайно просто, в нем используется тривиальный подсчет кроликов в клетках. Если бы в каждой клетке сидело не более одного кролика, то всего в наших N клетках сидело бы не более N кроликов, что противоречило бы условиям. Таким образом, мы доказали принцип Дирихле методом «от противного».

Задача 1. В мешке лежат шарики двух цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно достать из мешка вслепую, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

Решение. Достаем из мешка 3 шарика. Если среди этих шариков было не более одного шарика каждого из цветов – это очевидно, и противоречит тому, что мы достали три шарика. С другой стороны понятно, что двух шариков может и не хватить. Ясно, что кроликами в этой задаче являются шарики, а клетками – цвета: черный и белый.

Задача 2. Доказать, что среди n+1 целого числа можно выбрать два, разность которых делится на n.

Решение. При делении на n любое число дает в остатке одно из чисел 0, 1, 2, 3, …, n, т.е. существует всего n различных остатков. Поэтому среди $n + 1$ числа найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на n. Разность этих чисел делится на n.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ.

Если в N клетках сидят не менее $kN + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k + 1$ кролик.

Задача 3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Доказать, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Решение. 25 ящиков-«кроликов» рассадим по трем клеткам-сортам. Так как $25 = 3 \times 8 + 1$, то применим «обобщенный принцип Дирихле» для $N = 3$, $k = 8$ и получим, что в какой-то клетке-сорте не менее 9 ящиков.

Задача 4. Дано 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Решение. При решении этой задачи встречается, казалось бы, непреодолимое препятствие. Различных разностей может быть 14 – от 1 до 14 – это те же 14 клеток, в которых мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар, и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два «кролика» (и значит, в каждом меньше трех). Здесь необходимо использовать дополнительное соображение:

в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 может быть записано только как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: 14 = 15 – 1. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 «кроликов» и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

Примечание. Заметим, что у нас в основе принципа Дирихле лежала идея сложения неравенств.

Следствие. Если сумма n различных чисел равна S, то среди них есть как число, не большее $\frac{S}{n}$, так и число, не меньшее $\frac{S}{n}$.

Упражнения.

1. Для каждого натурального числа n существует число вида 111…100…0, делящееся на n. Доказать.
2. Для любого 100-значного числа М найдется число, делящееся на 2012, последние цифры которого составляют число М. Доказать.
3. Доказать, что из 1000 целых чисел можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет делиться на 1000.
4. Рассматривается последовательность чисел 6, 6^2, 6^3, …, 6^n, и выписываются последние 4 цифры этих чисел 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, … Доказать, что, начиная с некоторого номера n_0, эта последовательность будет периодической.
5. Можно ли найти степень числа 3, оканчивающуюся цифрами 0001?
6. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.
7. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи, и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.
8. В бригаде 7 человек, и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не менее 142 лет.
9. Несколько дуг окружности покрасили в синий цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.
10. 15 белок собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое количество орехов.

11. На далекой планете, имеющей форму шара, суша занимает больше половины поверхности планеты. Докажите, что можно прорыть туннель, проходящий через центр планеты, который соединит сушу с сушей.
12. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
13. На складе имеются по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 правых и 300 левых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Ответы и указания к решениям.

1. Рассмотреть числа 1, 11, 111, $\underbrace{11...1}_{n+1}$, после чего задача сводится к задаче 2.
2. Рассмотреть числа, получающиеся из одного, двух, трех, …, 2012 чисел M, написанных подряд, как в предыдущей задаче.
3. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$ – эти числа. Рассмотреть остатки от деления на 1000 чисел:

   $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{1000}$.

   Либо среди этих остатков встречается 0, либо найдутся две суммы, дающие одинаковые остатки. Далее решение проводится так же, как в задаче 2.
4. Существует лишь конечное множество (10^4) различных наборов четырех цифр, поэтому в нашей последовательности встретятся два таких номера n_0 и $n_0 + t$, что числа 6^{n_0} и 6^{n_0+t} имеют одинаковые четыре последние цифры ($6^{n_0+t} - 6^{n_0} = 10^4 \cdot m$, где m – целое). Но тогда, конечно, у чисел 6^{n_0+1} и 6^{n_0+t+1} четыре последние цифры тоже будут одинаковыми ($6^{n_0+t+1} - 6^{n_0+1} = 10^4 \cdot 6m$) и вообще у чисел 6^n и 6^{n+t} при любом $n > n_0$ четыре последние цифры тоже будут одинаковыми ($6^{n+t} - 6^n = 10^4 \cdot 6^{n-n_0}$).
5. Можно. В последовательности 3, 3^2, …, 3^n встретятся два числа, имеющие одинаковые последние 4 цифры: 3^k и 3^l, $k < l$, $3^l - 3^k = 10^4 \cdot m_1$, где m_1 – целое.
6. Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника.
7. Из условий следует, что найдется 7 школьников, решивших $35 - 6 = 29$ задач. Так как $29 = 4 \cdot 7 + 1$, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

8. Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Сумма их возрастов, как легко подсчитать, равна $15 \cdot 332$, а всего таких троек 35. Значит, есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше, чем $\frac{15 \cdot 332}{35}$, что больше 142.
9. Покрасим в желтый цвет дуги, симметричные синим относительно центра окружности. Так как сумма длин желтых дуг равна сумме длин дуг синих, то общая длина окрашенных дуг меньше длины окружности. Значит, найдется неокрашенная точка с такой же симметричной ей неокрашенной точкой. Диаметр, проходящий через них, и будет искомым.
10. Пусть все белки собрали разное число орехов: 1, 2, 3, …, 15. Так как сумма числа орехов $\frac{(1 + 15)}{2} \cdot 15 = 120$ больше 100, то какие-то две белки собрали одинаковое число орехов.
11. Покрасим сушу на планете в зеленый цвет, а поверхность планеты, симметричную суше, – в синий цвет. Так как суша занимает больше половины поверхности планеты, то найдется точка на планете, покрашенная в оба цвета. Через нее и надо рыть тоннель.
12. У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трех знакомых, либо не менее трех незнакомых ему. Разберем, например, первый случай. Среди этих трех людей есть либо двое знакомых – тогда они вместе с выбранным нами вначале человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы.
13. В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 10 (почему?), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах.

IV. ГРАФЫ

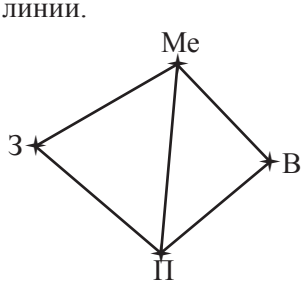
В этой главе речь пойдет о замечательных математических объектах. Эти объекты (как правило, различные картинки) очень часто возникают в математических задачах и оказываются чрезвычайно полезными при решении многих, внешне не похожих друг на друга задач. В математике даже есть специальный раздел, который так и называется «Теория графов». Мы не будем давать строгого определения графа как математического объекта. Для нас вполне достаточно ограничиться несколькими определениями и теоремами и показать, как эти определения и теоремы работают при решении конкретных задач.

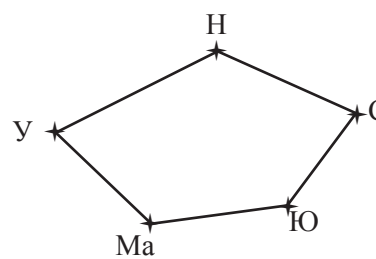
Определение. *Под графом мы будем понимать картинку, адекватно описывающую задачу. При этом элементы множеств, как правило, показываются точками. Желательно, чтобы при решении точки не лежали на одной или паре прямых. Точки при этом называются* ***вершинами*** *графа, а линии, соединяющие эти точки, –* ***ребрами.*** *Отметим, что точки могут соединяться произвольными (не обязательно прямыми) линиями.*

Поясним понятие графа на примере нескольких задач.

Пример 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться (возможны пересадки) с Земли до Марса?

Решение. Нарисуем схему: планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам – непересекающиеся между собой линии.

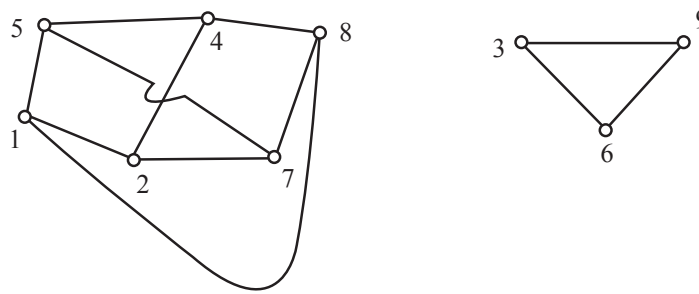




Сделав набросок рисунка маршрутов, мы нарисовали граф, соответствующий условию задачи. Видно, что все планеты Солнечной системы разделились на две не связанных между собой группы. Земля принадлежит одной группе, а Марс – второй. Долететь с Земли до Марса нельзя.

Пример 2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли из города 1 добраться в город 9?

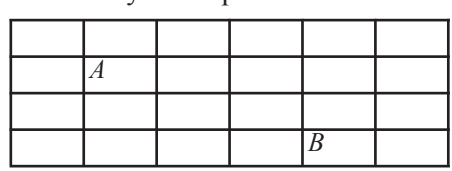
Решение. Покажем возможные маршруты, нарисовав граф.



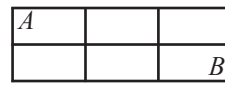
И в этой задаче 1 и 9 попали в две разных части графа. Ясно, что в правой части графа сгруппировались города-цифры, нацело делящиеся на 3, а в левой части графа ребра соединяют две цифры: одну – делящуюся на 3 с остатком 1, а другую – делящуюся на 3 с остатком 2.

Примечание. Отметим, что один и тот же граф можно нарисовать по-разному. Если учащиеся одного класса нарисуют графы к одной задаче, то мы можем получить столько графов, сколько учащихся их рисовали. Нарисованные по-разному графы (если они нарисованы без ошибок) принято называть *изоморфными*. Любой читатель может нарисовать бесконечное множество изоморфных графов.

Пример 3. Сколькими способами, двигаясь по указанным отрезкам, можно кратчайшим путем переместиться из точки *A* в точку *B*?



Решение. Это классическая задача на минимальный путь и возможное количество путей. Начнем с того, что вычеркнем все отрезки, лежащие вне прямоугольника с вершинами *A* и *B*. Ясно, что они не могут давать минимальный путь.



Теперь последовательно будем убирать симметричные пути.

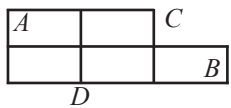


Рис. 1

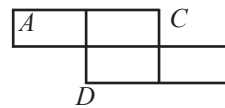


Рис. 2

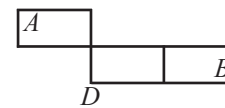


Рис. 3

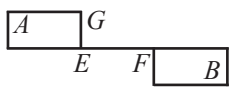


Рис. 4

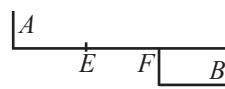


Рис. 5

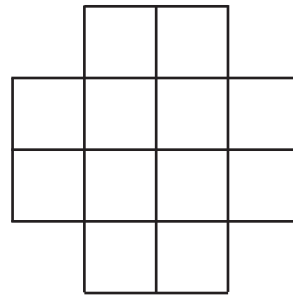
Пройдем из точки *A* по периметру через верхний правый угол (рис. 1), потом пройдем через левый нижний угол (рис. 2) – два пути уже получены. Обратимся к рис. 2: пройдя через точки *A* и *C*, далее мы можем попасть в точку *B* двумя способами (см. рис. 3). Задача имеет симметрию. Теперь из точки *B* пройдем через точку *D* (см. рис. 3) в точку *A*. Ясно, что это можно сделать еще двумя способами. Пройдя из *A* через *G* и *E*, мы получим еще два варианта пути. И оставшиеся два варианта представлены на рис. 5.

Ответ: десятью способами.

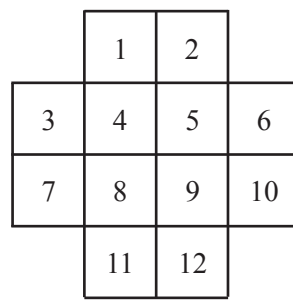
Примечание. Это задача на отыскание оптимального (симметричного) решения задачи.

Рассмотрим еще одну задачу, которая хорошо решается при оптимально выполненном чертеже. Искусство выполнения чертежей в задачах с графами требует отдельного разговора.

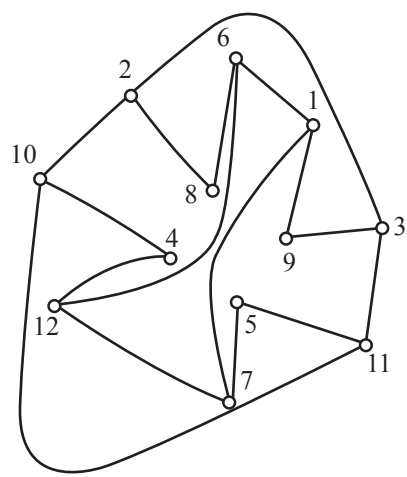
Пример 4. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли ходом шахматного коня обойти эту доску и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по одному разу?



Решение. Для простоты решения пронумеруем все клетки креста



Далее для решения задачи построим граф, вершинами которого будут точки с номерами клеток, а ребрами – возможные ходы шахматного коня с клетки на клетку.

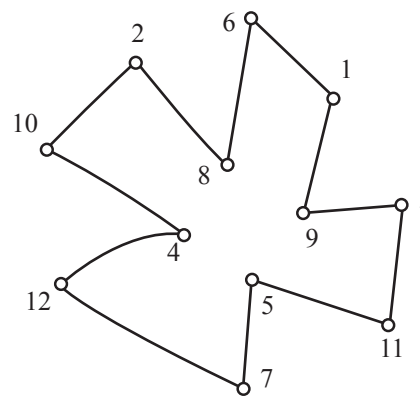


Для построения графа обратим внимание на то, что из клеток 4, 5, 8 и 9 шахматный конь может сделать по два хода (эти точки-клетки мы поместим в центральной части графа), а из всех остальных – по три хода (эти точки-клетки мы расположим на периметре).

Наша задача состоит в том, чтобы показать все возможные ходы шахматного коня, а потом на полученном графе убрать лишние ребра, мешающие выполнению условий задачи (например, конь должен в каждой точке креста побывать только один раз, путь должен начинаться и оканчиваться в одной и той же клетке креста).

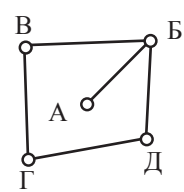
Получен полный граф всех возможных ходов шахматного коня. Давайте проанализируем полученный результат:

1) На рисунке обязательно должны остаться ребра 1–9, 9–3, 5–11, 5–7, 4–12, 4–10, 8–2, 8–6 (конь приходит в клетку и уходит из нее).
2) Убрав ребра 10–11, 2–3, 6–12, 1–7, мы получим решение задачи.



Определение. *Количество ребер, выходящих из данной вершины, называется* ***степенью вершины.***

На приведенном в качестве примера графе вершина А имеет первую степень, вершина Б – третью, а остальные вершины имеют вторую степень. Вершина изолированная (из которой не выходит ни одно ребро) имеет нулевую степень



Пример 5. В деревне есть 15 телефонов, а АТС отсутствует. Можно ли телефоны соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которой равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число ребер графа должно быть равно $\frac{15 \cdot 5}{2}$. Но это число нецелое! Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

Примечание. С подобными задачами на принцип разбиения на пары Вы еще столкнетесь в разделе «четность».

Правило. *Для подсчета числа ребер графа необходимо просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на два.*

Следствие. *Сумма степеней всех вершин графа должна быть* ***четной*** *(иначе ее нельзя было бы разделить на 2 нацело).*

Определение. *Вершина графа, имеющая нечетную степень, называется* ***нечетной,*** *а имеющая четную степень –* ***четной.***

Теорема. *Число нечетных вершин любого графа – четно.*

Для доказательства этой теоремы остается заметить, что сумма нескольких целых чисел четна тогда и только тогда, когда количество нечетных слагаемых четно.

Примечание. Теорема о четности числа нечетных вершин – одно из центральных мест теории графов. Очень важно до конца разобраться в ее доказательстве (см. раздел «четность») и научиться применять при решении задач.

Пример 6. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

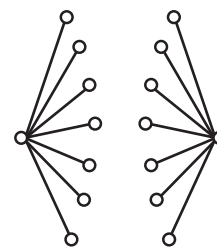
Примечание. Если Петя друг Васи, то Вася – друг Пети.

Решение. Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3; 11 –

степень 4; 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечетных вершин, что противоречит теореме.

Пример 7. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Решение. Рассмотрим два произвольных города и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью дорог (с этим мы уже сталкивались в примере 3), в которой начало очередной дороги совпадает с концом предыдущей. Каждый из двух городов по условию задачи соединен не менее, чем с 7 другими; при этом все упомянутые города различны – ведь если какие-то два из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города.



Таким образом, мы указали 16 городов. Противоречие с условием задачи.

Определение. *Граф называется* ***связным****, если две его вершины могут быть соединены* ***путем,*** *т.е. последовательностью ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.*

Определение. *Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется* ***деревом.***

Свойство. *В графе, являющемся деревом, любые две вершины можно соединить только одной ломаной.*

Теорема. *Для любого дерева, имеющего* ***B*** *вершин и* ***P*** *ребер, справедливо* ***соотношение Эйлера****:* $B - P = 1$.

Определение. *Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется* ***лесом.***

Определение. ***Несвязный*** *граф состоит из нескольких «кусков». Эти «куски» называются* ***компонентами***

связности *графа. Каждая компонента несвязного графа является, конечно, связным графом.*

Примечание. В примерах 1 и 2 мы имели дело с графами несвязными; во всех остальных примерах рассматривались графы связные.

Определение. *Замкнутый путь, то есть такой, начало и конец которого совпадают, называется* ***циклом.***

Примечание. В примере 4 мы уже с циклом сталкивались. Более того, мы можем утверждать, что и граф примера 7, в котором рассматриваются дороги страны Семерка, связен.

Теорема. *Граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее* $\frac{n-1}{2}$ *– связен.*

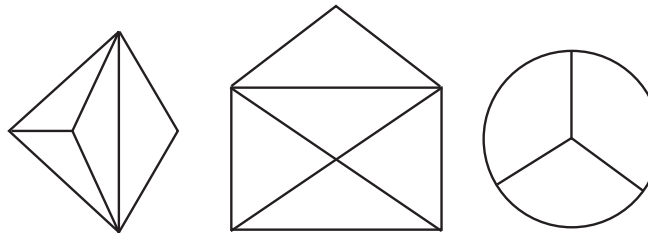
Примечание. Понятие связности чрезвычайно важно и постоянно будет использоваться в процессе дальнейшего изучения теории графов. В следующем примере оно представляется основным моментом в решении задачи, является содержательным соображением и часто оказывается полезным при решении задач.

Пример 8. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Доказательство. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также и город Дальний. Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин – 20 ребер. Таким образом, в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечетная вершина. Мы пришли к противоречию!

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ.

Пример 9. Можно ли нарисовать графы, изображенные на рисунках, не отрывая карандаша от бумаги?



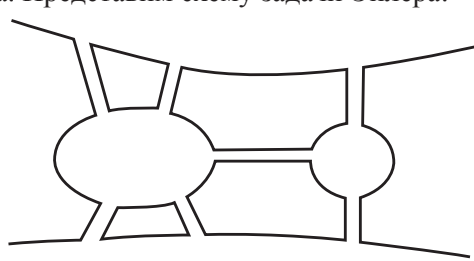
Подобные задачи достаточно часто встречаются в книжках по занимательной математике для младших школьников.

Решение. Для того, чтобы нарисовать любой граф, не отрывая руки от бумаги, необходимо в каждую вершину графа, за исключением начальной и конечной, войти столько же раз, сколько и выйти. Поэтому степени всех вершин нарисованного графа, кроме начальной и конечной, должны быть четными – **такой граф должен иметь не более двух нечетных вершин!**

Ясно, что левая фигура и конверт могут быть нарисованы без отрывания руки от бумаги, при этом рисунок должен начинаться в любой нечетной вершине: у первой фигуры две такие точки лежат на концах горизонтального отрезка, а у конверта такими двумя точками являются его нижние углы. Эмблема «Мерседеса» нарисована быть не может.

Впервые графы, обладающие подобными свойствами, были исследованы великим русским математиком Леонардом Эйлером в 1736 году в связи со знаменитой задачей о кенигсбергских мостах. Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются **эйлеровыми.**

Пример 10. Леонард Эйлер, совершая прогулку по городу, в котором он жил, – Кенигсберге (ныне Калининград), поставил для себя задачу: прогуляться по всем мостам, перекинутым на два острова реки и между островами, так, чтобы по каждому мосту пройти не более одного раза. Представим схему задачи Эйлера:



Ясно, что задача Эйлера при переводе на язык графов имеет 4 нечетных вершины и, следовательно, не решается.

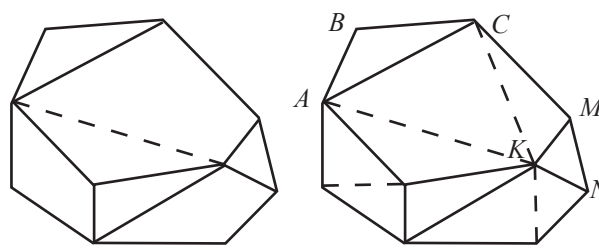
Теорема Эйлера. *Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство*

$$\boldsymbol{B - P + \Gamma = 1}, \qquad (*)$$

где ***B*** *– общее число вершин,* ***P*** *– общее число ребер,* ***Г*** *– общее число многоугольников (граней).*

Доказательство. Докажем, что равенство (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 1а)). Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет B вершин, $P + 1$ ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем

$$B - (P + 1) + (\Gamma + 1) = B - P + \Gamma.$$



а) б)

Рис. 1.

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 1б)). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

В обоих случаях равенство (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из $B - 1$ вершин, $P - 2$ ребер и $Г - 1$ многоугольника:

$$(B - 1) - (P + 2) + \ + (Г - 1) = B - P + Г.$$

Самостоятельно разберите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенства (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения $B = 3$, $P = 3$, $Г = 1$ и, следовательно, $B - P + Г = 1$. Значит, равенство (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).

Примечание. Соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, растягивать, сжимать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрыва сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменяется.

Еще одной задачей-головоломкой, связанной с именем Эйлера, является задача о трех домиках и трех колодцах.

Пример 11. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 2). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые должны попарно не пересекаться.

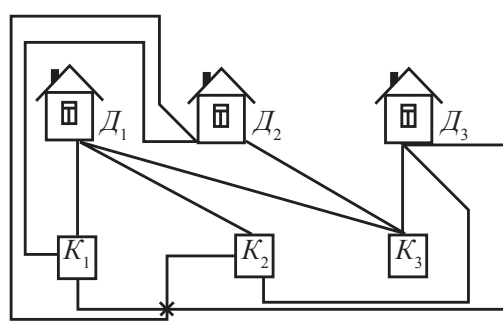


Рис. 2.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера $В - Р + Г = 1$. Добавим к рассматриваемым граням еще одну – внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид $В - Р + Г = 2$, причем $В = 6$ и $Р = 9$. Следовательно, $Г = 5$. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно на двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $(5 \cdot 4):2 = 10$, что противоречит условию, по которому их число должно быть равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен – нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Упражнения.

1. В государстве 100 городов, а из каждого из них выходит четыре дороги. Сколько всего дорог в государстве?
2. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы:
   а) каждый телефон был соединен ровно с семью другими?;
   б) было 4 телефона, каждый из которых был соединен с тремя; 8 телефонов, каждый из которых был соединен с шестью; 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
3. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей? (Рассмотреть случай границы с королем.)
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
5. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими? (В этой задаче привычные точки и ребра меняются местами.)
7. В стране из каждого города выходят 100 дорог и от любого города можно добраться до любого. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого.
8. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

9. Пусть лес состоит из n деревьев и имеет B вершин и P ребер. Чему равно $B - P$?
10. Возьмите карту Санкт-Петербурга и определите, можно ли прогуляться по городу, обойдя все дворцовые мосты по одному разу.
11. Докажите, что для произвольного разбиения четырехугольника на четырехугольники выполняется равенство $B - Г = 3$.
12. Два соседа имеют:
    а) два общих колодца;
    б) четыре общих колодца.
    Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?
13. Внутри n-угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.
14. Докажите, что при любом разбиении n-угольника на m-угольники выполняется равенство $2B + (2 - m)Г = n + 2$.

Примечание. Все упражнения решаются без необходимых комментариев в соответствии с материалом раздела.

V. ИГРЫ

Дети любят играть. Поэтому, особенно у школьников младших классов, большой интерес вызывают задачи-игры. С их помощью преподаватель может внести в занятие элемент развлечения: устроить турнир, сеанс одновременной игры, наконец, просто дать детям поиграть.

Вспомните, с каким интересом в игре «Форт Баярд» дети следят за процессом вытягивания палочек, зная условия игры.

В то же время такие задачи содержательны. Достаточно рассказать, что в игре «крестики-нолики» при правильных ходах всегда достигается ничейный результат (см. [5], где излагается полная теория игры).

При изложении решения игровых задач школьники испытывают большие трудности. Ведь необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведет к выигрышу. Поэтому задачи-игры очень полезны для развития разговорной математической культуры и четкого понимания того, что означает «решить задачу».

Во всех встречающихся играх предполагается, что играют двое, ходы делаются по очереди (игрок не может пропускать ход). Ответить всегда нужно на один и тот же вопрос – кто побеждает: начинающий (первый) игрок или его партнер (второй)? В дальнейшем это оговариваться не будет.

Примечание. Отметим для преподавателей, что перед объяснением решения задачи-игры необходимо учащимся дать (если это возможно) возможность поиграть в предлагаемую игру.

ИГРЫ-ШУТКИ.

Первый класс игр, о которых пойдет речь, – игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники. Поэтому для решения такой игры-задачи не нужно указывать выигрышную стратегию. Достаточно лишь доказать, что выигрывает тот или иной игрок (независимо от того, как будет играть!).

Начнем с игры, в которую играли в ближайшем к дому автора гастрономе два соседских мальчишки 10–12 лет.

Пример 1. Двое ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Проигравший игрок покупает сопернику шоколадку.

Примечание. Я не один день наблюдал за мальчишками. Одному из них все время не везло – он играл «вторым номером». Через несколько дней я удивился: он, играя «вторым номером», начал стабильно выигрывать. Оказалось, что с некоторого дня он предложил покупать шоколадку 5×7, мотивируя свое предложение тем, что такие шоколадки дешевле.

Решение. После каждого хода число кусков шоколадки увеличивается на единицу. Ломая шоколадку 6×8, мы из одного куска после некоторого числа ходов получим 48 кусочков. Всего будет сделано 47 ходов, это говорит о том, что последний ход (нечетный) сделает начавший игру.

Ломая шоколадку 5×7, мы из одного куска после некоторого числа ходов получим 35 кусочков. Всего будет сделано 34 хода, это говорит о том, что последний ход (четный) сделает второй игрок.

Решим еще несколько игр-шуток.

Пример 2. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на единицу. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный, ход будет сделан вторым игроком.

Пример 3. На доске написано 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра – единица, то выиграл первый игрок, если двойка – то второй.

Решение. (См. раздел «Четность».) Четность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было четное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечетное число!) единица. Поэтому выигрывает второй игрок.

Пример 4. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число – разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В процессе игры (сравните с алгоритмом Евклида из раздела «Делимость и остатки») обязательно будет выписан наиболь-

ший общий делитель (НОД) исходных чисел. Следовательно, будут выписаны и все числа, кратные ему, не превосходящие большего из исходных чисел. В нашем случае НОД равен 1. Поэтому будут выписаны все числа от 1 до 36. Таким образом, игра будет продолжаться 34 хода (два числа были выписаны сначала) и выигрывает второй игрок.

СИММЕТРИЯ.

Пример 5. Двое по очереди кладут пятирублевые монеты на стол симметричной формы, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В этой игре выигрывает первый игрок, независимо от размеров и формы стола! Первым ходом он кладет монету так, чтобы ее центр и центр симметрии стола совпали. После этого на каждый ход своего противника отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция *симметрична*. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, он побеждает.

Примечание 1. В случае, когда симметричность многовариантна, для решения задачи нужно правильно выбрать центр или ось симметрии. Продемонстрируем это на примере следующей задачи.

Примечание 2. При доказательстве правильности симметричной стратегии нельзя забывать о том, что очередному симметричному ходу может помешать ход, **только что** сделанный противником. Чтобы решить игру-задачу при помощи симметричной стратегии, необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

Пример 6. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга (цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. 1) Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, то естественно попробовать симметричную стратегию. Но на этот раз (первым ходом нельзя поставить слона в центр доски) симметрию может поддерживать второй игрок. Казалось бы, по аналогии с предыдущей задачей, это и есть выигрышная стратегия. Однако, следуя ей, второму игроку не удастся сделать даже свой первый ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может бить центрально-симметричное поле.

2) Решение поставленной задачи легко осуществить, применяя не центральную, а осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую, например, четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. Итак, в этой игре выигрывает все-таки второй игрок.

Пример 7. Имеется две кучки камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Решение. В этой игре при помощи симметричной стратегии побеждает второй игрок: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход.

Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках.

Пример 8. Двое ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В этой игре выигрывает первый игрок, если первым ходом занимает центральную клетку доски, а далее использует стратегию центральной симметрии.

Пример 9. а) Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Слон бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Та же игра, но с ладьями.

Решение. В обоих пунктах выигрывает первый игрок. В пункте а) используется осевая симметрия, в пункте б) – центральная симметрия.

Решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых они бьются, также не побиты.

Пример 10. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим ранее проведенных отрезков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположены по 9 вершин. После этого

на каждый ход второго игрока он отвечает аналогичным ходом, симметричным относительно хорды, с другой стороны.

Пример 11. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В обоих пунктах выигрывает второй игрок. Независимо от первого хода начинающего игру, второй после своего ответного первого хода должен оставить две одинаковые по длине цепочки лепестков. Далее следует симметричный повтор каждого хода первого игрока.

Пример 12. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

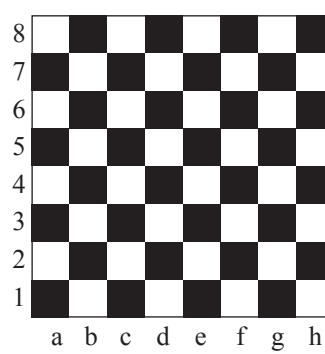
Решение. В этой игре проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5, а далее проводит симметричную стратегию.

ВЫИГРЫШНЫЕ ПОЗИЦИИ.

Достаточно большое число задач-игр требуют анализа. Рассмотрим задачи, в которых к выигрышу приводят так называемые выигрышные позиции.

Пример 13. Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8.

Решение.



В этой игре побеждает второй игрок. Его стратегия очень проста: каждым своим ходом он возвращает ладью на большую диагональ a1–h8. Объясним, почему, играя так, второй игрок выигрывает. Дело в том, что первый игрок любым своим ходом *вынужден* будет уводить ладью с этой диагонали, а второй игрок после этого будет *иметь возможность* вернуть ладью на линию a1–h8. Так как поле h8 принадлежит диагонали, то на него сумеет встать именно второй игрок.

Анализ решения.

Нам удалось выделить класс выигрышных позиций (ладья стоит на одной из клеток диагонали a1-h8), обладающих следующими свойствами:

1) завершающая позиция игры – выигрышная;
2) за ход нельзя из одной выигрышной позиции попасть в другую;
3) из любой невыигрышной позиции за один ход можно попасть в какую-либо выигрышную.

Нахождение такого класса выигрышных позиций для игры равносильно ее решению. Действительно, к победе ведет стратегия – ходи в выигрышную позицию. Если исходная позиция выигрышная, то, как в разобранной задаче, выигрывает второй. В противном случае выигрывает начинающий.

Пример 14. Король стоит на поле a1. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8.

Решение. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля a1 – (1; 1), поля h8 – (8; 8). Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с четными координатами. Первый ход – на поле b2. Выигрывает первый игрок. (См. анализ выше: поле a1 – проигрышная позиция.)

В двух следующих классических задачах в решениях фигурирует число 2^n.

Пример 15. В коробке лежат 300 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остается $2^n - 1$ спичка. Первым ходом начинающий игру оставляет 255, т.е. $(2^8 - 1)$ спичек, далее, следуя выигрышным позициям, побеждает.

Пример 16. Имеется три кучки камней: в первой – 50, во второй – 60, в третьей – 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

Решение. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в максимальной по количеству камней кучке остается $2^n - 1$ камень. Первый ход – первую и вторую кучки можно разбивать как угодно, а третью – на кучку из 63, т.е. $(2^6 - 1)$ камней и кучку из 7 камней.

Пример 17. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит нуль.

Решение. В этой игре побеждает тот, кто получит единицу. Побеждает первый игрок. Выигрышными позициями являются нечетные числа.

АНАЛИЗ С КОНЦА – ПОИСК ВЫИГРЫШНЫХ ПОЗИЦИЙ.

При изучении предыдущего раздела («Выигрышные позиции») могло появиться ощущение, что поиск выигрышных позиций основан лишь на интуиции, а поэтому, как правило, непрост. Сейчас мы опишем общий метод, позволяющий найти выигрышные позиции во многих играх.

Вернемся к задаче про короля из примера 14. Попробуем найти выигрышные позиции, исходя из их свойств. Как всегда, завершающая позиция игры (король стоит на h8) – выигрышная. Поэтому в клетку h8 поставим «+». Так же мы будем отмечать все найденные выигрышные позиции. В клетках, соответствующих проигрышным позициям, будем ставить «–».

Так как позиции, из которых король может за один ход попасть на выигрышное поле h8, – проигрышные, то возникает расстановка, изображенная на следующем по порядку рисунку. С полей h6 и f8 за один ход можно попасть *только* на проигрышные поля. В этих клет-

ках нужно поставить «+» – они выигрышные. Только что полученные выигрышные позиции порождают набор новых проигрышных позиций – h5, g5, g6, f7, e7, e8. Продолжим анализ далее. После получения очередного набора минусов отмечаем плюсом те поля, из которых *каждый* ход ведет в проигрышную позицию. После этого отмечаем минусом те поля, из которых существует *хотя бы один* ход в выигрышную ситуацию.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								+
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8							–	+
7							–	–
6								
5								
4								
3								
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8						+	–	+
7							–	–
6								+
5								
4								
3								
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8					–	+	–	+
7					–	–	–	–
6							–	+
5							–	–
4								
3								
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8				+	–	+	–	+
7					–	–	–	–
6						+	–	+
5							–	–
4								+
3								
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8			–	+	–	+	–	+
7			–	–	–	–	–	–
6					–	+	–	+
5					–	–	–	–
4							–	+
3							–	–
2								
1								

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	–	+	–	+	–	+	–	+
7	–	–	–	–	–	–	–	–
6	–	+	–	+	–	+	–	+
5	–	–	–	–	–	–	–	–
4	–	+	–	+	–	+	–	+
3	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	+	–	+	–	+	–	+
1	–	–	–	–	–	–	–	–

В итоге плюсы и минусы будут расставлены так, как на последнем рисунке.

Примечание. Только что описанный метод нахождения выигрышных позиций называется «анализом с конца». Применяя его к задаче с ладьей из примера 13, легко получаем набор выигрышных позиций.

Пример 18. Имеется две кучки камней: в первой 7 камней, во второй – 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. Покажем, как переформулировать эту задачу на уже привычном для нас языке шахматной доски. Пронумеруем вертикали и горизонтали шахматной доски числами от 0 до 7: вертикали – сверху вниз, а горизонтали – справа налево. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой кучке, и вертикали с номером, равным числу камней во второй кучке. Теперь заметим, что ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя на любое число клеток вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх» на шахматной доске. Таким образом, мы отождествили нашу игру с игрой о перемещении ферзя по указанным правилам с поля c1 на поле h8. Схема выигрышных позиций хорошо получается по аналогии с идеями движения короля по шахматной доске при анализе задачи с конца. Решение этой задачи читателем самостоятельно не представляет труда.

Упражнения.

1. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
2. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.
3. Конь стоит на поле a1. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
4. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки костяшкой домино размером 1×2 так, чтобы костяшки не перекрывались и не свешивались с доски. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
6. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.
7. Имеются две кучки камней: в одной – 30, в другой – 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.
8. Имеются две кучки конфет: в одной – 20, в другой – 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Ответы и комментарии.

1. Всего будет сделано 10 + 15 + 20 – 3 = 42 хода: выигрывает второй игрок.
2. Выигрывает второй игрок (см. раздел «Четность»).
3. Выигрывает второй игрок.
4. Выигрывает второй. Можно использовать и центральную, и осевую симметрию.
5. Выигрывает второй. Центральная симметрия.
6. Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.
7. Выигрывает первый. Первым ходом он уравнивает число камней в кучках, после чего действует, как в примере 7.
8. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечетными кучками. Первый ход – съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечетные кучки.

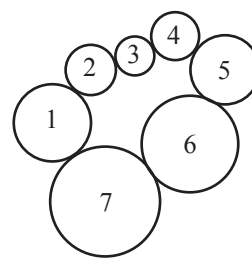
VI. ЧЕТНОСТЬ

Понятие четности возникает при рассмотрении самых различных математических задач. Если элементы произвольного множества могут быть условно разделены на две примерно равных группы с диаметрально противоположными свойствами, то речь идет о четности. Понятия: левый – правый; по часовой стрелке – против часовой стрелки; черный – белый (для шахматной доски, например); женский – мужской; четный – нечетный для целых чисел связаны в математике с понятием четности.

ЧЕРЕДОВАНИЕ.

Для простоты понимания вопроса будем рассматривать конкретные задачи и принципы, приводящие к их решению.

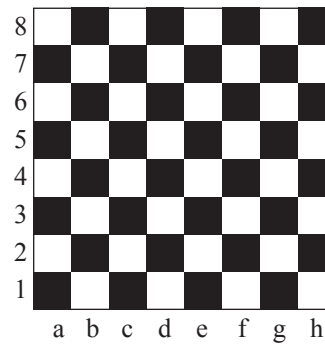
Задача 1. На плоскости расположены 7 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки цепочки вращаться?



Решение. Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая – против часовой стрелки. Третья – снова по часовой стрелке, четвертая – против и т.д. Ясно, что все «четные» шестеренки должны вращаться против часовой стрелки, а все «нечетные» – по часовой стрелке. Но тогда 1-я и 7-я шестеренки должны вращаться по часовой стрелке. Мы пришли к противоречию: нарушается принцип чередования. Цепочка шестеренок не может вращаться.

Главной идеей решения этой задачи было чередование направлений вращения. Эта идея будет присутствовать еще не в одной задаче.

В двух следующих задачах фигурирует шахматная доска. Напомню, что она представляет собой квадрат размером 8×8 клеток с чередующимися цветами. Предполагается, что читателю известны правила перемещения каждой шахматной фигуры.



Задача 2. Конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на это поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.

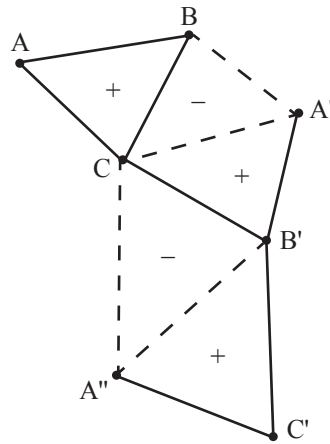
Задача 3. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Две предложенные задачи объединены одной идеей. Любой шахматист знает, что конь при перемещении по полю переходит с клетки одного цвета на клетку другого цвета. Так, если клетка a1 имеет черный цвет, то третий, пятый и все нечетные ходы конь сделает на клетку белого цвета. Вернувшись на ту же самую клетку, конь сделает четное число ходов. Поля a1 и h8 находятся на одной из главных диагоналей доски и, следовательно, имеют одинаковый цвет. Шахматная доска имеет 64 клетки, при перемещении с поля a1 на поле h8 конь должен обойти все клетки, при этом будет сделано 63 хода (в одной клетке конь уже стоит!) и конь попадет на клетку, цвет которой отличен от цвета полей a1 и h8. В задаче 3 ответ отрицательный.

Задача 4. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B, C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

Решение. Решение этой задачи нуждается в дополнительных пояснениях. Отметим, что решение задачи не зависит от того, в каком порядке и по каким шайбам будет бить хоккеист. Изобразим пер-

воначальное положение шайб и изменение положения шайб друг относительно друга.



В исходном положении три шайбы расположены так, что их обход A – B – C осуществляется по часовой стрелке (+). Ударим по шайбе A так, чтобы она заняла положение A', пролетев между шайбами B и C, тогда обход шайб A' – B – C в получившемся положении будет осуществляться против часовой стрелки (–). Вторым ударом шайбу B пошлем между шайбами A' и C. В получившемся положении обход шайб A' – B' – C снова осуществляется по часовой стрелке (*). Третьим ударом шайбу A' пошлем между шайбами B' и C; теперь обход шайб A'' – B' – C будет осуществляться против часовой стрелки. Таким образом, каждый удар по шайбе по правилам нашей задачи изменяет направление обхода шайб на противоположный: после каждого нечетного удара обход осуществляется против часовой стрелки, а после каждого четного удара – по часовой стрелке (меняется четность системы). После 25-го удара обход будет осуществляться против часовой стрелки, а исходное направление обхода было противоположным. Шайбы вернуться в исходные положения не могут.

Задача 5. Маша и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка – одного пола. Мальчиков среда Машиных друзей семь. А сколько девочек?

Решение. Очевидно, что в чередующейся замкнутой цепочке объектов одного вида (мальчиков) столько же, сколько и объектов другого вида (девочек). У Маши шесть подруг. (Маша девочка!)

РАЗБИЕНИЕ НА ПАРЫ.

Задача 6. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение. Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся, однако такое число звеньев должно быть четным.

Если предметы можно разбить на пары, то их число – четно.

Задача 7. Можно ли доску размером 5×5 заполнить костяшками домино 2×1?

Задача 8. Можно ли шахматную доску размером 8×8 заполнить костяшками домино 2×1?

Решение. В задаче 7 любое количество костяшек домино накрывает четное число клеток доски, которая имеет 25 клеток. Ответ: нет.

Задача 8 проста только на первый взгляд: в условии задачи не сказано, сколько костяшек домино мы имеем. Даже ученик третьего класса может на вопрос задачи дать отрицательный ответ и его обосновать: в комплекте для игры в домино 28 костей, которыми можно накрыть только 56 клеток шахматной доски. Задача имеет очевидное положительное решение только в случае, когда имеется более 32 костяшек домино.

Задача 9. Можно ли шахматную доску размером 8×8 заложить костяшками домино 2×1, если у доски выпилены клетки a1 и h8? Кости домино не должны наползать друг на друга и свешиваться с доски.

Решение. Для решения задачи достаточно заметить, что одна костяшка домино накрывает одновременно белую и черную клетки. Клетки a1 и h8 одного цвета: у шахматной доски 32 клетки одного цвета и 30 клеток другого. Таким образом, одна костяшка домино должна накрывать две клетки одного цвета, что невозможно.

Задача 10. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказались 3 очка. Сколько очков на другом конце?

Решение. Всего костяшек с тройкой на конце семь: 0–3; 1–3; 2–3; 3–3; 3–4; 3–5; 3–6; костяшка 3–3 имеет 3 на обоих концах (всего троек в цепочке 8). При игре в домино все цифры должны располагаться парами. Делаем вывод о том, что на другом конце цепочки также 3 очка.

Задача 11. Из набора домино выбросили все кости с шестерками. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Задача 12. Дан осесимметричный выпуклый 101-угольник. Докажите, что ось симметрии проходит через одну из вершин. Что можно сказать в случае 10-угольника?

Решение. Поскольку у симметричной фигуры все вершины, кроме лежащих на оси симметрии, должны образовывать пары, у 101-угольника на оси симметрии лежит одна вершина, а у 10-угольника – либо две, либо ни одной.

Задача 13. Можно ли выпуклый 17-угольник разрезать на параллелограммы?

Решение. При решении задачи достаточно вспомнить, что стороны параллелограмма попарно параллельны. 17-угольник имеет 17 сторон. Ответ очевиден.

Утверждение. *Если из нечетного числа предметов образованы несколько пар, то* ***по крайней мере один предмет останется без пары.***

После сформулированного утверждения решите самостоятельно несколько задач.

Задача 14. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

Задача 15. В задаче 14 расположение шашек симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ.

Задача 16. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет по 1 и 5 рублей?

Решение. Основываться будем на простом наблюдении: сумма нечетного числа нечетных слагаемых есть число нечетное. Ответ: нет.

Замечание. Четность суммы нескольких чисел зависит от четности числа нечетных слагаемых: если количество нечетных слагаемых (не)четно, то и сумма – (не)четна.

Задача 17. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если они одинаковые, то дописать к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?

Решение. Сумма исходных чисел равна 7. 7 – число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетной. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске после дописывания нуля останется 9 нулей и 5 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получаем на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом. Таким образом, после выполнения заданной операции на доске получается на 1 число меньше, причем сумма оставшихся чисел все время остается нечетной. Поскольку 1 – нечетное число, а 0 – четное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается число нечетное, т.е. 1.

Задача 18. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы от 1 до 192. Его младший брат вырвал из тетради все листы и разбросал по комнате. Петя подобрал наугад с пола 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2018?

Решение. Очевидно, что с одной стороны листа написано нечетное число, а с другой – четное. Сумма 25 нечетных чисел дает число нечетное, прибавив его к сумме 25 четных чисел, мы получим число нечетное.

Задача 19. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

Решение. Найдем произведение всех чисел в квадрате. Так как произведение чисел в каждой строке отрицательно, то и произведение всех чисел будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах. А так как произведение чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

Задача 20. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел.

Замечание. Есть ль четные простые числа?

Задача 21. 2012 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять людей, стоящих через одного?

Решение. Не всегда. При перестановке сохраняется четность номера места. Самый высокий по росту, стоящий, например, вторым, никогда не станет первым.

Задача 22. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Решение. Обратим внимание на то, что отрицательные числа также бывают четными и нечетными. Любые два целых числа при сложении и умножении дают сумму и разность одинаковой четности.

Сложив все 10 чисел, получим нечетное число. Произвольно меняя «плюсы» на «минусы» в итоге получим нечетное число (не нуль!)

Задача 23. На доске написаны числа 1, 2, 3, … 2010, 2011, 2012. Разрешается с доски стереть два любых числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно оказаться нулем?

Решение. Сумма всех записанных на доске чисел будет нечетной. При стирании 2-х чисел могут быть получены варианты:

а) стираются 2 четных (или нечетных) числа, модуль разности будет числом четным, а новая сумма будет числом нечетным;

б) стираются четное и нечетное число, модуль разности будет нечетным числом, а новая сумма снова будет числом нечетным.

Таким образом, в любом случае на доске останется нечетное число (не нуль!).

Упражнения.

1. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на единицу?

2. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы будет четной.
3. На столе стоят 9 стаканов – все вверх дном. Разрешается за один раз перевернуть любые 4 стакана. Можно ли после нескольких переворотов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?
4. Сумма 2006 натуральных чисел – число нечетное. Каким числом: четным или нечетным является произведение этих чисел?
5. На доске написано в строку 2013 целых чисел. Доказать, что из них можно стереть одно число так, чтобы сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 2012 чисел?
6. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить, фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?
7. В каждую клетку таблицы размером 25×25 вписано произвольно одно из чисел: +1 или –1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?
8. Учитель написал на листке бумаги число 10. 25 учеников передают этот листок друг другу, и каждый либо прибавляет, либо вычитает единицу. Может ли в результате получиться число 0?
9. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.
10. 101 лошадь разместили в 15 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне обязательно будет нечетное число лошадей?

Ответы и комментарии.

1. Нельзя. Если число арбузов в соседних корзинах отличается на единицу, то характер четности числа арбузов в этих корзинах будет разным. Тогда четность должна чередоваться: в 8 корзинах должно быть четное число, а в 8 корзинах должно быть нечетное число арбузов. Таким образом, общее число арбузов должно быть четным, что противоречит условию задачи.
2. Очевидный ответ: «Да, это 9-ая цифра суммы», опровергается контрпримером:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}734\\437\end{array}\\ \hline 1171 \end{array}.$$

Необходимо разбирать возможные варианты поразрядного сложения, двигаясь влево и вправо от 9-ой цифры суммы.

3. Нет, поскольку всегда число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.
4. Нечетным.
5. а) Пусть среди 2013 целых чисел есть четные и нечетные числа. Если количество нечетных чисел нечетно, то стираем любое из них. Если количество нечетных чисел четно, то из 2013 целых чисел хотя бы одно четное. Его и стираем.
   б) Пусть все числа четные. Стираем любое из них.
   в) Пусть все числа нечетные. Стираем любое из них.
   Для 2012 чисел не верно. В случае, когда чисел 2012 и все они нечетные, оставшаяся сумма не может быть четной.
6. Да. Взвешивая 50 и 50 монет, обращаем внимание на показания стрелки. По четности результата делаем вывод.
7. Нет. Перемножая все 50 произведений, мы получим 1, поскольку в каждое из произведений любое число войдет 2 раза. Тогда в число 50 сомножителей будет входить четное число произведений с «–1», а поэтому сумма четного числа произведений с «1» и четного числа произведений с «–1» не будет равна нулю (25 – число нечетное, значит одинакового числа слагаемых не будет).
8. Нет.
9. Сумма чисел в таблице не зависит от способа подсчета. С одной стороны, это количество столбцов, умноженное на 1; с другой – количество строк, умноженное на 1. Следовательно, $m = n$.
10. Нечетное число нечетных слагаемых.

VII. ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ.

Вы, конечно, хорошо знаете, что среди натуральных чисел есть простые и составные. Число является составным, если оно равно произведению двух меньших натуральных чисел (например, $3 \cdot 5 = 15$). В противном случае число (если оно, кроме того, отлично от единицы) называется простым. *Единица не является ни простым, ни составным числом!*

Простые числа являются «кирпичиками», из которых состоят составные числа. Рассмотрим число 420. Оно, без сомнения, составное. Его можно разложить на множители, например, $420 = 42 \times 10$. Каждое из чисел 42 и 10 также составное: $42 = 6 \times 7$, $10 = 2 \times 5$. Но $6 = 2 \times 3$, тогда $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Мы получили разложение нашего числа на *простые* множители.

Основная теорема арифметики:

Каждое натуральное число, за исключением единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причем единственным образом.

Свойства делимости практически полностью определяются разложением числа на простые множители.

Далее попытаемся ответить на простые вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 2?

Ответ: да, так как 2 входит в разложение этого числа на простые множители.

2. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 5?

Ответ: нет, потому что в разложении этого числа на простые множители нет простого числа 5.

3. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 8?

Ответ: да, поскольку $8 = 2^3$, а в разложение данного числа на простые множители двойка входит 9 раз.

4. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 9?

Ответ: нет, так как в разложение данного числа на простые множители тройка входит лишь один раз, а в разложение 9 – дважды.

5. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 6?

Ответ: да, потому что $6 = 2 \cdot 3$, а 2 и 3 входят в разложение данного числа на простые.

6. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и 3, то оно делится на 12?

Ответ: да, поскольку в разложение на простые множители числа, делящегося на 4, двойка входит по крайней мере два раза; а так как число делится и на 3, то в его разложение входит и тройка. Поэтому оно делится на 12.

7. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24?

Ответ: нет, например, число 12. Дело в том, что если число делится на 4, то в его разложение на простые множители по крайней мере дважды входит число 2; из делимости числа на 6 следует, что в его разложение входят 2 и 3. Таким образом, заведомо в его разложение входят две (не три!) двойки и одна тройка, и можно утверждать лишь то, что число делится на 12.

8. Число А не делится на 3. Может ли на 3 делиться число 2А?

Ответ: нет, поскольку тройка не входит в разложение на простые множители числа 2А.

9. Число А – четно. Верно ли, что 3А делится на 6?

Ответ: да, так как 2 и 3 входят в разложение числа 3А на простые множители.

10. Число 5А делится на 3. Верно ли, что А делится на 3?

Ответ: да, потому что в разложение числа 5А на простые множители тройка входит, а в разложение числа 5 – нет.

11. Число 15А делится на 6. Верно ли, что А делится на 6?

Ответ: нет, например, А = 2. Тройка, входящая в разложение числа 6, входит и в разложение числа 15. Поэтому можно утверждать лишь то, что в разложении числа А обязательно есть двойка.

Определение 1. *Два числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, отличных от единицы.*

***Примечание* 1.** Два простых числа являются взаимно простыми.

***Примечание* 2.** Если некоторое число делится на два взаимно простых числа n и m, то оно делится и на их произведение nm.

***Примечание* 3.** Если число $p \cdot A$ делится на q, где p и q взаимно простые, то и A делится на q.

Определение 2. *Наибольшим общим делителем (для краткости НОД) двух чисел называется наибольший из общих делителей этих чисел.*

Определение 3. *Наименьшим общим кратным (НОК) двух чисел называется наименьшее число, делящееся на каждое из них.*

Так, например НОД(18, 24) = 6; НОК(18, 24) = 72.

Дополним список контрольных вопросов еще двумя.
12. $A = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен НОД(A,B)?
Ответ: $24 = 2^3 \cdot 3$. Это – общая часть разложений.
13. $A = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равно НОК(A,B)?
Ответ: $420000000 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7$. Это объединение разложений.

Пример 1. P и Q – различные простые числа. Сколько делителей у числа а) PQ; б) P^2Q; в) P^2Q^2; г) P^nQ^m?

Задача решается прямым подсчетом делителей. Не забудьте, что единица также является делителем.

а) 1, P, Q, PQ…

Ответ: а) 4; б) 6; в) 9; г) $(n + 1)(m + 1)$.

Пример 2. P – простое число. Сколько существует натуральных чисел а) меньших P и взаимно простых с ним; б) меньших P^2 и взаимно простых с ним?

Решение. Простые рассуждения показывают, что условие а) выполняется для $P - 1$ числа, а условие б) выполняется для $P \cdot (P - 1)$ чисел.

Пример 3. Может ли $N!$ оканчиваться ровно 5-ю нулями?

Решение. Необходимо подсчитать, сколькими нулями оканчивается число, для этого подсчитать, сколько десяток и пятерок входят в произведение $N!$. Нетрудно отыскать, что 24! оканчивается четырьмя нулями, а 25! – шестью.

Ответ: нет.

Теорема. *Число, имеющее нечетное число делителей, – точный квадрат.*

Доказательство основывается на соображении, что если число n делится на d, то это же число делится и на $\frac{n}{d}$.

Теорема. *Для любых натуральных чисел A и B верно равенство НОД(A,B)·НОК(A,B) = AB.*

Пример 4. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

Решение. Данное число делится на 3, но не делится на 9.

Ответ: нет.

Мы обсудили понятие наибольшего общего делителя для натуральных чисел и выяснили, как его можно найти: достаточно выписать разложения этих чисел на простые множители и взять их общую часть. Однако для больших чисел эта процедура практически неосуществима. Попробуйте, например, таким способом найти наибольший общий делитель чисел 1381955 и 690713. К счастью, существует другой метод, позволяющий вычислить НОД двух чисел. Он называется *алгоритмом Евклида*.

Алгоритм Евклида основан на следующем простом соображении: любой общий делитель чисел A и B ($A > B$) делит также число $A - B$; кроме того, любой общий делитель чисел B и $A - B$ делит число A. Тем самым, НОД(A, B) = НОД(B, $A - B$). Мы, по существу, изложили алгоритм Евклида.

Покажем, как он работает для конкретных чисел 451 и 287:

НОД(451, 287) = НОД(287, 164) = НОД(164, 123) = НОД(123, 41) = = НОД(82, 41) = НОД(41, 41) = 41.

Заметим, что алгоритм Евклида можно ускорить: заменять A не на $A - B$, а сразу на остаток от деления A на B. Продемонстрируем это на примере чисел, уже упоминавшихся ранее:

НОД(1381955, 690713) = НОД(690713, 529) = НОД(529, 368) = = НОД(368, 161) = НОД(161, 46).

Пример 5. Найдите наибольший общий делитель чисел $2N + 13$ и $N + 7$.

Решение. НОД$(2N+13, N+7)$ = НОД$(N+7, N+6)$ = НОД$(N+6, 1) = 1$.

ОСТАТКИ.

Определение. *Разделить натуральное число N на натуральное число m с остатком означает представить N в виде $N = km + r$, где $0 \le r < m$. При этом число r называется остатком от деления N на m.*

Утверждение 1. *Сумма любых двух натуральных чисел и сумма их остатков имеют одинаковые остатки при делении на натуральное n.*

Утверждение 2. *Произведение любых двух натуральных чисел и произведение их остатков имеют одинаковые остатки при делении на натуральное n.*

Докажем, например, второе утверждение.

Пусть $N_1 = k_1 \cdot n + r_1$, $N_2 = k_2 \cdot n + r_2$.

Тогда $N_1 \cdot N_2 = (k_1 \cdot n + r_1)(k_2 \cdot n + r_2) = k_1 k_2 \cdot n^2 + k_1 r_2 \cdot n + k_2 r_1 \cdot n + r_1 r_2$.

Высказанные утверждения достаточно часто используются в решении олимпиадных задач. Их можно встретить в самых неожиданных условиях, например, при решении задач в целых числах.

Пример 6. Найдите остаток от деления $2010 \cdot 2011 \cdot 2012 + 2013^3$ на 7.

Решение. Произведем действия с остатками от деления каждого из чисел на 7: $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4^3$. Обратим внимание на то, что $4^3 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$, тогда $6 + 1 = 7$, и остаток от деления на 7 будет равен нулю.

Пример 7. Докажите, что N^3+2N делится на 3 для любого натурального N.

Решение. Число N при делении на 3 может давать один из трех остатков: 0, 1, 2. Рассмотрим все три возможных случая.

Если N дает остаток 0, то и N^3 и $2N$ делятся на 3, и поэтому N^3+2N также делится на 3.

Если N дает остаток 1, то и N^3 дает остаток 1, $2N$ – остаток 2, а $1 + 2$ делится на 3.

Если N дает остаток 2, то N^2 дает остаток 1, N^3 – остаток 2, $2N$ – остаток 1, а $2 + 1$ делится на 3.

Что и требовалось доказать.

Примечание. Ключевым моментом при решении этой задачи было сведение ее к перебору возможных остатков от деления на некоторое число. На этот метод необходимо обращать внимание школьников для того, чтобы они поняли, что подобный перебор действительно является полным решением.

Свойство. *Квадрат любого натурального числа при делении на 3 и 4 будет давать в остатке 0 или единицу.*

Пример 8. Натуральные числа X, Y, Z таковы, что $X^2 + Y^2 = Z^2$. Докажите, что хотя бы одно из чисел делится на 3.

Доказательство. Используем сформулированное без доказательства свойство. Оно сразу приводит к ответу.

Пример 9. Найдите последнюю цифру числа 2009^{2009}.

Решение. Заметим, что последняя цифра числа 2009^{2009} совпадает с последней цифрой числа 9^{2009}. Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней числа 9: 9, 1, 9, 1, 9, 1, … Ясно, что все нечетные степени девятки оканчиваются на 9. Поэтому последняя цифра числа 2009^{2009} – девятка.

Примечание. Полезно выписать последние цифры натуральных степеней двойки, тройки, семерки. Интересно, что при этом наблюдается повторяемость цифр через каждые 4 степени (убедитесь в этом). $\ldots 5^n = \ldots 25$; $\ldots 6^n = \ldots 6$; и еще найденная моими учениками закономерность $\ldots 376^n = \ldots 376$.

Пример 10. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Доказательство. Необходимо найти остаток от деления числа на 7 и убедиться, что он равен нулю.

Пример 11. p, $p + 10$, $p + 14$ – простые числа. Найдите p.

Решение. Очевидно, что одно из чисел должно делиться на 3, поэтому $p = 3$.

Пример 12. а) Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

б) Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?

Комментарии к решению примеров 11 и 12. В соответствии со сформулированным свойством для решения задачи достаточно проверить, что остаток квадрата нечетного числа от деления на 4 равен 1, а остаток квадрата четного числа – 0.

Пример 13. Дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равен 27. Что вы можете сказать о его корнях?

Решение. Кажется, что можно говорить о том, что уравнение имеет два различных действительных корня. Обратим внимание на дискриминант этого уравнения: $D = b^2 - 4ac$. В соответствии с комментариями к примерам 11 и 12 можем утверждать, что дискрими-

нант квадратного уравнения должен при делении на 4 иметь в остатке 1 или 0, а 27 при делении на 4 имеет в остатке 3. Уравнения, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

Пример 14. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

Примечание. В задачах, в которых встречаются кубы целых чисел, бывает полезно перебрать остатки от деления на 7 или на 9 (и в том, и в другом случае возможны лишь три различных остатка: 0, 1, 6 и 0, 1, 8 соответственно).

Пример 15. Докажите, что $A^3 + B^3 + 4$ не является кубом целого числа ни при каких натуральных A и B.

Решение. Для доказательства достаточно выяснить, какой остаток может давать число $a^3 + b^3 + 4$ от деления на 9.

Пример 16. Докажите, что число $6n^2 + 3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

Решение. Для решения задачи достаточно выяснить, какой остаток от деления на 7 может давать число $6n^2 + 3$.

Пример 17. X, Y, Z – натуральные числа, причем $X^2 + Y^2 = Z^2$. Доказать, что $X \cdot Y$ делится на 12.

Решение. Если ни одно из чисел X, Y не делится на 3, то Z^2 дает остаток 2 от деления на 3, что невозможно (см. **свойство**). Заметьте также, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1, квадрат четного числа, не делящегося на 4, – остаток 4, квадрат числа, делящегося на 4, – остаток 0. Остается доказать, что либо X и Y оба четны, либо среди них есть число, кратное четырем.

Пример 18. а) $A + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7A$ делится на 3.
б) $2 + A$ и $35 - B$ делятся на 11. Докажите, что $A + B$ делится на 11.
Решение. а) $4 + 7A = 4(A + 1) + 3A$;
б) $A + B = (2 + A) - (35 - B) + 33$.

Пример 19. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Решение. При решении задачи необходимо доказать, что любые два числа из этих семи дают одинаковый остаток при делении на 5.

Для этого нужно рассмотреть две шестерки: одну – не содержащую первое из них, вторую – не содержащее второе.

Пример 20. Докажите, что существует такое натуральное N, что числа $N + 1$, $N + 2$, …, $N + 2005$ – составные.

Решение. Число $N + 1$ должно быть составным. Попытаемся пойти по самому простому пути: сделаем так, чтобы $N + 1$ делилось на 2. $N + 2$ также должно быть составным, но делиться на 2 уже не может. Попытаемся опять пойти по самому простому пути: хотелось бы сделать так, чтобы $N + 2$ уже делилось на 3. Продолжая в том же духе, можно попытаться найти число N такое, что $N + 1$ делится на 2, $N + 2$ – на 3, $N + 3$ – на 4 и так далее. Это равносильно тому, что $N - 1$ делится на 2, 3, 4, …, 2006. Такое число, конечно, существует – например, 2006!. Итак, в качестве искомого N можно взять число 2006! + 1.

Пример 21. Докажите, что существует бесконечное множество простых чисел.

Решение. Предположим противное. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – все простые числа. Рассмотрим число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

Упражнения.

1. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.
2. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится а) на 30; б) на 120.
3. Какое наименьшее натуральное N, такое, что $N!$ делится на 990?
4. На сколько нулей оканчивается число 100!?
5. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{EEFF}$. Докажите, что он где-то ошибся.
6. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ – число составное.
7. Найдите остаток от деления 9^{100} на 8.
8. Докажите, что $N^5 + 4N$ делится на 5 при любом натуральном N.
9. Докажите, что $N^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном N.

10. Докажите, что $N^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном N.
11. Докажите, что $N^3 - N$ делится на 24 при любом нечетном N.
12. На какую цифру оканчивается 777^{777}?
13. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.
14. p, $2p + 1$, $4p + 1$ – простые числа. Найдите p.
15. p и $8p^2 + 1$ – простые числа. Найдите p.
16. Найти последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.
17. Найдите НОД($2^{100} - 1$, $2^{120} - 1$).
18. Найдите НОД(111…111, 11…11) – в записи первого числа 100 единиц, в записи второго – 60.

Ответы и указания.

1. *Указание.* Среди этих трех чисел есть хотя бы одно четное число и одно число, делящееся на 3.
3. 11.
4. 24.
5. Доказательство основано на свойстве делимости на 11.
6. $65(a + b) = 65a + 65b = (65 + 56)a = 121a$. 65 и 121 – числа взаимно простые, поэтому $a + b$ – число составное.
7. 1.

8–10. Необходим перебор остатков от деления на 5, 3 и 9 соответственно.

11. Подсказка: докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.
14. 3.
15. 2.
16. 0.

17–18. Необходимо воспользоваться алгоритмом Евклида.

VIII. УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ И НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

В данном разделе будут рассматриваться методы решения разнообразных уравнений с несколькими переменными, решениями которых являются целые или натуральные числа. При решении подобных задач мы будем использовать понятие четности, свойства делимости и остатков при делимости, выделение целых частей, группировку и т.д. Решение любой задачи следует начинать с определения того метода, которым мы будем решать предложенную нам задачу.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $2x + 3y = 13$.

Решение. *Первый шаг.* Найдем какое-либо частное решение данного уравнения (возможно, путем элементарного подбора). Так как $2\cdot5 + 3\cdot1 = 13$, пара (5; 1) будет являться решением исходного уравнения.

Второй шаг. Пусть $x_0 = 5$, $y_0 = 1$. Запишем систему, состоящую из исходного уравнения и равенства с полученными нами значениями:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13; \\ 2x_0 + 3y_0 = 13. \end{cases}$$

Вычитая из исходного уравнения полученное равенство, получим $2(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0$.

Обозначив $x - x_0 = a$ и $y - y_0 = b$, имеем $2a = -3b$, и, значит, a делится на –3, а b делится на 2. Пусть $a = -3k$ и $b = 2k$, где $k \in Z$. Учитывая, что $x - x_0 = -3k$, $y - y_0 = 2k$, имеем $x = x_0 - 3k$, $y = y_0 + 2k$, где $k \in Z$. Ясно, что каждое целое k будет давать свою пару x и y; уравнение в целых числах имеет бесконечное число решений.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $19x + 99y = 9$. (*)

Решение. В этом примере элементарным подбором найти частное решение уравнения представляется затруднительным. Воспользуемся методом, который иногда называют методом остатков: разделим 99 на 19 с остатком; затем 19 разделим на полученный остаток опять с остатком и так до тех пор, пока не получим в остатке единицу.

$99 = 19\cdot5 + 4 \Rightarrow 4 = 99 - 19\cdot5;$

$19 = 4\cdot4 + 3 \Rightarrow 3 = 19 - 4\cdot4;\ \ 4 = 1\cdot3 + 1.$

Теперь пройдем всю цепочку деления с остатками в обратном порядке для получения единицы как линейной комбинации чисел 19 и 99:

$1 = 4 - 1\cdot 3 = 4 - 1\cdot(19 - 4\cdot 4) = 5\cdot 4 - 19 = 5\cdot(99 - 19\cdot 5) - 19 =$
$= 5\cdot 99 - 26\cdot 19.$

Таким образом, $19\cdot(-26) + 99\cdot 5 = 1$. Умножая обе части уравнения на 9, найдем $19\cdot(-234) + 99\cdot 45 = 9$ (**). Вычитая из (*) (**), в результате получим $19\cdot(x + 234) + 99\cdot(y - 45) = 0$. Поскольку 19 и 99 – числа взаимно простые, то далее, как в примере 1, имеем $x = -234 - 99k$; $y = 45 + 19k$, где $k \in Z$.

Пример 3. Найти не менее двух натуральных решений уравнения $28x + 30y + 31z = 365$.

Решение. Первое решение предложенного уравнения способен дать любой внимательный ученик третьего класса. Очевидно, что в задаче «зашифрован» календарь, тогда $x = 1$, $y = 7$, $z = 4$.

Полное решение данной задачи основывается на выделении целой части. Разделим почленно уравнение на 28, выразив из исходного уравнения x: $x = \dfrac{365 - 30y - 31z}{28} = 13 - \dfrac{30(y + z) + z - 1}{28}$. Если требуется отыскать натуральные решения уравнения, то из натуральности x следует, что дробь $\dfrac{30(y + z) + z - 1}{28} = k$ должна представлять собой натуральное число k и не превосходить 12 (в противном случае x не будет натуральным; вспомним, что нуль натуральным числом не является).

Пусть $k = 12$, тогда $x = 1$, полученная дробь дает после преобразования $\dfrac{30(y + z) + z - 1}{28} = 12 \Rightarrow 30(y + z) + z - 1 = 336 \Rightarrow 30(y + z) + z = 337.$

Поскольку $30(y + z)$ нацело делится на 10, ясно, что $\begin{cases} y + z = 11; \\ z = 7, \end{cases}$

откуда $y = 4$, $z = 7$. Мы совершенно строго получили ранее угаданный ответ (1, 4, 7).

Пусть $k = 11$, тогда $x = 2$, полученная дробь дает после преобразования $\dfrac{30(y + z) + z - 1}{28} = 11 \Rightarrow 30(y + z) + z - 1 = 308 \Rightarrow 30(y + z) + z = 309.$

Поскольку $30(y + z)$ нацело делится на 10, ясно, что $\begin{cases} y + z = 10; \\ z = 9, \end{cases}$

откуда $y = 9$, $z = 1$. Мы получили еще один ответ в натуральных числах (2, 9, 1).

Предлагаем читателям убедиться, подставляя другие натуральные k, что других натуральных решений уравнение не имеет (целые решения есть!).

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Решение. Сформулированное на стр. 58 свойство утверждает, что при делении на 3 и 4 квадрат любого целого числа дает в остатке либо 0, либо 1. Тогда выражение $x^2 + y^2$ при делении на 4 может иметь остатки только 0, 1 и 2. Правая часть уравнения имеет при делении на 4 остаток 3 ($4z - 1 = 4z - 4 + 3 = 4(z - 4) + 3$). Поскольку при делении на 4 левая и правая части уравнения имеют различные остатки, уравнение не имеет решения в целых числах.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $x + y = x \cdot y$.

Решение. Прежде всего обратим внимание на симметрию задачи (если x и y поменять местами, то структура задания не изменится).

Запишем уравнение в виде $y = xy - x$. Вынося x за скобки в правой части уравнения, получим $y = x \cdot (y - 1)$.

При $y = 1$ уравнение не имеет решения, поскольку правая часть уравнения при этом обращается в нуль, а левая равна единице.

При $y \neq 1$ разделим обе части уравнения на $y - 1$, при этом получим: $\frac{y}{y-1} = x \Rightarrow \frac{y-1+1}{y-1} = x \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-1}$. Полученное уравнение равносильно исходному. Поскольку x – целое число, дробь $\frac{1}{y-1}$ также обязана быть целым числом. Это условие выполняется при $y - 1 = \pm 1$. В итоге имеем два решения: (0; 0), (2; 2).

Примечание. Обратите внимание на симметричность задачи и полученных ответов.

Пример 6. Решить уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Решение. Проведем цепочку равносильных преобразований:

$x^2 = y^2 + 2y + 13$; $x^2 = y^2 + 2y + 1 + 12$; $x^2 = (y^2 + 2y + 1) + 12$;

$x^2 - (y + 1)^2 = 12$; $(x - (y + 1))(x + (y + 1)) = 12$;
$(x - y - 1)(x + y + 1) = 12$.

В левой части стоит произведение двух сомножителей, произведение которых равно 12. Конечно, можно перебрать все возможные пары чисел и получить:

$12 = 1\cdot12 = 2\cdot6 = 3\cdot4 = 4\cdot3 = 6\cdot2 = (-2)\cdot(-6) = (-3)\cdot(-4) = (-4)\cdot(-3) = (-6)\cdot(-2) = (-1)\cdot(-12)$, а затем решить двенадцать систем уравнений. Мы этого делать не будем.

В разделе «Четность» мы уже отмечали, что сумма и разность двух целых чисел должны иметь одинаковую четность, т.е. $x - y$ и $x + y$ должны иметь одинаковую четность. Но тогда и $x - y - 1$, и $x + y + 1$ тоже должны иметь одинаковую четность. При учете четности у нас остаются только четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 2; \\ x + y + 1 = 6; \end{cases} \begin{cases} x - y - 1 = -2; \\ x + y + 1 = -6; \end{cases} \begin{cases} x - y - 1 = 6; \\ x + y + 1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x - y - 1 = -6; \\ x + y + 1 = -2. \end{cases}$$

Так использование понятия четности существенно упрощает решение задачи. Не сомневаемся, что решение подобных элементарных систем уравнений не составит труда для любого школьника.

Ответ: (4; 1), (–4; –3), (4; –3), (–4; 1).

Пример 7. Решить уравнение в целых числах:
$x^3 - x^2 - xy - 17x - 3y + 8 = 0$.

Решение. Выразим одну из переменных: $xy + 3y = x^3 - x^2 - 17x + 8$, тогда $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 17x + 8}{x + 3} = x^2 - 4x - 5 + \dfrac{23}{x + 3}$. Дробь должна быть целым числом, поэтому $x + 3 = \pm1$ или $x + 3 = \pm23$. Рассматривая все 4 возможные случая для x, получим соответствующие пары для y.

Ответ: (–2; 30), (–4; 4), (20; 676), (–26; 774).

Пример 8. Решить уравнение $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{30}{7}$ в натуральных числах.

Решение. Поскольку x, y, z – натуральные числа, то каждое из этих чисел больше единицы.

$\dfrac{30}{7} = 4 + \dfrac{2}{7}$. Поскольку перед нами трехэтажная дробь, очевидно, что она сама – число дробное, и тогда ясно, что $x = 4$.

Сделаем из трехэтажной дроби дробь обыкновенную, тогда $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{z}{yz+1}$; $\frac{z}{yz+1} = \frac{2}{7}$. Дальнейшие очевидные рассуждения дают $z = 2$ и $y = 3$.

Ответ: (4; 3; 2).

Пример 9. Доказать, что уравнение $6^x = y^2 + y - 2$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство. Поскольку x и y являются целыми, то 6^x должно быть целым, а значит, $x \geq 0$. Так как $6 = 5 + 1$, то $(5 + 1)^x$ при делении на 5 будет давать остаток 1. Найдем остатки от деления правой части уравнения на 5 и покажем их в таблице.

Остатки от деления на 5 (y)	Остатки от деления на 5 правой части ($y^2 + y - 2$)
0	3
1	0
2	4
3	0
4	3

Таким образом, правая часть не дает остаток 1 ни при каких значениях y.

Пример 10. Доказать, что уравнение $xy = 2006(x + y)$ имеет решения в целых числах.

Доказательство.

Преобразуем уравнение к виду $(x - 2006)(y - 2006) = 2006^2$. Уравнение имеет решения, например, $x = y = 4012$.

Пример 11. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Решение. При $n \geq 5$ выражение $n!$ содержит множитель 5 и, значит, делится на 5. Тогда $n! + 5n + 13 = n! + 5n + 10 + 3$ при делении на 5 дает в остатке 3. Тогда при делении на 5 k^2 должен давать в остатке 3. Но при делении на 5 число k^2 дает только остатки 0; 1; 4.

Остатки k	0	1	2	3	4
Остатки k^2	0	1	4	4	1

Следовательно, при $n \geq 5$ данное уравнение корней не имеет. Проверим оставшиеся значения n (1; 2; 3; 4).

При $n = 1$ из данного уравнения получаем уравнение $19 = k^2$, у которого нет натуральных корней.

При $n = 2$ из данного уравнения получаем уравнение $25 = k^2$, у которого только одно натуральное решение $k = 5$.

При $n = 3$ из данного уравнения получаем уравнение $34 = k^2$, у которого нет натуральных корней.

При $n = 4$ из данного уравнения получаем уравнение $57 = k^2$, у которого нет натуральных корней.

Ответ: $n = 2$; $k = 5$.

Упражнения.

1. Решить уравнение в целых числах: $4x + 6y = 9$.
2. Найдите натуральные решения уравнения $4x + 6y = 12$.

Решить уравнения в целых числах:

3. $3x + 5y = 7$.
4. $21x + 48y = 6$.
5. $2x^2 - 1 = 2xy$.
6. $x \cdot y + x - 3y = -4$.
7. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$.
8. $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{17}{7}$.
9. $x \cdot y = x + y + 3$. (Обратите внимание на симметрию задачи.)
10. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 303$.
11. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.
12. Существует ли такое x, что $x^3 - 3x^2 + 2x + 2018 = 0$?

Ответы и комментарии.

1. Левая часть уравнения четная, а правая – нечетная. Решений нет.
2. Решений нет.
3. $x = 14 + 5k$, $y = -7 - 3k$, $k \in Z$.
4. $x = 14 + 16k$, $y = -6 + 7k$, $k \in Z$.
5. Нет решения (четность).
6. $(x - 3)\cdot(y + 1) = -7$. Далее (–4; 0), (2; 6), (4; –8), (10; –2).
7. $(x - 2y)\cdot(x - y) = 7$. Далее (5; 6), (13; 6), (–5; –6), (–13; –6).
8. (3; –2; 4). (2; 2; 3).
9. (2; 5), (0; –3), (3; 3), (–1; –1), (5; 2), (–3; 0).
10. (152; 151), (52; 49).
11. 1.
12. Нет, поскольку левая часть уравнения $x(x - 1)(x - 2) = -2018$, равносильного исходному, делится на 6, а правая часть нацело на 6 не делится.

X. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод полной математической индукции в настоящее время не находит своего места в школьных учебниках. Между тем этот метод играет существенную роль в высшей математике, являясь сильным орудием в математических доказательствах. Именно этот метод позволяет коротко и абсолютно строго доказывать многие теоремы.

Требование полноты доказательства является одним из ведущих в современной математике. На самом деле, при $n = 1, 2, 3, 4$ число $n^2 + n + 17$ равно соответственно простым числам 19, 23, 29, 37. Проверим еще несколько следующих значений (скажем, $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$) – число тоже оказывается простым. Но можно ли отсюда заключить, что число $n^2 + n + 17$ – простое? Очевидно, нельзя: такое заключение было бы логически необоснованным. Более того, оно и неверно: легко убедиться, что при $n = 16$ это число равно 17^2, т.е. не является простым.

Определение 1. *В основе метода математической индукции лежит следующий принцип:*
Некоторое утверждение верно при любом натуральном n, если:
1) оно верно при n = 1 ***и***
2) из справедливости этого утверждения при каком-либо произвольном $n = k$ ($k \geq 1$) следует, что оно верно и при $n = k + 1$.

Пример 1. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Сначала найдем сумму одного, двух, трех и четырех слагаемых. Имеем:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

В каждом из случаев получается дробь, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе – число, на единицу большее числа слагаемых. Это позволяет высказать гипотезу (предположение), что при любом n

$$S_n = \frac{n}{(n+1)}.$$

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$.

2) Предположим, что гипотеза верна при $n = k$, то есть

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{(k+1)}.$$

Докажем, что тогда гипотеза должна быть верной и при $n = k + 1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Но по предположению $S_k = \frac{k}{(k+1)}$. Поэтому

$$S_{k+1} = \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Таким образом, исходя из предположения, что гипотеза $S_n = \frac{n}{(n+1)}$ верна при $n = k$, мы доказали, что она верна и при $n = k + 1$. Поэтому формула

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

верна и при любом натуральном n.

Примечание. В начале пособия уже упоминалось о том, что олимпиадные задачи, как правило, имеют не один способ решения. Эта задача ранее встречалась в разделе II как задача 28.

Представим «детское» решение задачи:

сумма ста дробей: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}$ может быть легко представлена в виде:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}.$$

Этот способ гораздо проще, но не является универсальным.

Пример 2. Доказать, что n-й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (1)$$

где a_1 – первый член арифметической прогрессии, а d – разность этой прогрессии.

Этот пример отличается от предыдущего тем, что строить гипотезу здесь не надо, она дана. Нужно только доказать, что эта гипотеза верна.

Доказательством будем вести методом математической индукции.

1. При n=1 формула (1) имеет вид

$$a_1 = a_1, \qquad (2)$$

так что при $n = 1$ формула верна.

2. Предположим, что она верна при $n = k$, то есть $a_k = a_1 + d(k-1)$, и покажем, что в таком случае она должна быть верной и при $n = k+1$, то есть $a_{k+1} = a_1 + kd$.

Действительно, $a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd$, что и требовалось доказать.

Оба условия принципа математической индукции выполняются, и поэтому формула (1) верна для любого натурального n.

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном n

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (3)$$

1. При $n = 1$ формула (3) принимает вид $x' = 1$. Это отношение верно (оно доказывается в курсе дифференциального исчисления). Значит, при $n = 1$ формула (3) верна.

2. Предположим, что она верна при $n = k$, то есть $(x^k)' = kx^{k-1}$, исходя из этого, докажем, что она верна и при $n = k + 1$, то есть $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$. Действительно, представляя $x^{k+1} = x^k \cdot x$ и используя правило дифференцирования произведения, получаем:

$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x.$

Но по предположению $(x^k)' = kx^{k-1}$, к тому же $x' = 1$. Поэтому

$(x^{k+1})' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$

Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и поэтому формула (3) верна при любом натуральном n.

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных n, а лишь для некоторых n, начиная с некоторого p. Такие утверждения иногда удается доказать методом, несколько отличным от метода математической индукции.

Определение 2. *Метод неполной математической индукции: Утверждение верно при всех натуральных значениях $n \geq p$, если:*
1) $n = p$ (а не при $n = 1$);
2) из справедливости этого утверждения при $n = k$, где $k \geq p$ (а не $k \geq 1$), вытекает, что оно верно и при $n = k + 1$.

Поясним это на следующем примере.

Доказать, что сумма S_n внутренних углов любого выпуклого многоугольника равна $(n - 2)\pi$:

$$S_n = (n - 2)\pi. \qquad (4)$$

Это утверждение имеет смысл не для всех натуральных n, а лишь для $n \geq 3$. Поэтому использовать метод математической индукции в полной мере нельзя. Используем определение 2:

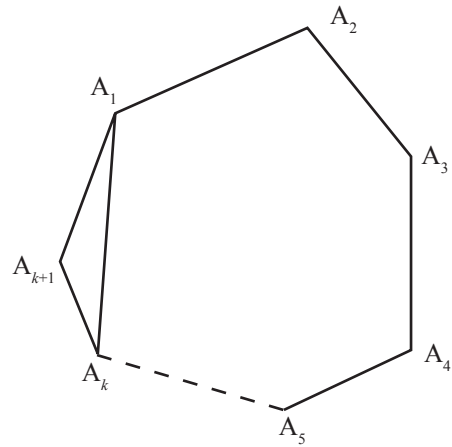
1. При $n = 3$ наше утверждение принимает вид $S_3 = \pi$. Но сумма внутренних углов любого треугольника действительно равна π. Поэтому при $n = 3$ формула (4) верна.

2. Пусть эта формула верна при $n = k$, то есть $S_k = (k - 2)\pi$, где $k \geq 3$. Докажем, что в таком случае имеет место формула $S_{k+1} = (k - 1)\pi$.

Пусть $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ – произвольный выпуклый $(k + 1)$-угольник. Соединив точки A_1 и A_k, мы получим выпуклый k-угольник $A_1A_2\ldots A_k$. Очевидно, что сумма $(k + 1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ рав-

на сумме углов k-угольника $A_1A_2\ldots A_k$ плюс сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$. Но сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$ равна π. Поэтому

$$S_{k+1} = S_k + \pi = (k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi.$$



Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и поэтому формула (4) верна при любом натуральном $n \geq 3$.

Ошибка в схеме доказательства может привести к абсурду. Покажем это.

Теорема. *При любом натуральном n число 2n+1 – четное.*

Доказательство. Пусть эта теорема верна при $n = k$, то есть число $2k + 1$ также четное. Докажем, что тогда $2(k + 1) + 1$ также четно.

Действительно, $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$.

По предположению $2k + 1$ четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. Теорема доказана.

Если бы мы не забыли проверить, верна ли наша теорема при $n = 1$, мы не пришли бы к такому результату.

Упражнения.

1. Доказать, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9 при всех $n \geq 1$.
3. Доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.
3. Доказать, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2}$ для $n > 1$.
4. Найти сумму $C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + \ldots + C_n^m$.

5. В последовательности чисел 1, 1, 2, 3, 5, … каждое число равно сумме сумме двух предыдущих. Доказать, что каждое 4-е число последовательности делится на 3.
6. Доказать, что с помощью гирь весом 1 г, 2 г, …, 2^n г можно набрать любой вес от 1 г до $2^{n+1} - 1$ г.
7. На плоскости задано $n \geq 3$ точек. Доказать, что можно так провести отрезки прямых от каждой точке к некоторым остальным, что отрезки не будут пересекаться между собой и образуют выпуклый многоугольник, разбитый на треугольники.
8. Длина каждого из $n \geq 3$ данных отрезков больше 1. Известно, что никакие k из них ($k = 3, 4, \ldots, n$) не могут быть сторонами многоугольника. Доказать, что сумма всех отрезков больше 2^{n-1}.
9. В таблицу из трех строк и n столбцов расставлено произвольным образом n белых, n красных и n черных фишек. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, что в каждом столбце будут стоять 3 фишки разных цветов.
10. Доказать, что сумма углов пространственной замкнутой ломаной линии, состоящей из n звеньев, меньше $180^\circ(n - 2)$.
11. а) На плоскости задано n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие 3 не проходят через одну точку. На сколько частей они делят плоскость?
    б) Доказать, что n плоскостей в общем положении (никакие 3 не параллельны одной прямой и никакие 4 не проходят через одну точку) делят пространство на $\frac{n^3 + 5n}{6} + 1$ частей.
12. Доказать тождества:
    а) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;
    б) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$;
    в) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
13. Вывести формулу общего члена геометрической прогрессии.
14. Доказать, что при любом a число $a^3 + 5a$ делится без остатка на 6.
15. На сколько частей делится плоскость n различными прямыми, проведенными в этой плоскости через одну ее точку?

16. Методом математической индукции доказать тождество:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}.$$

Какой еще Вы можете предложить способ для доказательства этого тождества?

17. Доказать, что при любом натуральном n и $a > -1$ $(1 - a)^n \geq 1 + na$.

18. На сколько треугольников может быть разбит выпуклый n-угольник своими непересекающимися диагоналями?

Решения и необходимые комментарии.

Все задачи этого раздела, за редким исключением, решаются по схеме метода математической индукции, как говорят математики – «в лоб».

Упражнения 1 и 2 решаются по индукции.

3. При $n = 1$ имеет место равенство $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Предположим, что выполнено неравенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$. Если в сумме $\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$ каждое из 2^n слагаемых заменить меньшим $\frac{1}{2^{n+1}}$, то сумма уменьшится: $\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$. Сложив это неравенство с первым, получим

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

4. Сумма равна C_{n+1}^{m+1}. Доказательство основано на том, что

$$C_{n+1}^{m} + C_{n+1}^{m+1} = C_{n+2}^{m+1}.$$

5. $a_4 = 3$ делится на 3. Если a_{4n} делится на 3, то $a_{4n+4} + a_{4n+2} = 2a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3a_{4n+1} + 2a_{4n}$ делится на 3.

6. Утверждение доказывается по индукции.

7. Можно считать, что n точек соединены между собой и образуют выпуклый многоугольник, разбитый на треугольники, $n + 1$-ю точку соединяем отрезками с теми же точками, которые видны из нее (т.е. не заслонены от нее уже проведенными отрезками).

8. Воспользуемся следующим правилом: из нескольких отрезков можно сложить многогранник тогда и только тогда, когда самый большой из них меньше суммы остальных.
9. Индукция по числу столбцов. Нетрудно показать, что в любой таблице $3\times n$ можно перестановкой фишек в строках добиться того, что в первом столбце будут стоять фишки разных цветов.
10. Рассматривая ломаную, состоящую из $n + 1$ звеньев, заменить два смежных звена AB и BC одним AC и воспользоваться тем, что в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.
11. а) На $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ частей. Одна прямая делит плоскость на две части; $(n + 1)$-я прямая пересекается с другими в n точках, т.е. рассекает пополам $n + 1$ из имеющихся частей.
б) $(n + 1)$-я плоскость пересекается с предыдущими по n прямым общего положения, которыми она рассекается на $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ новую часть. Следовательно, $(n + 1)$-я плоскость прибавляет $\frac{n(n+1)}{2}$ новую часть в пространстве. Проверка формулы $\frac{n^3+5n}{6} + 1$: при $n = 1$получаем 2 части,
$$\frac{n^3+5n}{6} + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6} + 1.$$
15. $2n$.

Примечание. Автором намеренно в качестве тренировочных заданий предлагается довольно большое количество задач геометрических – именно они в методе математической индукции представляют наибольшую трудность.

X. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Другими словами, это раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке. Например, ответ на вопрос: «Сколько различных четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр?» дает комбинаторика.

Для получения правил, используемых для решения комбинаторных задач, рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Мама может дать сыну в школу какой-то из фруктов, имея 3 яблока, 5 груш и 7 бананов. Сколько разных способов выбора фруктов есть у мамы?

Решение. Очевидно, что существует всего 3 + 5 + 7 = 15 вариантов выбора фруктов.

Пример 2. Из пункта А в пункт В можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существует 1 авиалиния, 2 железнодорожных и 3 автобусных маршрута. Следовательно, общее число возможных маршрутов равно 2 + 1 + 3 = 6.

Правило суммы. *Если выбор каждого из k объектов* a_i *(i = 1, 2, ..., k) можно выполнить* n_i *способами, то выбор «или* a_1*, или* a_2*, ..., или* a_k*» можно произвести* $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *способами.*

Пример 3. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить пару чашка – блюдце? В магазине есть еще 4 вида чайных ложек. Сколько наборов из трех предметов можно составить?

Решение. Выберем чайную пару. Сначала выберем одну из пяти чашек: возможность выбора дает всего 5 вариантов; далее для чашки выберем одно из трех блюдец. Итак, возможное число пар равно $5 \cdot 3 = 15$. Для каждой выбранной пары можем взять одну из четырех чайных ложек, тогда число возможных наборов из трех предметов равно $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Пример 4. Сколькими способами можно разместить четыре шара по двум лункам, если в каждую помещается только один шар?

Решение. Очевидно, что первую лунку можно заполнить четырьмя способами, так как при выборе первой лунки имеется 4 шара. Вторую лунку можно заполнить одним из трех оставшихся шаров. Заметим, что с каждым из способов заполнения первой лунки может совпасть любой из способов заполнения второй лунки, поэтому общее число способов распределения шаров по двум лункам равно $4 \cdot 3 = 12$.

Правило произведения. *Если выбор каждого из k объектов* a_i *(i = 1, 2, ..., k) можно осуществить* n_i *способами, то выбор «и* a_1*, и* a_2*, ..., и* a_k*» можно произвести* $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$ *способами.*

Приведем несколько заданий для любителей шахмат.

Пример 5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Поставим на шахматную доску белую ладью. Поскольку число клеток шахматной доски равно 64, мы можем произвести это действие 64 способами. Поставленная на доску белая ладья одну клетку занимает и «бьет» все клетки, находящиеся с ней на одной горизонтали и вертикали, таким образом, черная ладья может быть поставлена в любую из 49 клеток, которую «не бьет» белая ладья. Поэтому возможны $64 \cdot 49 = 3136$ расстановок ладей на шахматном поле.

Пример 6. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Решение. Белый король может стоять или в углу шахматной доски, или у ее края, или внутри шахматной доски.

Если белый король стоит в углу шахматной доски, то черный может быть поставлен в любые 60 клеток доски, которые расположены на расстоянии более одной клетки от белого; угловых клеток 4, поэтому по правилу произведения имеем $4 \cdot 60$ вариантов.

Если белый король стоит у края доски (но не в углу), а таких вариантов расстановки всего $6 \cdot 4 = 24$, то черный король может быть поставлен в одну из 58 клеток, которые не находятся под «боем» белого короля; такая расстановка королей по правилу произведения допускает $24 \cdot 58$ вариантов.

Для случая, когда белый король стоит не у края доски (таких клеток 36), черный король может быть поставлен в одну из 55 клеток, которые не находятся «под боем» белого короля. По правилу произведения имеем 36·55 вариантов.

Применяя правило суммы, получаем 4·60 + 24·58 + 36·55 = 3612 возможных расстановок двух королей на доске.

Пример 6 интересен тем, что при его решении используются оба правила.

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ.

Размещениями из n элементов по m называются всевозможные упорядоченные подмножества, содержащие m элементов из данных n.

Число возможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и находится по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где n и m – натуральные числа, причем $0 \le m \le n$.

Пример 7. Сколько двуязычных словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, немецкого, английского, французского, итальянского – на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Так как нужны словари для двустороннего перевода, то вместе с англо-русским словарем должен быть издан и русско-английский словарь и т.д. Поэтому число всех словарей равно числу всех упорядоченных пар из пяти элементов, т.е. $A_5^2 = 20$.

Пример 8. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать капитана и его заместителя?

Решение. $A_{11}^2 = 110$.

Пример 9. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Решение. $A_5^3 = 60$. Это решение можно пояснить и иначе. Для верхней полосы полотнища мы можем выбрать материю любого из пяти цветов (5 вариантов выбора), для следующей полосы остается выбор из четырех цветов материи, поскольку цвета не должны повторяться (4 варианта), а для последней полосы остается материя трех

цветов, поскольку два цвета мы уже использовали (3 варианта). Итак, могут быть изготовлены 5·4·3 = 60 флагов.

Пример 10. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

Решение. $A_{14}^{5} = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240240$.

РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m, называют размещениями из n элементов по m с повторениями. Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по m элементов в каждом обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле $\overline{A}_n^m = n^m$.

Пример 11. В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный флажок. Сколько различных случаев распределения флажков на здании возможны?

Решение. Имеет место размещение флажков двух цветов с повторами по восьми гнездам $\overline{A}_2^8 = 2^8 = 256$.

Пример 12. Сколько пятизначных чисел можно составить из всех цифр, кроме нуля?

Решение. $\overline{A}_9^5 = 9^5 = 6561$.

Пример 13. Назовем число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

Решение. $\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625$.

Пример 14. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Решение. $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Пример 15. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Решение. $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Пример 16. Сколькими способами можно заполнить один вариант в «Спортпрогнозе»? (В этой лотерее нужно угадать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья, счет роли не играет.)

Решение. $\overline{A}_3^{13} = 3^{13} = 1594323$.

Иногда при решении задач рациональнее подсчитать число элементов, не обладающих данным свойством.

Пример 17. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Решение. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых 6-значных чисел, определим количество 6-значных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечетные цифры, то их количество, очевидно, равно $5^6 = 15625$. Всего шестизначных чисел 900000. Количество чисел, обладающих указанным свойством, равно 900000 – 15625 = 884375.

ПЕРЕСТАНОВКИ.

Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов. Поскольку каждая перестановка содержит все n элементов, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$. Отметим, что по определению $0! = 1$.

Пример 18. Список учеников класса, в котором 20 человек и нет однофамильцев, можно составить 20! = 2432902008176640000 способами.

Пример 19. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Для того, чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $P_5 = 5! = 120$.

ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Перестановки из n элементов, в каждую из которых входят α элементов a, β элементов b, γ элементов c и т.д., λ элементов l, где $\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda = n$, называются перестановками из n элементов с повторениями.

Число всевозможных перестановок с повторениями обозначается символом $\overline{P}_{\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda}$ и может быть вычислено по формуле

$$\overline{P}_{\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + ... + \lambda)!}{\alpha!\beta!\gamma!...\lambda!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...\lambda!}.$$

Пример 20. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 черных. Сколько различных узоров из этих кружков можно составить, располагая их в ряд?

Решение. $\overline{P}_{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$

Пример 21. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова «биссектриса»?

Решение. В слове «биссектриса» три буквы «с» и две буквы «и», остальные шесть букв встречаются по одному разу, т.о. имеем

$$\overline{P}_{1,1,1,1,1,1,2,3} = \frac{11!}{2!3!}.$$

СОЧЕТАНИЯ.

Сочетаниями из n элементов по m называются всевозможные подмножества, содержащие m элементов из данных n ($0 \le m \le n$). Таким образом, различными считаются только те подмножества, которые отличаются составом элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.

Число возможных сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}, \text{ или } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Так как число перестановок из m элементов равно $m!$, то число размещений из n элементов по m A_n^m будет ровно в $m!$ больше, чем число сочетаний из n элементов по m C_n^m, т.е. $A_n^m = m!C_n^m$, откуда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 22. Сколькими способами из команды в семь человек можно выбрать четырех бегунов для эстафеты 800 + 400 + 200 + 100?

Решение. $C_7^4 = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35.$

Пример 23. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Решение. $C_{14}^7 = 3432.$

Пример 24. Сколько вариантов заполнения карточек «Спортлото» 6 из 49 существует?

Решение. $C_{49}^6 = 13983816.$

Свойства чисел C_n^m:

1. $C_n^{n-m} = C_n^m$. Это соотношение позволяет ускорить вычисление числа сочетаний из n элементов по m при $m > \dfrac{n}{2}$.

2. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$.

3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.

Следствие.

$C_n^{n-k} = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-3}^{n-k-2} + ... + C_{k-1}^0$.

Эти свойства упрощают вычисления.

СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Сочетания из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом сочетании любое число раз, но не более m, называются сочетаниями из n элементов по m с повторениями и обозначаются $\overline{C}_n^m$.

Число $\overline{C}_n^m$ всевозможных сочетаний с повторениями вычисляют по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)}{m!}.$$

Пример 25. В продаже имеются 4 сорта пирожных. Сколько наборов по 7 пирожных можно составить?

Решение. Всякий набор пирожных представляет собой сочетание с повторениями из 4 по 7: $\overline{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120.$

Из ситуации ясно, что при решении комбинаторных задач необходимо вначале определить вид соединений. При этом можно руководствоваться правилами для установления вида соединений, вытекающими из признаков, определяющих понятие того или иного из этих видов. Таких правил несколько. Приведем одно из них.

ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА.

Для произвольных выражений a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

1. Правая часть формулы бинома Ньютона содержит $n + 1$ слагаемое.

2. Коэффициенты разложения, равноудаленные от первого и от последнего членов разложения, равны, т.к. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$

4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

$(1 - 1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n$, откуда

$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

5. Коэффициент (k + 1)-го члена разложения бинома Ньютона равен произведению коэффициента k-го члена на показатель степени a в этом члене, деленному на k.

$C_n^k = C_n^{k-1}\dfrac{n-k+1}{k}$, где C_n^{k-1} есть коэффициент k-го члена, а C_n^k – коэффициент (k+1)-го члена разложения бинома, а (n – k + 1) – показатель степени a в этом члене.

6. Любой член бинома Ньютона определяется по формуле

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Заметим, что хорошо известные формулы сокращенного умножения $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ являются частными случаями для бинома Ньютона при $n = 2$ и $n = 3$.

Коэффициенты для других значений n могут быть найдены по известной схеме, которую называют «треугольником Паскаля»:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
……..

Любое число нижней строки равно сумме двух чисел, стоящих строкой выше и расположенных левее и правее этого числа; по краям треугольника стоят единицы. Эти числа являются (как ранее было сказано) биномиальными коэффициентами, которые вычисляются по формулам числа сочетаний.

Пример 26. Возвести в шестую степень двучлен $x^2 - y$.

Решение. $(x^2 - y)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k}(-y)^k = x^{12} - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6$.

Упражнения.

1. Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих цифру 8? не содержащих цифр 0 и 8? составленных из цифр 2, 3, 5, 7?
2. Сколькими способами можно разложить 12 различных деталей по 3 ящикам?
3. Имеется набор из 16 карточек. На четырех из них написана буква «А», на четырех – буква «Б», на четырех буква «В» и на четырех

буква «Г». Сколько разных комбинаций букв можно получить, выбирая из набора 4 карточки и располагая их в некотором порядке?

4. При игре в «Спортлото» где большая вероятность выигрыша: 6 из 49 или 5 из 36?
5. В некотором сказочном королевстве не было двух человек с одинаковым набором зубов. Каково могло быть наибольшее число жителей этого королевства, если у человека 32 зуба?
6. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?
7. В профком избрано 9 человек. Из них нужно выбрать председателя, его заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?
8. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани шести различных цветов, а все стулья должны быть разного цвета?
9. На собрании должны выступать 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если Б не должен выступать до того, как выступил А? Решите ту же задачу, если Б должен выступать сразу после А.
10. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из состава конференции, на которой присутствуют 15 человек?
11. Сколькими способами можно поставить на черные поля доски 12 белых и 12 черных шашек?
12. У одного человек есть 11 книг по математике, а у другого 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена?

Ответы.

1. 52488; 32768; 1024.
2. 3^{12}.
4. 5 из 36.
5. 2^{32}.
6. 336.
7. 3024.
8. 6!.
9. 60; 24.
10. 3003.
11. $\dfrac{32!}{(12!)^2 8!}$.
12. 75075.

XI. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Логические задачи стоят несколько особняком среди математических задач: в них, как правило, отсутствуют вычисления. Однако решение логических задач является обязательным компонентом подготовки к решению олимпиадных задач. Главной задачей преподавателя при рассмотрении этого раздела является формирование культуры мышления. Очень важно, чтобы даже младшеклассники не путали причину со следствием, тщательно проводили перебор вариантов, правильно строили цепочку рассуждений.

Несколько таких задач были предложены в «разминочном» разделе этого пособия.

Не останавливаясь на задачах, в которых явно перепутаны местами причина и следствие, хочу обратить внимание на задачу №18 на с. 13. Как правило, у логической задачи имеется единственный ответ. Обратимся к примеру.

Пример 1. Словам соответствуют цифры: корова – 2, кошка – 3, кукушка – 4. Какая цифра, по Вашему мнению, должна соответствовать слову «собака»?

Решение. Прежде всего обратим внимание на то, что задача допускает не один ответ.

1) Ответ детского сада: 3. (По числу звуков: «му», «мяу», «ку-ку», «гав».)
2) Подсчитав число букв «к» в каждом слове и прибавив единицу, получим для собаки цифру 2.
3) Взяв ряд записанных подряд цифр, получаем в ответе цифру 5.
4) А ведь возможна еще в ответе и единица!

Получаем, что у каждого своя логика.

Вывод: данная задача относится к классу логических задач, но допускает не один ответ! В задачах подобного типа необходимо очень точно описывать логику своих рассуждений.

Пример 2. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно нужно перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой стороне карточки – гласная буква»?

Решение. В данной задаче в явном виде сказано: «Если.., то…». Если на карточке написано четное число (4), то для верности утверждения задачи эту карточку необходимо перевернуть. Проверим обратное утверждение (у нас обе стороны карточки равноценны) и перевернем карточку с гласной буквой (А). Ясно, что необходимо перевернуть именно две указанные карточки.

Пример 3. В трех урнах лежат шары: в одной – два белых, в другой – два черных, в третьей – белый и черный. На урнах висят таблички: ББ, ЧЧ и БЧ так, что содержимое каждой из урн не соответствует табличке. Как, вытащив один шар, определить, в какой урне какие шары лежат?

Решение. Вытащим шар из урны с надписью БЧ.

Если вытащенный шар окажется белым, то в этой урне лежат два белых шара, в урне с надписью ББ не может быть белого и черного шаров, поскольку при этом в урне с надписью ЧЧ содержимое совпадет с надписью. Делаем вывод о том, что в урне с надписью ББ лежат два черных шара, а в урне с надписью ЧЧ лежат два шара разных цветов.

Если вытащенный шар окажется черным, то в урне с надписью БЧ лежат два черных шара, в урне с надписью ЧЧ лежат два белых шара, а в урне с надписью ББ лежат два шара разных цветов.

Рассмотрим несколько задач (задачи такого типа часто встречаются в логике), в которых действие происходит на острове. Коренными жителями этого острова являются рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Пример 4. Человек говорит о себе: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

Решение. Нет, не является, поскольку его высказывание противоречит характеристике коренных жителей острова.

Пример 5. Какой вопрос нужно задать на острове аборигену, чтобы узнать, куда ведет интересующая нас дорога – в город лжецов или в город рыцарей?

Решение. Нужно, указав на дорогу, спросить аборигена: «Ты живешь в городе, в который идет эта дорога?»

Если человек говорит «да» (рыцарь сказал правду, а лжец солгал), то эта дорога ведет в город рыцарей. При ответе «нет» делаем вывод о том, что дорога ведет в город лжецов.

Пример 6. Представьте себе, что на острове слова «да» и «нет» звучат как «тип» и «топ», но не известно, какое именно слово что означает. Как, задав аборигену один вопрос, выяснить у него значение каждого из слов?

Решение. Для выяснения значения слов достаточно аборигену задать один вопрос: «Ты рыцарь?» И рыцарь, и лжец при этом должны ответить: «Да». Задав вопрос: «Ты лжец?», мы всегда получим ответ: «Нет». Так, задав только один вопрос, мы всегда можем узнать значение слов аборигенского лексикона.

Пример 7. Есть три человека: А, В и С, про которых известно, что один из них рыцарь, другой – лжец, а третий – приезжий, нормальный человек, который может и говорить правду, и лгать.

А говорит: «Я нормальный человек».

В говорит: «А и С иногда говорят правду».

С говорит: «В – нормальный человек».

Решение. Слова человека В однозначно говорят о том, что это – приезжий, поскольку его высказывание не характерно для рыцаря и лжеца, которые всегда дают однозначные ответы. Если В – приезжий, то слова С однозначно говорят о том, что С – рыцарь (он сказал правду о В). Тогда методом исключения приходим к выводу, что А – лжец.

Примечание. *Задачи о лгунах* составляют довольно обширный класс достаточно трудных логических задач. Обычно такие задачи решаются следующим образом. Берется одно из утверждений и предполагается, что оно истинно. Если при рассмотрении других утверждений не получается противоречия, то рассмотренное утверждение действительно истинно. Если же при рассмотрении других утверждений мы где-то получаем противоречие, то взятое нами утверждение получается ложным. Если утверждений было всего два, то верным будет второе утверждение. Если утверждений три и более, приходится применять перебор возможных предположений.

Пример 8. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша – «Не знаю». Потом оказалось, что двое из мальчишек сказали правду, а двое – неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло?

Решение. Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Поскольку стекло разбил кто-то один, среди ответов Пети, Васи и Коли может быть

только один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое.

Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

Пример 9. Иван-царевич спросил на развилке трех зверей – Зайца, Лису и Медведя – путь в Кощеево царство (он знает, что путь только один). Первый зверь ответил: «Налево». Второй сказал: «Первый зверь указал неверный путь». И добавил: «Направо». Третий сказал: «Первый зверь указал неверный путь. Второй зверь оба раза солгал. Прямо». Подскажите Ивану-царевичу верную дорогу и определите, в каком порядке отвечали звери, если известно, что Лиса всегда лжет, Медведь всегда говорит правду, а трусливый Заяц чередует правильные ответы с неправильными, начиная либо с правды, либо со лжи. (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

Решение. Обозначим первого, второго и третьего зверя как I, II, III соответственно. Если I солгал, то II и III первыми высказываниями сказали правду; это означает вдобавок, что III вторым утверждением солгал. Значит, III может быть только Зайцем (и в третий раз говорит правду), тогда II – Медведь. Но их последние высказывания противоречат друг другу, что невозможно.

Значит, I сказал правду. Тогда первые высказывания зверей II и III ложные. Более того, II солгал и во второй раз, ибо указал неверный путь; значит, II – Лиса. Поскольку III солгал хотя бы раз, то он – не Медведь. Значит, III – Заяц, тогда I – Медведь. Правильный путь – налево, и Заяц действительно солгал в первый и в третий раз.

Пример 10. Пять школьников приехали из пяти разных городов в Ставрополь на краевую олимпиаду по математике. «Откуда вы, мальчишки?» – спросили их хозяева. Вот что ответил каждый из них.

Андреев: «Я приехал из Невинномысска, а Григорьев живет в Кисловодске».

Борисов: «В Кисловодске живет Васильев. Я прибыл из Светлограда».

Васильев: «Я прибыл из Невинномысска, а Борисов из Буденновска».

Григорьев: «Я прибыл из Кисловодска, а Данилов из Пятигорска».

Данилов: «Да, я действительно из Пятигорска, Андреев же живет в Светлограде».

Хозяева удивились противоречивости ответов приехавших гостей. Ребята объяснили им, что каждый из них высказал одно утверждение правильное, а второе ложное. При этом по их ответам вполне можно установить, откуда приехал каждый из участников олимпиады. Откуда приехал каждый школьник?

Решение. Пусть у Андреева первое утверждение верное, то есть он из Невинномысска. Тогда Григорьев живет не в Кисловодске. Поэтому второе утверждение Данилова ложное, значит, он из Пятигорска. Тогда первое утверждение Григорьева ложно. Так как Андреев из Невинномысска, то первое утверждение Васильева ложно, поэтому Борисов из Буденновска. Поскольку Григорьев не из Кисловодска, то остается, что он из Светлограда, а Васильев из Кисловодска.

Рассмотрим второй возможный вариант. Пусть у Андреева второе утверждение является верным, тогда Григорьев приехал из Кисловодска. Значит, Данилов приехал не из Пятигорска, а Андреев не из Невинномысска. Тогда у Борисова первое утверждение ложно (в Кисловодске живет Григорьев, а не Васильев), значит, Борисов прибыл из Светлограда.

Поэтому Андреев не из Светлограда и получается, что Данилов из Пятигорска. Получено противоречие: Данилов одновременно и живет, и не живет в Пятигорске. Значит, второй вариант невозможен.

Ответ: Андреев из Невинномысска, Борисов из Буденновска, Васильев из Кисловодска, Григорьев из Светлограда, а Данилов из Пятигорска.

Приведем пример логической задачи, условие которой невольно подталкивает к неправильному ответу.

Пример 11. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

Решение. В этой задаче при решении основная масса решающих невольно полагает, что профессором должен быть мужчина, хотя это ниоткуда не следует по условию задачи.

Попытаемся отвлечься от навязываемого условием стереотипа. Получается ясное решение задачи.

1) Профессором является женщина, имеющая сына и мужа; есть у нее и отец.
2) У женщины-профессора может быть еще и брат (сын отца профессора).

3) Если муж профессора (отец сына профессора) разговаривает с братом жены (сыном отца профессора), то условия задачи выполняются.

Ответ: да, такое возможно.

Рассмотрим логическую задачу, в которой требуется упорядочить множество.

Пример 12. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Галя, Коля, Валя и Таня. Сколько лет каждому ребенку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Галя старше Коли и сумма лет Гали и Вали делится на три?

Решение. Сначала найдем возраст мальчика. Поскольку в детский сад ходит девочка, то это не Коля. Тогда Коле больше 5 лет. Так как Галя старше Коли, то Коле не может быть 15 лет.

Если сумма лет Гали и Вали делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это возможно в следующих случаях:

1) одной девочке 5, а другой 13 лет;
2) одной девочке 8, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной из девочек 13 лет, следовательно, Коле не может быть 13 лет. Зная, что Коле не 5, не 15 и не 13 лет, приходим к выводу, что мальчику 8 лет.

Теперь установим возраст каждой девочки. Поскольку сумма лет Гали и Вали делится на три, а Коле 8 лет, этим двум девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Галя старше Коли, то Гале 13 лет. Тогда Вале должно быть 5 лет, а Тане 15 лет.

Приведем пример классической задачи на схему действий. Она встречается еще в изданиях конца XIX века.

Пример 13. Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козу и капусту, если волк может съесть козу, а коза любит капусту? Лодочник может взять в лодку или одно из животных, или капусту.

Решение. *Первым рейсом* лодочник перевозит козу, привязав на берегу волка рядом с капустой. Привязывает козу на противоположном берегу и возвращается.

Вторым рейсом лодочник перевозит волка, оставляя на берегу капусту. Привязывает волка на противоположном берегу и возвращается в исходную точку с козой.

Третьим рейсом лодочник перевозит капусту, привязав козу в исходной точке, оставляет капусту с волком на противоположном берегу и возвращается за козой.

Четвертым рейсом перевозится коза.

К логическим задачам относятся и задачи, в которых необходимо выяснить итоги проводимого турнира. Отметим, что обязательно необходимо знать правила игры и схему начисления очков по итогам турнира. Задачи, в которых приходится чертить таблицы, предлагаем рассмотреть самостоятельно (см. упражнения).

Турнирные задачи (на первый взгляд) не всегда могут иметь чисто логическое решение. Рассмотрим пример такой задачи.

Пример 14. В шахматном турнире участвовали два ученика седьмого класса и некоторое количество учеников восьмого класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все возможные решения.

(По правилам шахматного турнира каждый из участников играет с каждым по одной партии. Если один из участников выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает нуль очков. В случае ничьей играющие получают по 0,5 очка.)

Решение. В этой задаче, которая предлагалась 60 лет назад на Московской математической олимпиаде, применяется очень важный метод решения турнирных задач – подсчет двумя способами. Он основан на том, что сумма очков, набранных всеми участниками, равна общему числу партий, так как в каждой партии разыгрывается одно очко.

Итак, пусть n – число восьмиклассников, m – число очков, набранных каждым из восьмиклассников. Тогда число очков, набранных восьмиклассниками, равно nm, а общее число очков, набранных всеми участниками турнира, равно $nm + 8$.

С другой стороны, в турнире участвовало $n+2$ школьника. Значит, число сыгранных партий (и, значит, число набранных очков) равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Получаем уравнение $nm + 8 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Откуда $2m = n + 3 - \frac{14}{n}$. Мы получили уравнение, решаемое в натуральных числах, тогда n – делитель числа 14. Перебор натуральных делителей показывает, что $n = 1$ и $n = 2$ не подходят, а $n = 7$ (все восьмиклассники выиграли свои партии) и $n = 14$ (все восьмиклассники сыграли свои партии вничью) подходят.

Ответ: 7 или 14 восьмиклассников.

Пример 15. Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в семерку, восьмер-

ку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

Решение. Поскольку стрелок выбил 90 очков и из них за четыре раза набрал 40 очков, то в другие 6 раз он набрал оставшиеся 50 очков. Так как в эти шесть выстрелов стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела надо набрать 26 очков, что возможно только при единственной комбинации цифр: $26 = 27 - 1 = 3\times9 - 1 = 9 + 9 + 8$.

Таким образом, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, а в девятку – 3 раза.

Существует довольно много способов решения логических задач. Решению логических задач, в которых рассматриваются два или более конечных множеств, между которыми необходимо установить взаимно однозначное соответствие, часто помогает составление таблиц.

Пример 16. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас блондин, другой – брюнет, а третий – рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Определите цвет волос художника.

Решение. Ясно, что в решении будет рассматриваться только взаимное соответствие фамилий и цветов волос друзей, профессии в рассуждении не участвуют. Поэтому в задаче нужно ответить на вопрос, какого цвета волосы у Рыжова. Воспользуемся таблицей 3×3:

	Рыжий	Черный	Русый
Белов	+	–	–
Чернов	–	–	+
Рыжов	–	+	–

По условию задачи Белов не русый, Чернов не брюнет, а у Рыжова не рыжий цвет волос: это позволяет поставить знак «–» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию задачи Белов не может быть черноволосым, добавим еще один «минус» в таблицу. Ясно, что Белов может быть только рыжим, отразим этот результат в таблице. Отсюда получаем, что Чернов не может быть рыжим, цвет его волос – русый. Далее ясно, что Рыжов не может быть с русыми во-

лосами, он – брюнет. Поскольку Рыжов у нас является художником, художник – брюнет.

Решение задач, в которых фигурируют более двух множеств, требует составления нескольких таблиц, хотя идея решения задачи остается той же.

Пример 17. Четыре соседа Миша, Леня, Женя и Костя ходят в спортивные секции: бокса, тенниса, баскетбола и гимнастики (каждый из мальчишек занимается только одним видом спорта). Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждый только одним. Известно, что:

1) мальчик, который играет в баскетбол, говорит по-испански;
2) Леня не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет английским языком;
3) Миша не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет английским языком;
4) Женя знает французский язык, но не занимается гимнастикой.

Кто в какую секцию ходит и какой иностранный язык знает?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицами:

	Бокс	Теннис	Баскетбол	Гимнастика
Миша	–			–
Леня	–			–
Женя	+	–	–	–
Костя	–	–	–	+

	Английский	Французский	Немецкий	Испанский
Миша	–			
Леня	–			
Женя	–	+	–	–
Костя	+	–	–	–

Поскольку Леня не занимается гимнастикой, не ходит в секцию бокса и не владеет английским языком, поставим минусы в соответствующих клетках. Аналогично поступаем с Мишей: ставим минусы в первой таблице на пересечении строки «Миша» и столбцов «Гимнастика» и «Бокс»; во второй таблице ставим минусы на пересечении строки «Миша» и столбца «Английский». Так как Женя знает французский язык, но не занимается гимнастикой, во второй таблице на

пересечении строки «Женя» и столбца «Французский» ставим плюс и в первой таблице на пересечении строки «Женя» и столбца «Гимнастика» ставим минус.

Так как три мальчика не занимаются гимнастикой, ясно, что гимнастикой занимается Костя; тогда Женя занимается боксом. Так как Женя (третий из соседей) не знает английского, то английским владеет Костя.

Итак, Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским.

Обратимся к первой таблице. Ясно, что для Миши и Лени возможны два варианта:

1) Миша играет в теннис, а Леня играет в баскетбол;
2) Миша играет в баскетбол, а Леня играет в теннис.

Учитывая данные второй таблицы и первое условие задачи (мальчик, который играет в баскетбол, говорит по-испански), получаем, что:

1) Леня говорит по-испански, а Миша владеет немецким;
2) Миша говорит по-испански, а Леня владеет немецким.

Таким образом, задача имеет два варианта решения:

– Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским, Миша играет в теннис и говорит на немецком, Леня играет в баскетбол и говорит по-испански.

– Костя занимается гимнастикой и говорит на английском языке, Женя занимается боксом и владеет французским, Миша играет в баскетбол и говорит по-испански, Леня играет в теннис и говорит по-немецки.

Упражнения.

1. Сегодня Петина мама сказала: «Все чемпионы хорошо учатся». Петя говорит: «Я хорошо учусь, значит я чемпион». Правильно ли он рассуждает?
2. Пришел Иван-царевич в подземелье к Кощею Бессмертному Василису Прекрасную освобождать. В подземелье 3 темницы. В одной из них томится Василиса, в другой расположился Змей Горыныч, а третья темница пустая. На дверях есть надписи, но все они ложные. На первой темнице написано: «Здесь Василиса Прекрасная»; на второй темнице: «Темница №3 не пустая»; на третьей темнице написано: «Здесь Змей Горыныч». В какой же темнице Василиса?

3. В Парламенте одной из стран 150 депутатов. По крайней мере один из них честен. В каждой паре депутатов хотя бы один продажен. Сколько всего честных депутатов в Парламенте этой страны?
4. В коробке с карандашами есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Докажите, что есть два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине.
5. На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?
6. В финальном турнире играли пять шахматистов. А окончил все партии вничью. Б сыграл вничью с шахматистами, занявшими первое и последнее места. В проиграл Б, но зато сыграл вничью только одну партию. Г выиграл у Д и у занявшего четвертое место шахматиста. Д не выиграл ни одной партии. Кто сколько очков набрал и какое место занял? (Победитель получает одно очко, проигравший – нуль; при ничьей игроки получают по 0,5 очка.)
7. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?
8. Олег, Игорь и Аня учатся в шестом классе. Среди них есть лучший художник, лучший шахматист и лучший математик. Известно, что:
   а) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;
   б) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы.

   Кто в классе лучший художник, лучший шахматист и лучший математик?
9. Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды существуют три планеты: А, Б, В. Они живут на второй планете от звезды. Далее передача ухудшилась из-за помех, но было принято еще два сообщения, которые, как установили ученые, оказались ложными:
   а) А – не третья планета от звезды;
   б) Б – вторая планета.

   Какими планетами (по порядку) от звезды являются А, Б, В?

10. Три подруги вышли в белом, синем, зеленом платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что у Ани цвет платья и туфель совпадает. Наташа была в зеленых туфлях. Ни платье, ни туфли у Вали не были белыми. Определить цвет платья и туфель каждой подруги.
11. Четверо студентов Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос: «Кто какое место занял?» – они ответили так:
    Алексей: «Я не был ни первым, ни последним»;
    Борис: «Я не был последним»;
    Владимир: «Я был первым»;
    Григорий: «Я был последним».
    Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один – ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?
12. Студенты Иванов, Петров и Сидоров учатся на различных факультетах Северо-Кавказского федерального университета (физико-математическом, юридическом и историческом). Все они приехали из различных городов: Пятигорска, Ессентуков и Кисловодска; причем один из них играет в футбол, второй – в волейбол, третий – в баскетбол.
    Известно, что:
    а) Иванов не из Кисловодска, а Петров не из Ессентуков;
    б) студент, приехавший из Кисловодска, учится не на физмате;
    в) житель Ессентуков учится на историческом факультете и увлекается футболом;
    г) Сидоров учится на физико-математическом факультете;
    д) студент юридического факультета не любит волейбол.
    Из какого города приехал каждый из студентов, на каком факультете учится, какой из спортивных игр отдает предпочтение?

Ответы и примечания к упражнениям.

1. Нет.
2. Василиса не может быть в первой темнице, значит, она во второй или третьей темнице. Так как третья темница пустая, Василиса будет во второй темнице.
3. 1.
4. Доказательство можно провести методом «от противного».
5. Галя, Валя, Аня и Надя соответственно в зеленом, голубом, белом и розовом платьях.

6. Г – 1 место, 3 очка; Б – 2 место, 2,5 очка; А – 3 место, 2 очка; В – 4 место, 1,5 очка; Д – 5 место, 1 очко.
7. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.
8. Олег – лучший художник, Аня – лучший шахматист, Игорь – лучший математик.
9. Б, В, А – по порядку от звезды.
10. Поскольку Наташа в зеленых туфлях, а Валя не в белых, то Валя в синих туфлях. Значит, Аня в белых туфлях. Так как цвет платья и туфель у Ани совпадают, Аня в белом платье. У остальных девочек цвет платья и туфель не совпадают, поэтому Валя в зеленом платье, а Наташа – в синем. *Ответ*: Аня в белом платье и белых туфлях, Валя в зеленом платье и синих туфлях, Наташа в синем платье и зеленых туфлях.
11. Правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.
12. Иванов из Ессентуков, студент исторического факультета, играет в футбол;
    Петров из Кисловодска, студент юридического факультета, играет в баскетбол;
    Сидоров из Пятигорска, студент физико-математического факультета, играет в волейбол.

XII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Пожалуй, самыми интересными и сложными среди олимпиадных задач являются задачи по геометрии. Мы не будем разбирать сложные задачи, а ограничимся только отдельными подходами к решению геометрических задач. Даже их классификация представляет затруднения. Некоторые из задач можно назвать задачами геометрическими условно, ведь они сводятся к элементарным вычислениям. В таких задачах важнее всего идея решения.

Интересные геометрические головоломки встречаются еще на начальном этапе обучения геометрии. Среди них особое место занимают рисунки-головоломки.

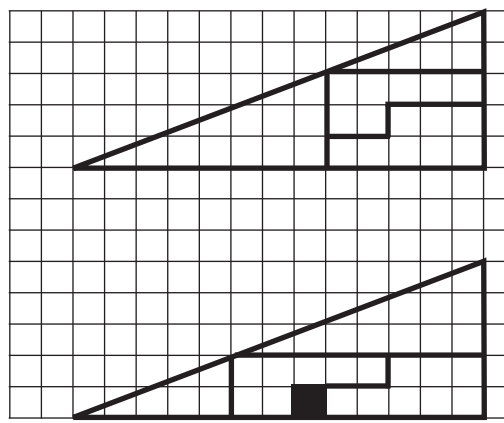


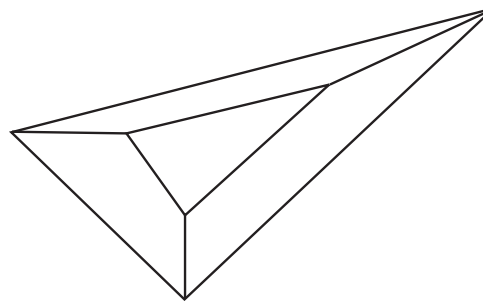
Рис. 1.

Глядя на рис. 1, зададим себе вопрос: «Может ли перестановка частей треугольника изменять занимаемую ими суммарную площадь?» Ответ на этот вопрос в состоянии дать любой внимательный ученик. Достаточно обратить внимание на то, что треугольники со сторонами 5 и 13, 3 и 8, 2 и 5 см. не являются подобными. Дальше можно обратить внимание на то, что «похожий» и «подобный» – не совсем одно и то же. В геометрии и графических способах решения вообще большую роль играют масштаб и толщина проводимых линий.

Задачи такого типа заставляют задуматься не только о математике. Они завораживают.

Зададимся, например, вопросом: сколько выпуклых многогранников могут попарно соприкасаться по двумерным границам? Ана-

логичный вопрос на плоскости имеет очевидное решение, изображенное на рисунке. Понятно, что многогранники на плоскости – это многоугольники.



Максимум – четыре многоугольника. Кажется невероятным, но таких многогранников в пространстве может быть *сколько угодно* (См. Босс В. Интуиция и математика. М.: Айрис-Пресс, 2003). Факт достаточно глубокий и красивый, однако это не такая легкая задача, чтобы ее можно было показывать без опасения отпугнуть начинающих. Вернее, упомянуть можно, но едва ли стоит останавливаться на решении, пока аудитория не достигла соответствующего уровня.

Пример 1. С помощью циркуля и линейки разделить угол в 19º на 19 равных частей.

Решение. Ясно, что задача сводится к построению угла в 1º, далее все просто. Заметим, что 19×19 = 361, то есть сумма девятнадцати углов в 19º есть окружность плюс 1º. Сложение углов при помощи циркуля и линейки является стандартной, хорошо решаемой задачей. Получив угол в 1º, далее отложим этот угол девятнадцать раз и получим угол в 19º. Задача решена.

Эта задача И.И. Александрова на построение встречается, например, в сборнике подготовительных задач XXXI Московской математической олимпиады. Ее можно встретить и во многих изданиях последних лет.

При решении задач с треугольниками школьники очень часто сбиваются на построение правильных или равнобедренных треугольников для того, чтобы получить решение задачи для частного случая. Такой подход не всегда себя оправдывает.

Примечание. И.Ф. Шарыгину принадлежит идея построения «произвольного» треугольника. Такой треугольник должен:

1) хорошо строиться;
2) не давать частных случаев решения задачи, например, особенностей в соотношениях между элементами треугольника (к слову, высота, проведенная из одной вершины, не может оказаться равной медиане, проведенной из другой вершины).

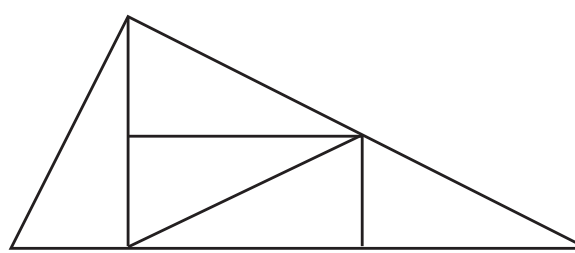
Таким треугольником является треугольник с углами в 45º, 60º и 75º.

Хорошо известна задача о делении произвольного треугольника на 4, 9, …, n^2 равных треугольников. Для того, чтобы разделить треугольник на 4 равные части, в нем просто нужно провести три средних линии.

Пример 2. Нарисовать треугольник, который можно разделить на 5 равных треугольников.

Решение. Очевидно, что треугольник можно разделить на 4 равные части. Далее к этому треугольнику требуется «приставить» его четвертую часть; при этом снова должен получиться треугольник. Это возможно только в том случае, когда треугольник является прямоугольным, ведь только тогда сумма двух прямых углов даст развернутый угол (отрезок, который является стороной треугольника, при этом будет суммой сторон большого треугольника и его «четвертушки»).

Покажем на рисунке решение задачи. Необходимо нарисовать прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза длиннее другого.



Приведем примеры задач, которые вообще не требуют расчетов. (В примере 2 мы складывали 4 и 1.)

Пример 3. Доказать, что никакая фигура не может иметь ровно два центра симметрии.

Решение. Доказательство основывается на том факте, что точка, симметричная одному центру симметрии относительно другого, также является центром симметрии.

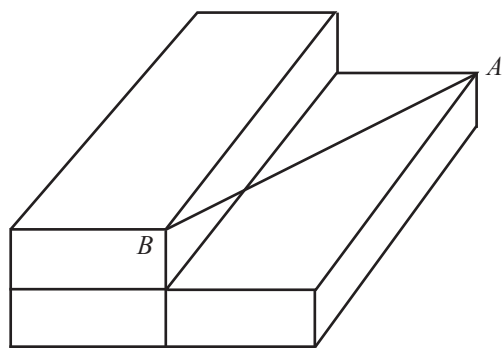
Пример 4. Разрезать произвольный треугольник на три части, из которых можно составить прямоугольник.

Решение. Для решения задачи необходимо разрезать треугольник по средней линии, а отрезанный треугольник еще и по высоте. Сложение получившихся частей в прямоугольник не составляет труда.

Следующая задача встречается у И.Ф. Шарыгина.

Пример 5. Имеется несколько кирпичей. Необходимо, не используя теорему Пифагора, при помощи линейки определить длину наибольшей диагонали кирпича.

Решение. Решение задачи представлено на рисунке. Необходимо сложить три кирпича и измерить расстояние между точками A и B. Это диагональ несуществующего кирпича.



Пример 6. Предположим, что длина спички равна единице. Составить из двенадцати спичек многоугольник, ограничивающий площадь, равную четырем единицам.

Решение. Одним из возможных решений является ромб со стороной 3 и высотой $\frac{4}{3}$.

Отметим, что основная масса задач по стереометрии сводится к задачам планиметрии: метод проекций, метод развертки и т.д.

Решим несколько задач, не требующих чертежей.

Пример 7. Найдите на декартовой плоскости точку, сумма квадратов расстояний от которой до точек $A_1(a_1; b_1)$, …, $A_n(a_n; b_n)$ $(n \geq 2)$ минимальна.

Решение. Если искомая точка имеет координаты x и y, то выражение, чью минимальность надо обеспечить, выглядит, если использовать теорему Пифагора, так:

$$f(x; y) = ((x - a_1)^2 + (y - b_1)^2) + ((x - a_2)^2 + (y - b_2)^2) + ... +$$
$$+ ((x - a_n)^2 + (y - b_n)^2) = (nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)) +$$
$$+ (ny^2 - 2y(b_1 + b_2 + ... + b_n) + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)).$$

Очевидно, что наименьшее значение функции $f(x;y)$ достигается в ситуации, когда наименьших значений достигают квадратичные функции. Напомним, что переменные x и y не зависят друг от друга:

$$f_1(x) = nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2);$$
$$f_2(x) = ny^2 - 2y(b_1 + b_2 + ... + b_n) + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Следовательно, наименьшее значение функцией $f(x; y)$ достигается в точке $\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}; \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\right)$.

Пример 8. Докажите, что при $n = 3$ найденная в предыдущей задаче точка будет точкой пересечения медиан треугольника с вершинами $A_1(a_1; b_1)$, $A_2(a_2; b_2)$ и $A_3(a_3; b_3)$ (если, разумеется, точки A_1, A_2 и A_3 не лежат на одной прямой).

Пример 9. Синусы углов треугольника рациональны. Докажите, что их косинусы также рациональны.

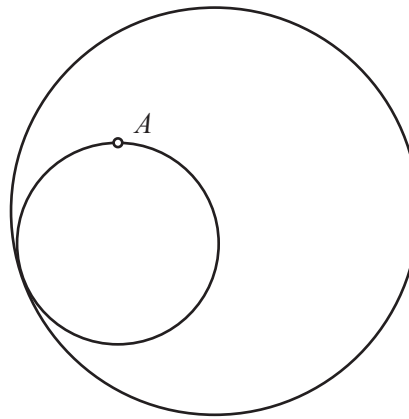
Решение. Пусть углы треугольника – α, β, γ. По теореме синусов треугольник со сторонами $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$, $c = \sin\gamma$ подобен исходному. Таким образом, существует треугольник с рациональными сторонами и углами α, β и γ. Для него из теоремы косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

следует рациональность $\cos\alpha$. Аналогично, рациональны $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

Примечание. Данная задача содержит единственную трудность – необходимость доказать, что стороны треугольника выражаются рациональными (необязательно такими, как указано в решении) числами; без этой оговорки решение не является полным, поскольку по условию задачи рациональность сторон не оговорена.

На одном из этапов возникает **задача типа теоремы Коперника**: *если окружность радиуса r катится внутри окружности радиуса* 2*r, то выделенная на первой окружности точка A движется по прямой.*



Это не самая яркая задача, но в ней рассматривается достаточно неожиданный факт. Об этом уже упоминалось в самом начале книги, проверка справедливости утверждения требует определенных математических навыков. И это для второго этапа подготовки «олимпиадника» очень важно.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Отдельного разговора требуют геометрические задачи с неравенствами. Неравенство треугольника – самое фундаментальное геометрическое неравенство, недаром его изучают в школе. Именно поэтому полезно выяснить у школьников, знают ли они его, решали ли задачи на его применение. Конечно, необходимо напомнить о том, что кратчайшим путем между двумя точками является отрезок прямой.

Итак, **неравенство треугольника**:

для произвольного треугольника ABC $\boldsymbol{AB < BC + AC}$.

Сформулируем необходимые для нас теоремы.

Теорема 1. *Для любых трех точек A, B и C на плоскости* $\boldsymbol{AC \geq |AB - BC|}$.

Доказательство этой теоремы не представляет сложности для читателей.

Примечание. Сформулировав теорему, дадим ее очевидное геометрическое истолкование: длина любой стороны треугольника не меньше модуля разности длин двух других сторон.

Теорема 2. *Длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.*

Примечание. Один из самых распространенных способов доказательства геометрических неравенств состоит в том, что применяется неравенство треугольника, возможно, с использованием некоторых дополнительных соображений.

Аналитическое выражение для неравенства треугольника и его обобщение.

Если для любых трех точек A, B и C справедливо соотношение

$$\rho(A;\ C) \le \rho(A;\ B) + \rho(B;\ C), \qquad (*)$$

где символом $\rho(M;\ N)$ обозначено расстояние от точки M до точки N, методом математической индукции легко обосновать для любых точек A, B_1, B_2, ..., B_n, C соотношение

$$\rho(A;\ C) \le \rho(A;\ B_1) + \rho(B_1;\ B_2) + \ldots + \rho(B_n;\ C). \qquad (**)$$

Если теперь под $\rho(M;\ N)$ подразумевать евклидово расстояние между точками $M(x_M, y_M, z_M)$ и $N(x_N, y_N, z_N)$, то неравенство (*) запишется для точек A, B и C, имеющих в пространстве координаты $A(a_1;a_2;a_3)$, $B(b_1;b_2;b_3)$ и $C(c_1;c_2;c_3)$ для расстояний между этими точками, в виде:

$$\sqrt{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+(a_3-c_3)^2} \le \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2} + \\ + \sqrt{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2+(b_3-c_3)^2}.$$

Во что при соответствующей символике превратится неравенство (**), читатель может выписать самостоятельно.

Примечание. Расстояние между точками можно измерять и не по Евклиду, а иначе, причем несколькими способами. Но самое замечательное то, что сохраняются привычные свойства расстояния,

в частности сохранится неравенство треугольника (*) и его обобщение (**).

Пусть, например, для произвольных точек на плоскости $M(x_M, y_M)$ и $N(x_N, y_N)$ положим:

$$\rho_1(M; N) = |x_M - x_N| + |y_M - y_N|; \rho_\infty(M; N) = \max\{|x_M - x_N| + |y_M - y_N|\};$$

и, наконец, $\rho_p(M; N) = (|x_M - x_N|^p + |y_M - y_N|^p)^{\frac{1}{p}}$, где p – любое фиксированное число, удовлетворяющее условию $p \geq 1$.

Задачи. Постройте на декартовой плоскости, считая, что точка O имеет координаты (0; 0), множество всех точек $M(x; y)$ таких, что

а) $\rho_1(M; O) = 1$; $\rho_1(M; O) \leq 1$;

б) $\rho_\infty(M; O) = 1$; $\rho_\infty(M; O) \leq 1$;

в) $\rho_3(M; O) = 1$; $\rho_3(M; O) \leq 1$.

Иначе говоря, выясните, чем будет единичная «окружность» и единичный «круг» в каждом из трех случаев, для каждого из способов измерьте расстояние между двумя точками.

Пример 10. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,7, длина стороны AB – 0,5. Известно, что длина BC – целое число. Какова эта длина?

Решение. По теореме 1 $3{,}7 \geq |0{,}5 - BC|$, однако BC – число натуральное, поэтому $3{,}7 \geq BC - 0{,}5$, откуда $BC \leq 4{,}2$. Далее ясно, что $BC = 4$. Подумайте, почему BC не может равняться трем.

Пример 11. Найти внутри выпуклого четырехугольника такую точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Решение. Поскольку четырехугольник выпуклый, его диагонали пересекаются в точке O. Обозначим вершины четырехугольника через A, B, C и D. Тогда сумма расстояний от O до вершин равна сумме длин диагоналей AC и BD. Но для любой другой точки P $PA + PC \geq AC$ по неравенству треугольника, и, аналогично, $PB + PD \geq BD$. Значит, сумма расстояний от P до вершин не меньше $AC + BD$, и очевидно, что эта сумма равна $AC + BD$, только если P совпадает с точкой O. Значит, точка O – искомая.

Пример 12. На плоскости дан квадрат $ABCD$ и точка O. Докажите, что расстояние от точки O до одной из вершин квадрата не превосходит суммы расстояний от O до трех других вершин квадрата.

Решение. Сложим неравенства треугольника $AC + OC > OA$ и $OB + OD > BD$. Так как $AC = BD$, то, сокращая, получаем требуемое неравенство $OC + OB + OD > OA$.

Пример 13. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\sqrt{(a + c)^2 + b^2} + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Решение. Рассмотрим в прямоугольной системе координат xOy точки $O(0; 0)$, $B(2a; 2b)$ и $A(a + c; b)$ и запишем для них неравенство треугольника $OB \leq OA + AB$.

Пример 14. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \leq 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Решение. Возведя неравенство треугольника $a + b > c > 0$ в квадрат и умножив его на $(a - b)^2$, получим

$(a - b)^2(a + b)^2 > c^2(a - b)^2$ или

$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2$.

Аналогично

$b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \geq b^2a^2 - 2bca^2 + c^2a^2$ и

$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 \geq a^2b^2 - 2acb^2 + c^2b^2$.

Сложив полученные неравенства и разделив на 2, получим требуемое.

Примечание. Как известно, для сторон треугольника верно неравенство $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc$. Умножив это неравенство на $a + b + c$ и раскрыв скобки, также получим требуемое неравенство, поскольку

$$-(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) =$$
$$= -((a+b)^2 - c^2)((a - b)^2 - c^2) = -((a + b)^2(a - b)^2 - (a + b)^2c^2 -$$
$$- (a - b)^2c^2 + c^4) = = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ.

Более «тонким» средством (нежели неравенство треугольника) для получения неравенств в геометрии служит теорема косинусов. Продемонстрируем ее применение в конкретных задачах.

Пример 15. Докажите, что для любого действительного числа x справедливо неравенство $\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geq 5$.

Решение. Рассмотрим два случая: а) $x \le 0$; б) $x > 0$.

а) Если $x \le 0$, то $9 + x^2 - 3x\sqrt{2} \ge 9$; $16 + x^2 - 4x\sqrt{2} \ge 16$, а значит

$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \ge \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7 > 5$.

б) Если $x > 0$, то обратимся к геометрической модели: рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$ и биссектрису CD его прямого угла C, причем $CD = x$ (см. рисунок 2).

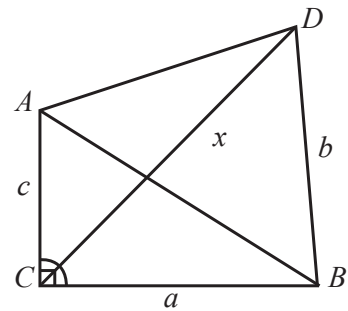


Рис. 2.

Используя теорему косинусов, получаем:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}};$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}}.$$

Остается воспользоваться неравенством треугольника $AD + DB > AB$ и учесть, что $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ (ΔABC – египетский).

Совершенно естественно, что приведенные выше рассуждения могут быть существенно обобщены и, в частности, легко можно обосновать утверждение следующей задачи.

Пример 16. Докажите, что для любого действительного числа x, любых положительных чисел a и b и любых положительных чисел α и β таких, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos\beta} \ge \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Указание. Воспользоваться теми же приемами, что были применены в примере 15 (см. рис. 2).

Пример 17. Докажите, что для любых положительных чисел x, a и b и углов $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ таких, что $\alpha + \beta \le \frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos\beta} \ge \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)}.$$

Пример 18. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\sqrt{a^2 - ac + c^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Решение. Неравенство легко получить, если конкретизировать требования примера 16, взяв $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), т.е. если полагать $\angle ACD = \angle DCB = \frac{\pi}{3}$. Обоснуем вторую часть решения задачи.

Так как неравенство данной задачи – это неравенство треугольника, записанное для точек A, D и B, то выполняется оно в варианте равенства тогда и только тогда, когда точка D лежит на отрезке AB, а это произойдет при условии равенства $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB}$. Обозначим, как и ранее, $CB = a$, $CD = c$, $CA = b$ и воспользуемся тем, что $\angle ACD = \angle DCB = \frac{\pi}{3}$. Тогда имеем равенство

$$\frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3} \text{ или } \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}ac\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

После сокращения на $\frac{\sqrt{3}}{4}abc$ получим $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, что и требовалось доказать.

Пример 19. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z справедливо неравенство

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \ge \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Решение. Рассмотрим произвольную точку O и выходящие из нее три луча, любая пара из которых образует угол в 120º. Отложим от точки O на этих лучах отрезки соответственно длиной x, y и z (на каждом луче – по одному отрезку) и получим при этом три точки A, B и C, так что $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Остается с помощью теоремы ко-

синусов выразить AB, BC и AC через x, y и z и подставить полученные выражения в следующее неравенство треугольника $AB \le BC + AC$. Подумайте, почему вариант равенства можно и нужно исключить.

Замечание. Естественно, обобщение неравенства предыдущей задачи возникнет, если менять углы между лучами OA, OB и OC.

Если a, b, c – стороны треугольника, важно помнить, что это положительные числа, связанные соотношениями $a + b >$ с; $a + c > b$; $b + c > a$. Не всегда это легко учесть, но есть простой способ иметь эти требования автоматически выполненными. Это метод подстановки, а именно переход к *положительным* величинам x, y и z, связанным с a, b и c соотношениями $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$. Причем очевидно, что для любых положительных чисел x, y и z числа $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$ являются сторонами некоторого треугольника. И наоборот, если a, b и c – стороны некоторого треугольника, то для них существует (и единственная) тройка чисел x, y и z, удовлетворяющих условиям $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$.

Доказательство этих двух утверждений можно легко провести с привлечением рис. 3, на котором изображены треугольник ABC и вписанная в него окружность, касающаяся его в точках A_1, B_1 и C_1.

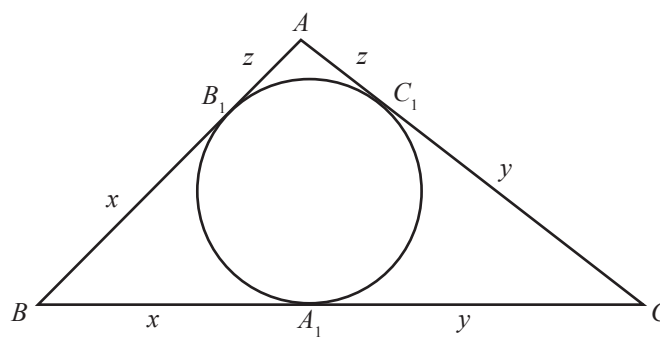


Рис. 3.

Продемонстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 20. Докажите, что если a, b и c – стороны произвольного треугольника, то для них выполняется соотношение

$$ab + ac + bc > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Решение. Сделаем подстановку $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$, где x, y и z – произвольные положительные числа. Получим новое нера-

венство, задача доказательства которого равносильна задаче доказательства исходного неравенства:

$$(x+y)(x+z)+(x+y)(y+z)+(x+z)(y+z)>\frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}.$$

Составим, упростим и оценим сверху разность (см. раздел XIV, неравенства):

$$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2-2((x+y)(x+z)+(x+y)(y+z)+(x+z)(y+z))=$$
$$=2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz-2x^2-2xz-2xy-2yz-2y^2-2xz-$$
$$-2xy-2yz-2xy-2xz-2yz-2z^2=-4xy-4xz-4yz<0.$$

Получим очевидное неравенство, что и гарантирует истинность исходного неравенства.

Пример 21. Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника справедливо соотношение $a+b\le c\sqrt{2}$, где a, b – катеты, а c – гипотенуза треугольника.

Решение. С использованием подстановки $a=x+y$; $b=x+z$; $c=y+z$ решение задачи возможно, только необходимо помнить, что $c>a$ и $c>b$, т.е. $z>x$ и $y>x$, но решение будет очень громоздким, в то же время, составив и преобразовав разность

$$(c\sqrt{2})^2-(a+b)^2=2c^2-a^2-b^2-2ab=2(a^2+b^2)-a^2-b^2-2ab=$$
$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$

немедленно можно сделать вывод, что $(c\sqrt{2})^2\ge(a+b)^2$, т.е. $c\sqrt{2}\ge a+b$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$, т.е. треугольник не только прямоугольный, но и равнобедренный. Иначе говоря, общий прием не всегда самый быстрый приводящий к цели.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Зачастую на рисунке, изображающем условие задачи, не видно треугольника, применение неравенства для которого дало бы решение.

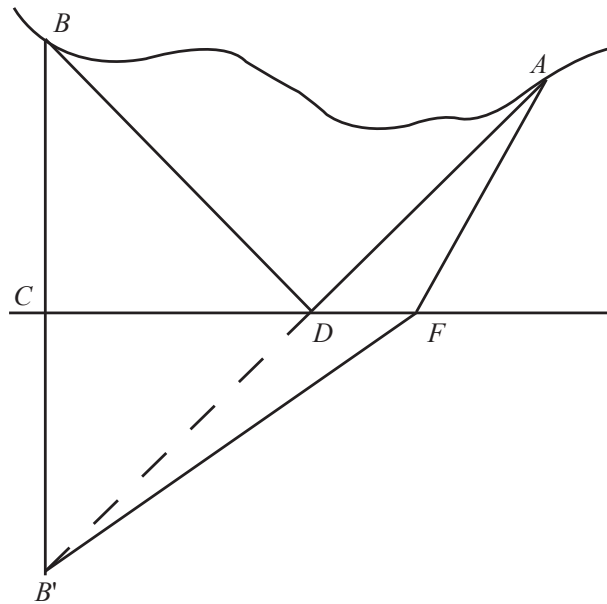
Следующая серия задач посвящена идее симметрии в совокупности с неравенством треугольника.

Пример 22. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему необходимо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, где у него собранные грибы заберет сын, приехавший на маши-

не. А далее зайти в лес в другой точке, в которой ожидает его жена. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

Примечание. Эта задача имеет много видоизменений: например, нужно найти точку, в которой ворона, сидящая на дереве, может подобрать рассыпанное на земле зерно и приземлиться на заборе, если по двору бегает кошка.

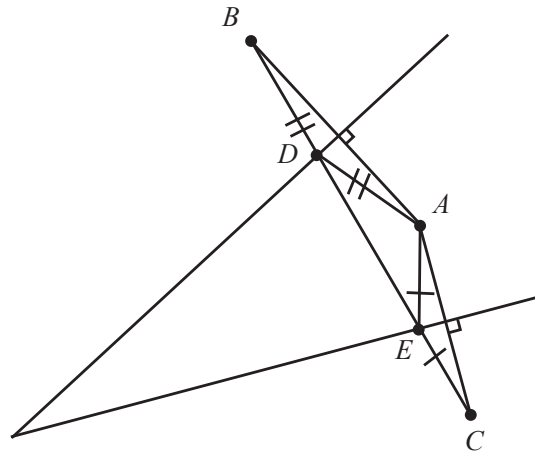
Решение. Покажем на рисунке решение этой задачи:



Пусть грибник выходит из леса в точке A, а должен зайти в лес в точке B. Для решения задачи симметрично прямой – шоссе отобразим точку B, получив точку B'. Далее, проведя прямую AB', получим точку D, которая и является искомой в задаче точкой. $BD = B'D$, $BC = B'C$, тогда ясно, что для любой другой точки F $AF + FB' > AD + DB'$. Расстояние $AD + BD$ является наименьшим для выхода на шоссе из леса и захода в лес в заданной точке (D).

Пример 23. Полуостров имеет форму острого угла, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного из берегов полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя при этом по самому короткому пути?

Решение. Решение задачи изображено на рисунке.

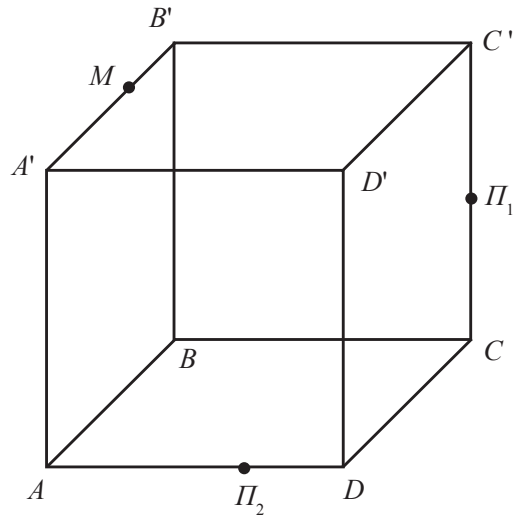


Ясно, что задача основана на симметричном отображении точки A относительно двух сторон угла.

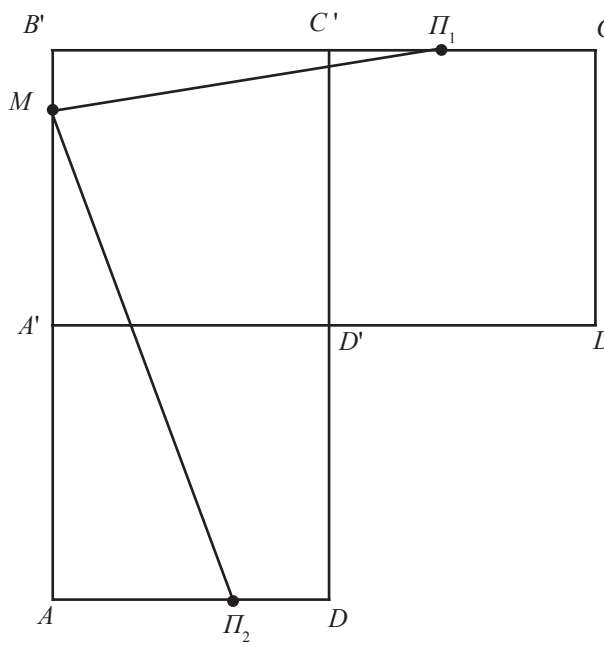
Примечание. Осевая симметрия не меняет расстояний. Общая идея при решении всех рассматриваемых задач: искомый путь преобразуется некоторым образом так, что его длина не изменяется, причем после этих преобразований решаемая задача превращается в такую: соединить две данные точки путем минимальной длины. Важное условие, которое необходимо проверить: этот преобразованный путь должен быть прямолинейным.

Отметим, что во многих задачах, в которых действие происходит в пространстве, подобный подход может быть применим, если решение задачи производится методом развертки (см. пример 24).

Пример 24. На внутренней поверхности стеклянного куба сидят сонная муха M и два паука $П_1$ и $П_2$. Пауки, которые могут перемещаться только по внутренним поверхностям граней, одновременно начинают бежать к мухе. Какой из пауков быстрее ее достигнет, если расстояния $СП_1 = \frac{1}{2}a$, $MB' = \frac{1}{4}a$; $DП_2 = \frac{1}{3}a$, где a – длина ребра куба?



Решение. Нарисуем необходимую нам для решения часть развертки куба.



Далее, помня о том, что отрезок всегда короче ломаной, соединяющей его концы, найдем расстояния $МП_1$ и $МП_2$:

$$МП_1 = \sqrt{(MB')^2 + (B'C' + C'П_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4}}a = \frac{\sqrt{13}}{4}a;$$

$$МП_2 = \sqrt{(АП_2)^2 + (AA' + A'M)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{49}{16}}a = \frac{\sqrt{505}}{12}a.$$

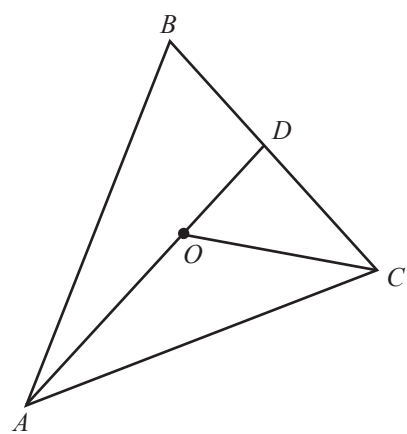
Далее остается сравнить $\frac{\sqrt{505}}{12}$ и $\frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13 \cdot 9}}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{117}}{12}$. Ясно, что при одинаковой скорости движения паук $П_1$ добежит до мухи M быстрее, чем паук $П_2$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ.

В некоторых случаях геометрическое неравенство требует для своего доказательства дополнительных геометрических построений. Эти задачи являются наиболее сложными, поскольку поиск дополнительного построения в них требует навыка. Постараемся развить такой навык, решая следующую серию задач.

Пример 25. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Доказать, что $AO + OC < AB + BC$.

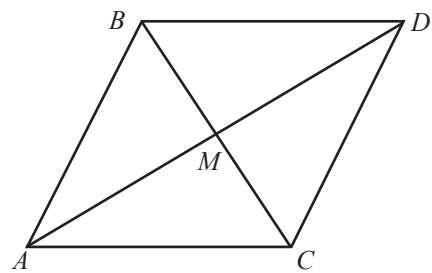
Доказательство.



Продолжим отрезок AO до пересечения со стороной треугольника D. Далее сложим неравенства треугольника $AB + BD > AO + OD$ и $OD + DC > OC$, получим $AB + BD + OD + DC > AO + OD + O C$ и, сократив на OD обе части неравенства, получим искомое $AO + OC < AB + BC$, поскольку $BD + DC = BC$.

Пример 26. Доказать, что длина медианы AM треугольника ABC не превосходит полусуммы длин сторон AB и AC. Доказать также, что сумма длин медиан треугольника не превосходит его периметра.

Доказательство. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$.

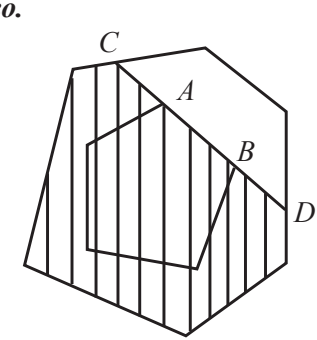


Тогда по неравенству треугольника $AB + BD > AD$, при этом $BD = AC$, а $AD = 2AM$. Поэтому $AB + AC > 2AM$, откуда получается необходимое неравенство.

Доказать второе предложение предлагается читателю.

Пример 27. Выпуклый многоугольник M' лежит внутри выпуклого многоугольника M. Доказать, что периметр M' не больше периметра M.

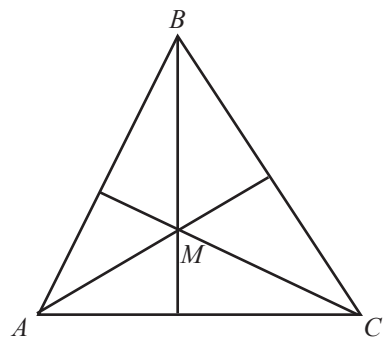
Доказательство.



Проведем прямую через сторону AB многоугольника M', которая пересекает контур многоугольника M в точках C и D. Тогда по неравенству треугольника очевидно, что периметр того куска многоугольника (из двух, на которые рассекла его прямая AB), который содержит M', не больше, чем периметр M.

Пример 28. Доказать, что периметр треугольника не превосходит суммы длин медиан, увеличенной в $\frac{4}{3}$ раза. (Для решения этой задачи необходимо знать, в каком отношении делятся медианы точкой их пересечения.)

Доказательство.



Пусть медианы пересекаются в точке М. Тогда, складывая неравенства $AM + BM > AB$, $BM + CM > BC$ и $CM + AM > AC$ и учитывая, что длины отрезков АМ, ВМ и СМ составляют $\frac{2}{3}$ длин медиан, получаем требуемое неравенство.

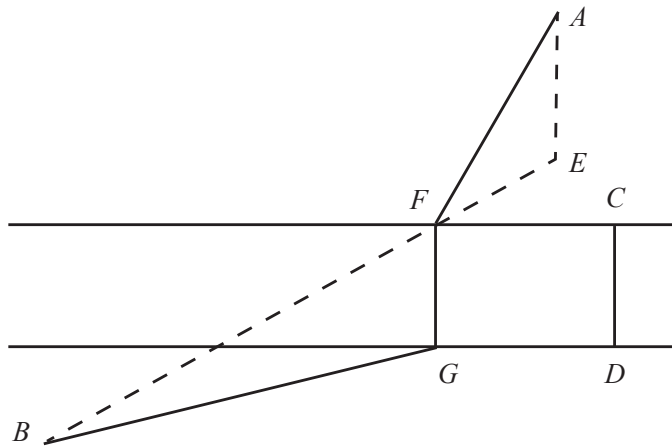
Рассмотрим задачу, решение которой имеет немного другую идею. В решении этой задачи фигурирует параллельный перенос (он также сохраняет расстояние).

Пример 29. Две деревни A и B разделены рекой. В каком месте нужно построить мост, чтобы путь от одной деревни до другой был наименьшим?

Решение. Решение задачи показано на рисунке.

Возьмем ширину реки CD, отложим от точки A отрезок AE, параллельный и равный CD, далее соединим точки B и E и получим

точку F. Доказательство того, что расстояние $AF + FG + GB$ будет минимальным расстоянием между деревнями A и B, остается читателям.

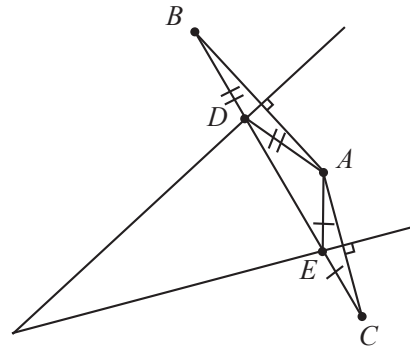


После решения задачи ясно, что FG – единственный вариант построения моста.

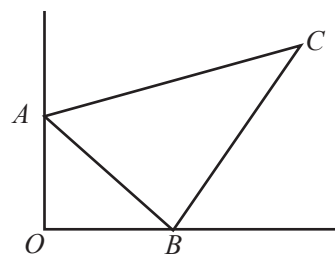
Упражнения.

1. От Кисловодска до Ставрополя 230 км, от Кисловодска до Минеральных Вод 55 км, от Минеральных Вод до Невинномысска 125 км, а от Невинномысска до Ставрополя 50 км. Каково расстояние от Ставрополя до города Минеральные Воды?
2. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.
3. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.
4. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Доказать, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.
5. Точку А, лежащую внутри острого угла, отразили симметрично относительно сторон угла. Полученные точки В и С соединили и точки пересечения отрезка ВС со сторонами угла DE (см. рис.)

   Доказать, что $\frac{BC}{2} > DE$.



Точка С лежит внутри данного прямого угла, а точки *A* и *B* лежат на его сторонах (см. рис.). Докажите, что периметр треугольника *ABC* не меньше удвоенного расстояния *OC*, где *O* – вершина данного угла.



7. Муха сидит в одной из вершин деревянного куба. Как ей переползти в противоположную вершину куба, двигаясь по самому короткому пути?
8. Муха сидит на внутренней поверхности круглого стакана. Ей надо перебраться в другую точку, лежащую на внутренней поверхности стакана. Найдите кратчайший путь мухи, пренебрегая толщиной стенок стакана.
9. Доказать, что сумма расстояний от точки *O* до вершин треугольника *ABC* (точка лежит внутри треугольника) меньше его периметра. А если точка лежит вне треугольника?
10. Решите пример 12, если полуостров имеет форму тупого угла.
11. Треугольник *A'B'C'* лежит внутри треугольника *ABC*. Доказать, что периметр *A'B'C'* не больше периметра *ABC*.
12. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

Ответы и комментарии.

1. Сумма расстояний от Кисловодска до Минеральных Вод, от Минеральных Вод до Невинномысска и от Невинномысска до Ставрополя равна расстоянию от Ставрополя до Кисловодска. Делаем вывод, что все города находятся на одной трассе (прямой).
2. Пусть диагонали пересекаются в точке O. Требуемые неравенства легко выводятся из неравенств треугольника для треугольников OAB, OBC, OCD, ODA и для треугольников ABC, BCD, CDA и DAB.
3. Решение аналогично решению примера 10.
4. Продолжите отрезок, соединяющий эти точки, в обе стороны до пересечения с контуром треугольника.
5. Воспользуйтесь тем, что $AD = BD$, $AE = EC$ и неравенством $AD + AE > DE$.
6. Надо отобразить точку C симметрично относительно прямых OA и OB, получив точки C' и C''. Тогда периметр ABC можно заменить на сумму длин отрезков $C'A$, AB, BC'', которая по неравенству треугольника не меньше длины отрезка $C''C'$, равной $2|OC|$.
7. См. решение примера 13.
8. Нарисуйте полную развертку стакана.
9. См. решение примера 14.
10. Лесник должен идти к вершине тупого угла, а потом домой.
11. См. решение примера 16.
12. Рассмотрите самую длинную диагональ пятиугольника XY и две пересекающиеся диагонали, концы которых – это точки X и Y соответственно.

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ. ЧЕТЫРЕ «СРЕДНИЕ» ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ.

В разделе XIV подробно рассматриваются неравенства и средние значения. Остановимся на геометрических подходах к неравенствам.

Для среднего гармонического, геометрического, арифметического и квадратического двух положительных чисел a и b найдены интересные геометрические интерпретации, иллюстрирующие и даже доказывающие известные соотношения между этими средними:

$$\min\{a, b\} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max\{a, b\}. \qquad (*)$$

Рассмотрим некоторые из этих интерпретаций.

1. Пусть заданы два произвольных положительных числа a и b (для определенности договоримся считать, что $a < b$). Рассмотрим равнобочную трапецию $ABCD$ с основаниями a и b ($AB = b$, $CD = a$), описанную около некоторой окружности (то, что такая трапеция существует, докажите самостоятельно).

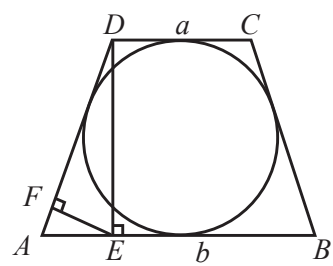


Рис. 4.

Тогда, если провести высоту трапеции DE, а потом построить ее проекцию DF на боковую сторону AD (рис. 4), то получим очевидное соотношение $DF < DE < DA$ (катет прямоугольного треугольника всегда меньше его гипотенузы). Однако $DA = \frac{a+b}{2}$ (вспомните о свойстве сторон четырехугольника, описанного около окружности);

$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2},$$

и, наконец, из свойства проекции катета DE на гипотенузу DA прямоугольного треугольника ADE получаем, что

$$DF = \frac{DE^2}{AD} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Таким образом, двойное неравенство $DF < DE < DA$ превращается в соотношение

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Заодно (повторно) получено любопытное тождество $DE = \sqrt{DF \cdot DA}$.

2. Пусть a и b – два произвольных несовпадающих положительных числа и пусть для определенности $a < b$. Осуществим следующие построения: отложим на произвольной прямой от некоторой точки C по одну сторону от нее отрезок $CA = a$, а по другую сторону отрезок $CB = b$ и построим на AB как на диаметре полуокружность с центром O. Очевидно, что $AO = OB = \frac{a+b}{2}$.

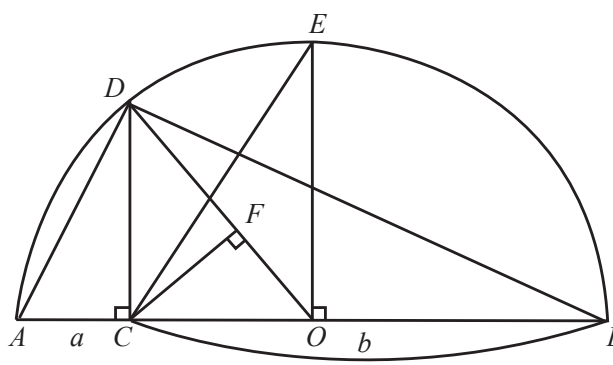


Рис. 5.

Проведем через точки C и O прямые, перпендикулярные AB, с точками пересечения с дугой полуокружности D и E. Далее рассмотрим отрезки DO и CF, где CF – перпендикуляр, опущенный из точки C на отрезок DO (рис. 5).

Тогда очевидно, что $DF < DC < DO < CE$. При этом $DC = \sqrt{ab}$ (свойство высоты прямоугольного треугольника ADB, опущенной из вершины прямого угла):

$$OD = OE = AO = OB = \frac{a+b}{2};\ CO = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2};$$

$$CE = \sqrt{CO^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

DF найдем из прямоугольного треугольника CDO:

$$DF = \frac{DC^2}{DO} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Таким образом, неравенства $DF < DC < DO < CE$ превратились в соотношения $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Для среднего гармонического, геометрического, арифметического и квадратического двух положительных чисел существует еще одна интересная геометрическая интерпретация. Рассмотрим следующую задачу.

Пример 30. Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями $AB = a$ и $CD = b$, и пусть O – точка пересечения её диагоналей. Докажите, что тогда:

а) среднее арифметическое чисел a и b, т.е. $\frac{a+b}{2}$, равно длине средней линии трапеции $ABCD$;

б) среднее геометрическое этих чисел, т.е. $\sqrt{ab}$, равно длине отрезка с концами на боковых сторонах этой трапеции, параллельного её основаниям и разбивающего эту трапецию на две подобные трапеции;

в) среднее гармоническое этих чисел, т.е. $\frac{2ab}{a+b}$, равно длине отрезка с концами на боковых сторонах этой трапеции, параллельного её основаниям и проходящего через точку O;

г) среднее квадратическое этих чисел, т.е. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, равно длине отрезка с концами на боковых сторонах этой трапеции, параллельного её основаниям и разбивающего эту трапецию на две равновеликие (т.е. одинаковой площади) трапеции.

Решение. Доказательство теорем о «средних» линиях трапеции, причём каждая из них является средней в своём роде, предлагается провести самостоятельно. Геометрические иллюстрации найдены для так называемых взвешенных средних (гармонического, геометрического, арифметического и квадратического). Подробнее, как уже отмечалось, эти величины разбираются в главе XIV.

XIII. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

В школьной программе по математике большое внимание уделяется изучению свойств квадратичной функции. Поэтому регулярно в задания олимпиад различного уровня включаются задачи на данную тему. С одной стороны, доступность формулировок и простота задач о квадратных трехчленах позволяет располагать их на первых, наиболее легких для решения, позициях варианта. Нередко такие задачи допускают несколько принципиально различных способов решения. С другой стороны, они могут быть достаточно сложными, основывающимися на красивом «олимпиадном» решении.

Как правило, необходимым шагом решения таких задач является исследование дискриминанта квадратного трехчлена, применение теоремы Виета, использование свойств графика квадратичной функции. В то же время решение может дополнительно требовать привлечения идей из других разделов математики, например, теории чисел или геометрии.

Выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом. Он имеет два корня при $D \geq 0$ (они равны при $D = 0$) и не имеет корней при $D < 0$.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой при $a > 0$ направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Корни трехчлена дают точки пересечения графика с осью абсцисс при $x = 0$, c – точка пересечения с осью ординат. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ легко находится как корень уравнения $y'(x) = 0$. По внешнему виду нарисованной параболы всегда можно определить знаки коэффициентов a, b и c. Подобные задачи распространены и решаются в обычном школьном курсе.

В разделе VIII разобраны решения уравнений в целых числах. Рассмотрим несколько задач с многочленами, в которых фигурируют целые числа.

Задача 1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, у которого $p + q = 198$, являются целыми числами. Найдите эти корни.

Решение. Следуя известной схеме, имеем

$$\begin{cases} p + q = 198; \\ x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases}$$

$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 198$; $(x_1 - 1)x_2 = 198 + x_1$;

$$x_2 = \frac{198 + x_1}{x_1 - 1} = 1 + \frac{199}{x_1 - 1}.$$

Поскольку 199 – простое число, $x_1 - 1 = \pm 1$; $x_1 - 1 = \pm 199$. При $x_1 = 2$ $x_2 = 200$; при $x_1 = 0$ $x_2 = -198$.

Ответ: (2; 200); (0; –198).

Задача 2. Из трехчлена $ax^2 + bx + c$ получили три квадратных трехчлена: один – прибавлением 1 к коэффициенту a, другой – прибавлением 1 к коэффициенту b, третий – прибавлением 1 к коэффициенту c. Оказалось, что любые два из полученных трехчленов имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов исходного трехчлена – целое число.

Доказательство. По условию уравнения $ax^2 + bx + (c + 1) = 0$ и $ax^2 + (bx + 1) + c = 0$ имеют общий корень. Вычитая почленно левые и правые части уравнений, получим $1 - x = 0$; $x = 1$ – общий корень уравнений. Но тогда $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + (c + 1) = 0$, то есть сумма коэффициентов $a + b + c = -1$ – целое число.

Замечание. Если $a + b + c = -1$, то $x = 1$ – общий корень всех трех уравнений.

В ряде заданий решение определяется подбором значений коэффициентов, что легко приводит к ответу. В задачи подобного типа легко вводятся, например, числа годов, в которые проходят олимпиады.

Задача 3. Рассматриваются квадратичные функции вида $y(x) = x^2 + px + q$, у которых $p + \frac{1}{2}q = 2011$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

Доказательство. Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 2$. Тогда $y = x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2p + q = 4 + 2\left(p + \frac{q}{2}\right) = 4026$,
то есть графики всех трехчленов проходят через точку (2; 4026).

Задача 4. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b и c – целые числа, c – нечетное число) имеет целые корни. Может ли $P(2011)$ быть нечетным числом?

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $P(x)$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, т.е. $x_1 \cdot x_2 \cdot a = c$. По условию c – число нечетное. Числа x_1, x_2,

a – нечетные. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, т.е. $b = -a\cdot(x_1 + x_2)$, значит, b – четное число. Тогда $P(2011) = a\cdot 2011^2 + b\cdot 2011 + c$ есть сумма двух нечетных и одного четного числа, т.е. число четное (см. раздел VI «Четность»).

Ответ: не может.

Задача 5. Найдите сумму корней всех квадратных трехчленов вида $y = x^2 + px - 2011$, где p принимает все целые значения от –100 до 100.

Решение. Так как $D = p^2 + 4\cdot 2011 > 0$ для любого p, то все трехчлены имеют действительные корни. Заметим, что по теореме Виета сумма корней всех написанных трехчленов

$100 + 99 + 98 + \ldots + (-99) + (-100) = 0.$

Ответ: 0.

Задача 6. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Какой вид имеет уравнение, имеющее корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$?

Решение. Школьное решение будет представлять собой совокупность двух систем уравнений (теоремы Виета для двух уравнений). «Олимпиадное» решение основывается на двух простых соображениях: задача имеет решение при $a \neq 0$ (при этом уравнение становится линейным) и при $c \neq 0$ (среди корней исходного уравнения не может быть нуля).

Разделим исходное уравнение на $x^2 \neq 0$, тогда $a + b\frac{1}{x} + c\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ или $c\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\frac{1}{x} + a = 0$. Ответ очевиден.

Ответ: $cx^2 + bx + a = 0$.

Задача 7. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?

Решение. Поскольку трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни, $b^2 \geq 4ac$, откуда $b^6 \geq 64a^3c^3$. Но если $ac \geq 0$, то $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$, а если $ac < 0$, то $b^6 \geq 0 > 4a^3c^3$. В обоих случаях $b^6 \geq 64a^3c^3$, то есть дискриминант трехчлена $a^3x^2 + b^3x + c^3$ неотрицателен.

Ответ: верно.

Задача 8. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b и c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ и $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

Доказательство. Пусть ни одно из уравнений не имеет корней. Тогда $b^2 < ac$; $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$. Левые части в этих неравенствах неотрицательны, поэтому неотрицательны и их правые части. Перемножив неравенства, получим противоречие: $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$.

Примечание. К противоречию можно прийти по-другому. Сложив неравенства $b^2 < ac$; $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$, получаем $a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + bc$; $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0$.

Задача 9. На доске записан трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Вместо трехчлена $p(x)$ записывают трехчлен $\dfrac{p(x+1) + p(x-1)}{2}$, а исходный трехчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трехчлен, не имеющий корней.

Решение. $\dfrac{p(x+1) + p(x-1)}{2} = ax^2 + bx + c + a$. После n стираний возникает трехчлен $ax^2 + bx + c + na$. Его дискриминант $D = b^2 - 4ac - 4na^2$ при $n > \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ будет отрицательным, трехчлен не будет иметь корней.

Задача 10. Про квадратные трехчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а $f_1 - f_2$ – не имеет. Докажите, что $f_1 + f_2$ имеет корни.

Доказательство. Предположим противное: трехчлены $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Возможны два варианта: f_+ и f_- одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни. Противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни. Противоречие.

Задача 11. Найдите все такие простые p и q, что уравнение $px^2 + pqx + q = 0$ имеет целые корни.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $px^2 + pqx + q = 0$. Тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{q}{p}$, $x_1 + x_2 = -q$. Отношение $\dfrac{q}{p}$ простых чисел – целое число, значит, $p = q$ и $x_1 \cdot x_2 = 1$, откуда $x_1 = x_2 = -1$ и , $p = q = 2$.

Ответ: $p = q = 2$.

Задача 12. Найдите все пары (a; b)действительных чисел таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют по крайней мере один корень.

Решение. Предположим, что $a \neq b$ и x_0 – общий корень уравнений. Подставим x_0 в оба уравнения и, вычтя второе уравнение из первого, получим

$(a - b)x_0 + b^2 - a^2 = 0$, откуда $x_0 = a + b$. Следовательно,

$$(a+b)^2+a(a+b)+b^2=0;\ 2a^2 + 3ab + 2b^2 = 2\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0,$$

откуда $a = b = 0$, – противоречие.

Пусть теперь $a = b$. Тогда оба уравнения имеют вид $x^2 + ax + a = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = -3a^2 \leq 0$, т.е. единственная возможность $a = b = 0$. Очевидно, что эта пара чисел удовлетворяет условию.

Ответ: (0; 0).

Перед разбором задач, в которых решение сводится к анализу графиков, сформулируем некоторые полезные утверждения.

Остановимся подробнее на расположении корней квадратного трехчлена, для чего сформулируем несколько утверждений и поясним их на конкретных примерах.

Утверждение 1. *Для того, чтобы квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имел два корня, один из которых меньше α, а другой больше α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a \cdot f(\alpha) < 0$.*

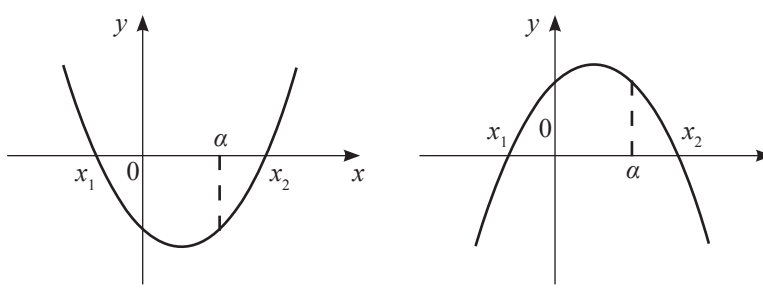


Рис. 1.

$a > 0, f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$ $\qquad$ $a < 0, f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$

Задача 13. Найти все значения параметра a, при которых один корень уравнения $x^2 - (3a + 2)x + 2a - 1 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

Решение. Согласно утверждению 1, решаем неравенство $f(1) < 0$:
$1 - (3a + 2) + 2a - 1 < 0$, $-a < 2$, $a > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

Утверждение 2. *Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше α, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} D \geq 0; \\ a \cdot f(\alpha) > 0; \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$$

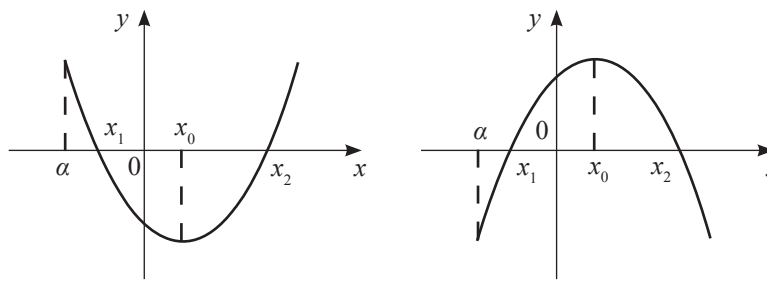


Рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при $a > 0$, $f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, очевидно, что при $D = 0$ вершина параболы находится в точке $(x_0; 0)$.

Аналогично при $a<0$, $f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$.

Задача 14. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3.

Решение. Условие задачи выполняется при всех значениях параметра, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 9a^2 - 2 + 2a - 9a^2 \geq 0; \\ 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0; \\ 3a > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1; \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a > 1; \\ 9(a - 1)\left(a - \dfrac{11}{9}\right) > 0; \end{cases} \text{ откуда } a > \frac{11}{9}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{11}{9}; +\infty\right)$.

Утверждение 3. *Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были меньше α, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} D \geq 0; \\ a \cdot f(\alpha) > 0; \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$$

Наглядной иллюстрацией выполнения этих условий служит рис. 3.

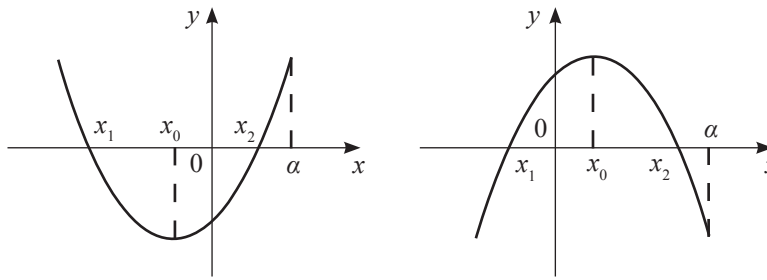


Рис. 3.

При $a > 0$, $f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, $x_0 < \alpha$, $D \geq 0$; при $a < 0$, $f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, $x_0 < \alpha$ $D \geq 0$.

Задача 15. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$ (рис. 4). Найдите a.

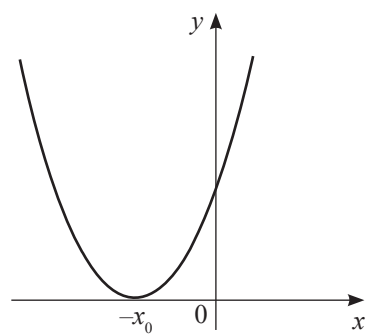


Рис. 4.

Решение. График касается оси Ox, поэтому $y = (x + x_0)^2$, $y = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$, т.е. $a = 2x_0$ и $a = x_0^2$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из рисунка видно, что $a \neq 0$.

Ответ: $a = 4$.

Задача 16. На рис. 5 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$?

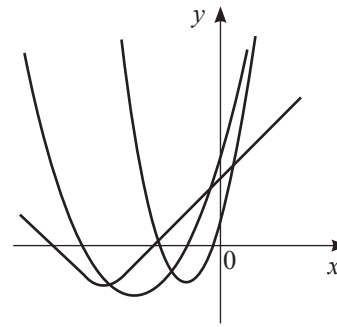


Рис. 5.

Решение. *Способ 1.* Предположим, что могут. Из рисунка видно, что все трехчлены имеют по два корня, следовательно, $b^2 > 4ac$; $c^2 > 4ab$ и $a^2 > 4bc$, причем $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Перемножив полученные неравенства, придем к противоречию: $a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$.

Способ 2. Предположим, что могут. Заметим, что значения данных трехчленов в точке $x = 1$ совпадают (они равны $a + b + c$). Но из рисунка видно, что параболы попарно пересекаются в шести различных точках. Пришли к противоречию.

Ответ: не могут.

Задача 17. В параболу $y = x^2$ вписан прямоугольный треугольник (все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox. Докажите, что высота треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 1.

Доказательство. Пусть $A(-x_1; x_1^2)$, $B(x_1; x_1^2)$, $C(x_2; x_2^2)$ – вершины треугольника (рис. 6).

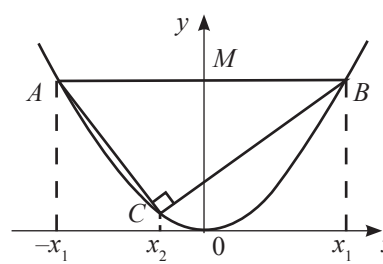


Рис. 6.

$\angle ACB = 90^\circ$, следовательно, точка C принадлежит окружности с диаметром AB. Ее уравнение $x^2 + (y - x_1^2)^2 = x_1^2$, поэтому $x_2^2 - x_1^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = 0$. Разделив на $x_2^2 - x_1^2 \neq 0$, получим $x_1^2 - x_2^2 = 1$, то есть $y_A - y_C = 1$.

Задача 18. Параболы вида $y = -x^2 + bx + c$ проходят через одну точку. Докажите, что вершины всех таких парабол лежат на одной параболе.

Доказательство. *Способ 1.* Пусть параболы проходят через точку $O(x_0; y_0)$. Тогда $y_0 = -x_0^2 + bx_0 + c$, откуда $c = y_0 + x_0^2 - bx_0$. Вершина каждой из данных парабол имеет координаты:

$$x_в = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2};\ y_в = -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + c = \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2}{4} + y_0 + x_0^2 - bx_0.$$

Значит, $y_в = x_в^2 - 2x_0x_в + y_0 + x_0^2$, следовательно, вершины парабол лежат на параболе $y = x^2 - 2x_0x + (y_0 + x_0^2)$.

Замечание. Вычисления упростятся, если перенести начало координат в точку $(x_0; y_0)$. Вид данных парабол при таком параллельном переносе не изменится.

Способ 2. Построим параболу $П_0$ вида $y = x^2 + Ax + B$ с вершиной в точке O. Пусть V – вершина одной из парабол $П$. Тогда при симметрии относительно точки M – середины отрезка OV – парабола $П$ переходит в параболу $П_0$ (парабола однозначно определяется вершиной и коэффициентом при x^2). Поэтому точка O, являющаяся одновременно точкой, принадлежащей параболе $П$, и вершиной параболы $П_0$, перейдет в точку, принадлежащую параболе $П_0$, и в вершину параболы $П$. Значит, вершина V лежит на параболе $П_0$.

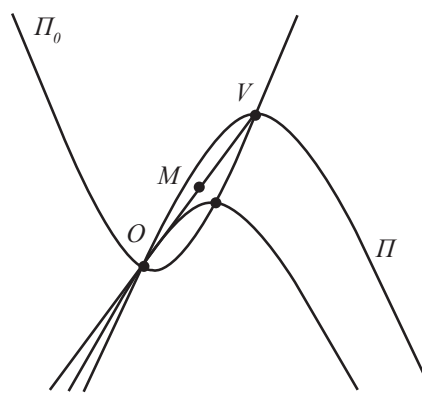


Рис. 7.

Задача 19. Произведение производных двух квадратных трехчленов при всех значениях переменной больше суммы этих трехчленов. Докажите, что хотя бы один из трехчленов будет принимать и отрицательные значения.

Доказательство. Если x_0 – абсцисса вершины параболы $y = f(x)$, то $f'(x)$ – линейная функция, обращающаяся в нуль при $x = x_0$. Значит, в точке $x = x_0$, где x_0 – абсцисса вершины параболы $y = f_1$, сумма данных трехчленов отрицательна (по условию). Отсюда следует, что в точке $x = x_0$ значение по крайней мере одного из трехчленов отрицательно.

Упражнения.

1. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ – составное.
2. Докажите, что уравнение $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ при любых a и b имеет решение.
3. При каких значениях m корни уравнения $(m + 1)x^2 + 2x - 3m - 1 = 0$ меньше 1?
4. На доске написали трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Каждую минуту на доску дописывают квадратный трехчлен, причем у каждого следующего трехчлена все три коэффициента на единицу больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится трехчлен, не имеющий корней.
5. Произведение четырех чисел – корней уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где b и c – положительные числа, равно единице. Найдите b и c.
6. Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.
7. Все коэффициенты квадратного трехчлена – целые нечетные числа. Может ли он иметь два целых корня?
8. Найдите количество квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$, где a и b натуральные числа, $ab = 2^{2011}$, а корни этих трехчленов – действительные числа.

Решения и комментарии.

1. ***Доказательство.*** Пусть x_1 и x_2 – корни данного трехчлена. По теореме Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1; –1 или 0, то есть число $a + b + 1$ – составное.

2. ***Доказательство.*** Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то данное уравнение – квадратное с дискриминантом $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2(a - b)^2 \geq 0$. Если $a^2 - b^2 = 0$, то уравнение имеет корень $x = 0$.

3. ***Решение.*** Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 + (m + 1)(3m + 1) \geq 0; \\ (m + 1)\cdot f(1) > 0; \\ -\dfrac{1}{m + 1} < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3m^2 + 4m + 2 \geq 0; \\ (m + 1)(2 - 2m) > 0; \\ \dfrac{m + 2}{m + 1} > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы не представляет труда, получаем, что $m \in (-1; 1)$. Заметим, что в задаче не оговаривается число корней уравнения, поэтому, рассматривая случай, когда $m + 1 = 0$, $m = -1$, получаем $x = -1 < 1$.

Ответ: $[-1; 1)$.

4. ***Доказательство.*** Пусть сначала на доске был написан трехчлен $ax^2 + bx + c$. Тогда через n минут будет выписан трехчлен $(a + n)x^2 + (b + n)x + (c + n)$. Его дискриминант $D = (b + n)^2 - 4(a + n)(c + n) = -3n^2 + (2b - 4a - 4c)n + (b^2 - 4ac)$ является квадратным трехчленом (относительно переменной n) с отрицательным старшим коэффициентом. Значит, при некотором натуральном n дискриминант будет отрицательным. Поэтому на доске появится трехчлен, не имеющий корней.

5. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = c \cdot b$, следовательно $bc = 1$. Но $b^2 - c \geq 0$ и $c^2 - b \geq 0$. Значит, $b^2 \geq \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{b^2} \geq b$, т.е. $b \geq 1$ и $\frac{1}{b} \geq 0$, откуда $b = 1$. Следовательно, $c = 1$.

Ответ: $b = c = 1$.

6. ***Доказательство.*** В силу теоремы Виета $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c}{a}$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$. Требуется доказать, что $b^2 = a^2 + 2ac$. Так как $a \neq 0$, разделим обе части этого равенства на a^2. Докажем равенство

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2\cdot\frac{c}{a}.$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\cdot\frac{c}{a}.$$

7. ***Решение.*** Предположим, что нашелся такой квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, что a, b и c – нечетные числа, а x_1 и x_2 – его целые корни. Тогда произведение $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ – нечетное число, откуда x_1 и x_2 – нечетные числа. Их сумма – число четное, однако $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ – нечетное число. Противоречие.

8. Заметим, что a и b будут степенями двойки с целыми неотрицательными показателями: $a = 2^k$, $b = 2^{2011-k}$. Тогда дискриминант $D = a^2 - 4b = 2^{2k} - 4 \cdot 2^{2011-k} = 2^{2k} - 2^{2013-k} \geq 0$. Отсюда $2^{2k} \geq 2^{2013-k}$; $2k \geq 2013 - k$; $3k \geq 2013$; $k \geq \frac{2013}{3}$; $k \geq 671$. Но $k \leq 2011$, поэтому k может принимать $2011 - 670 = 1341$ различное значение. Каждому k соответствует ровно один искомый трехчлен.
Ответ: 1341.

XIV. НЕРАВЕНСТВА НА ОЛИМПИАДАХ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства достаточно часто встречаются на олимпиадах. Хорошо известны простые задачи, которые могут быть предложены даже начинающим. Невнимательность может порождать парадоксальные результаты. Приведем пример получения ошибочных результатов при решении задач с неравенствами.

Пример 1. Медики провели эксперимент по оценке влияния таблеток «фикс» на успеваемость по математике. Как всегда при этом делается, контрольной группе давали плацебо (пустышку). Гипотетические данные по городам Козловск и Мяукин приведены в таблицах.

Козловск	фикс	плацебо
помогло	10	1
безрезультатно	80	9

$$\frac{10}{10+80} > \frac{1}{1+9}.$$

Мяукин	фикс	плацебо
помогло	10	89
безрезультатно	0	1

$$\frac{10}{0+10} > \frac{89}{1+89}.$$

Объединение результатов рождает химеру. В Козловске и Мяукине «фикс» эффективнее плацебо, в целом – наоборот.

Козловск + Мяукин	фикс	плацебо
помогло	20	90
безрезультатно	80	10

$$\frac{20}{20+80} > \frac{90}{10+9}.$$

На абстрактном уровне речь идет о следующем. Из неравенств

$$\frac{x_1}{x_1+y_1} > \frac{a_1}{a_1+c_1} \text{ и } \frac{x_2}{x_2+y_2} > \frac{a_2}{a_2+c_2}$$

иногда делается поспешный вывод о справедливости неравенства

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2} > \frac{a_1 + a_2}{a_1 + c_1 + a_2 + c_2},$$

к чему нет никаких предпосылок.

Этот шуточный пример говорит о необходимости серьезного отношения к неравенствам и задачам с ними.

Свойства линейной и квадратичной функций – источник простейших неравенств.

а) Неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$, где a, b, c – фиксированные действительные числа, $a > 0$, выполняется при всех действительных x тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac \leq 0$.

б) Неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ (при $a > 0$) имеет решения тогда и только тогда, когда трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет 2 различных корня, т.е. при $D > 0$.

в) Наименьшее значение функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $x \in R$, достигает при $x = -\frac{b}{2a}$, а именно, $f_{\min} = -\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

Покажем на простейших примерах, как эти свойства работают. Но начнем с примера применения простейших свойств линейной функции.

Пример 2. Докажите, что для любых x, y, z, принадлежащих промежутку [0; 1], справедливо неравенство

$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) \leq 1$.

Доказательство. Зафиксировав y и z, рассмотрим следующую линейную функцию $f(x) = x(1 - y - z) + y(1 - z) + z - 1$; $x \in [0; 1]$. Очевидно, что графиком этой функции является отрезок прямой, а значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на одном из концов отрезка [0; 1].

Однако $f(0) = y(1 - z) + z - 1 = (y - 1)(1 - z)$ и $f(1) = 1 - y - z + y - yz + z - 1 = -yz$ очевидно неположительны (каковы бы ни были выбраны из отрезка [0; 1] y и z), а значит $f(x) \leq 0$ при любом $x \in [0; 1]$, что и доказывает утверждение примера.

Пример 3. Докажите, что для любых действительных a, b и c справедливо неравенство

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Доказательство. Зафиксируем b и c и рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^2 - (b + c)x + b^2 + c^2 - bc, x \in R$. Дискриминант трехчлена, задающего данную функцию, равен $(b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = b^2 + 2bc + c^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc = -3(b - c)^2$, а значит, всегда неположителен. Следовательно, для любого действительного x (и любых действительных b и c) $f(x) \geq 0$, что и доказывает исходное неравенство (достаточно положить $x = a$). Очевидно, что равенство в доказанном соотношении достигается только при $a = b = c$.

Примечание. Задача решается еще проще, если использовать тождество

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2).$$

Пример 4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$, справедливо неравенство $a + b + c \geq 3abc$.

Доказательство. Из условия $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$ следует, что $abc \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq abc(a + b + c)$, т.е. $ab + bc + ac \geq abc(a + b + c)$. Однако из ранее доказанного в примере 3 неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ следует, что $(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac) \geq 3(ab + bc + ac)$, т.е. $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac)$. А следовательно, с учетом неравенства $3(ab + bc + ac) \geq 3abc(a + b + c)$ получаем $(a + b + c)^2 \geq 3abc(a + b + c)$, но a, b и c по условию положительные, поэтому $a + b + c \geq 3abc$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Пусть наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n \in N$) равно a. Докажите, что тогда имеет место неравенство

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Доказательство. Обозначим $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A$, тогда

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} - A^2 \leq \frac{aa_1 + \ldots + aa_n}{n} - A^2 = aA - A^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - A\right)^2 \leq \frac{a^2}{4},$$

что и доказывает требуемое соотношение.

Пример 6. Найдите наибольшее значение z, для которого существуют числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4$.

Решение. Дискриминант выражения $2x^2 + x(y + z) + (2y^2 + z^2 + yz - 4)$, рассматриваемого как квадратный трехчлен относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z, имеет вид: $D = (y + z)^2 - 16y^2 - 8yz - 8z^2 + 32$.

Для того, чтобы уравнение данной задачи имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $D \geq 0$, или $15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0$. Это (квадратное относительно y) неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда $36z^2 - 60(7z^2 - 32) \geq 0$, т.е. при $z^2 \leq 5$, или $|z| \leq \sqrt{5}$. Проверим, есть ли такие x и y, что тройка чисел $(x; y; \sqrt{5})$ удовлетворяет уравнению условия задачи.

При $z = \sqrt{5}$ из условия $15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0$ найдем единственное значение для y: $(\sqrt{5}y + 1)^2 \leq 0$; $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, а тогда и исходное уравнение даст единственное значение для x: $2\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 0$, т.е. $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (искать которое было необязательно).

ДВА ПРОСТЫХ ПРИЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ.

1. Если для значений числовых выражений a и b известно, что $a > 0$, $b > 0$, $a \cdot b = c$, причем $a > \sqrt{c}$, то тогда будут справедливы неравенства $b < \sqrt{c}$ и $b < a$.
2. Переход от арифметики к алгебре и некоторые другие соображения проиллюстрируем решением следующего примера.

Пример 7. Докажите, что $e^4 - \frac{1}{\pi}e^3 + e^2 - e + 1 > -\frac{1}{100}\pi$.

Решение. Составим вспомогательную задачу – установить принадлежность числа e множеству решений следующего неравенства:

$$x^4 - \frac{1}{\pi}x^3 + x^2 - x + 1 > -\frac{1}{100}\pi.$$

Очевидно, что можно рассмотреть более простое неравенство

$$x^4 - \frac{1}{\pi}x^3 + x^2 - x + 1 > 0,$$

для которого число e будет очевидным решением, поскольку $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ для любого $x \in R$, также $x^4 - \frac{1}{\pi}x^3 = x^3\left(x - \frac{1}{\pi}\right) > 0$ для любого $x \in \left(\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$; а так как $e > \frac{1}{\pi}$ и $-\frac{1}{100}\pi < 0$, то e – решение данного неравенства. Это и завершает доказательство.

Примечание. Неравенства, порождаемые геометрическими соображениями (в частности, неравенство треугольника), рассмотрены в разделе XII «Геометрические задачи».

ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ПРИЕМОВ, ТРАДИЦИОННО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ НЕРАВЕНСТВ.

1. Сравнение двух чисел с помощью нахождения «промежуточного» для них числа (метод оценок «сверху» и «снизу»).

Задача 1. Сравните числа $\log_3 5$ и $\log_2 3$.

Решение. Сравниваемые числа лежат в промежутке (1; 2); перейдем к сравнению между собой чисел, получающихся из данных умножением на 2, т.е. к числам $\log_3 25$ и $\log_2 9$. Однако

$$2 = \log_3 9 < \log_3 25 < \log_3 27 = 3 \text{ и } 3 = \log_2 8 < \log_2 9,$$

а значит, $\log_3 25 < \log_2 9$ (в роли промежуточного числа выступило число 3).

Ответ: $\log_3 5 < \log_2 3$.

2. Метод вспомогательной функции и использования ее свойств.

Задача 2. Сравните числа $\log_{15} 16$ и $\log_{16} 17$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(x) = \log_x(x + 1)$ и исследуем ее на возрастание и убывание при $x \in (1; +\infty)$, заметив, что $f(15)$ и $f(16)$ – это как раз те числа, которые предложены в условии задачи для сравнения. Так как $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, то $f'(x) = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x\ln\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$. Замечая, что для $x \in (1; +\infty)$ $0 < \frac{x}{x+1} < 1$, получим, что $x\ln\frac{x}{x+1} < 0$ и $-\ln(x+1) < 0$. Зная, что $x(x+1)\ln^2 x > 0$, по-

лучаем, что при $x \in (1; +\infty)$ $f'(x) < 0$, а значит, функция $f(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$ – убывающая, т.е. $f(15) > f(16)$ и $\log_{15}16 > \log_{16}17$.

Примечание. При решении предыдущей задачи был использован факт, хорошо известный из базового курса начал анализа как теорема о достаточных условиях убывания или возрастания функции, заданной на некотором промежутке.

Задача 3. Сравните числа $e^e \cdot \pi^\pi$ и $e^{2\pi}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = x - \pi\ln x$. Найдем ее производную ($D(f) = (0; +\infty)$): $f'(x) = 1 - \dfrac{\pi}{x}$, значит $f(x)$ имеет наименьшее значение в точке $x = \pi$, так что $f(e) > f(\pi)$, т.е. $e - \pi\cdot\ln e > \pi - \pi\cdot\ln\pi$, а тогда $e + \pi\cdot\ln\pi > 2\pi$, что гарантирует выполнение неравенства $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

РАВЕНСТВО КРАЙНИХ ЧЛЕНОВ ДВОЙНОГО НЕРАВЕНСТВА.

Задача 4. Известно, что для чисел a, b и c выполняется двойное неравенство

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}.$$

Докажите, что $a = b = c$.

Решение. Заметим, что левая и правая части неравенства равны, поскольку

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} - \left(\frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}\right) = \frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2}{b+c} +$$

$$+ \frac{c^2-a^2}{c+a} = (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0.$$

Следовательно, равны все три выражения. Тогда, вычитая из первого второе, получим:

$$0 = \frac{a^2-c^2}{a+b} + \frac{b^2-a^2}{b+c} + \frac{c^2-b^2}{c+a} = \frac{a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Т.к. числитель равен нулю, $a^2 = b^2 = c^2$, и учитывая, что $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$, имеем, что $a = b = c$.

Задача 5. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство $\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Решение. Заметим, что $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть, требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le 0. \qquad (*)$$

Можно считать, что x – наибольшее из трех данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1. $y \ge z$. В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)}\le\frac{x-y}{y(y+1)};\quad \frac{y-z}{x(x+1)}\le\frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)}-\frac{z-y}{z(z+1)},$$ что равносильно (*).

Случай 2. $y < z$. Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}\le\frac{z-y}{y(y+1)};\quad \frac{x-z}{x(x+1)}\le\frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)},$$ что опять равносильно (*).

Примечание. Существуют два различных варианта упорядочения переменных, с точностью до циклической перестановки (в этом решении $x \ge y \ge z$ и $x \ge z \ge y$). Напомним (см. раздел I), что правильное решение только одного из таких случаев дает участнику олимпиады не более трети баллов от суммарной оценки задачи!

Задача 6. Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ не имеют корней, то и уравнение $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ не имеет корней?

Решение. *Способ 1.* По условию $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$. Покажем, что тогда

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2<4\left(\frac{b+d}{2}\right).$$

Имеем:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2+2ac+c^2) \le \frac{1}{4}(a^2+(a^2+c^2)+c^2) = \frac{1}{2}(a^2+c^2) < \frac{1}{2}(4b+4d).$$

Способ 2. Пусть $f_1(x) = x^2 + ax + b, f_2(x) = x^2 + cx + d$. По условию $f_1(x) > 0, f_2(x) > 0$ при всех x, так как $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$. Но тогда и

$$f(x) = x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = \frac{f_1+f_2}{2} > 0.$$

Значит, уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней.

Ответ: верно.

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ.

1. *Средним арифметическим* двух величин a и b называется их полусумма $x = \frac{a+b}{2}$; величины a, x, b образуют арифметическую прогрессию. Среднее арифметическое n величин $a_1, a_2, \ldots a_n$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

2. *Средним геометрическим* (средним пропорциональным) двух положительных величин a и b называется величина $x = \sqrt{a \cdot b}$. Величины a, x, b образуют геометрическую прогрессию. Если a и b – длины отрезков, то отрезок длиной $x = \sqrt{a \cdot b}$ определяется построением.

Свойство: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$.

Золотое сечение отрезка – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.

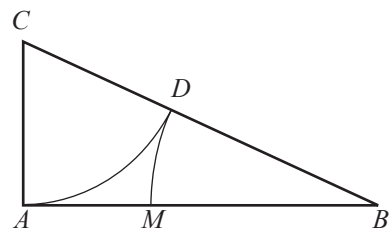
Для начала вычислим значение золотого отношения. Обозначим его греческой буквой φ. Итак, $\frac{AM}{MB} = \frac{MB}{AB} = \varphi$. Для удобства пусть $AB = 1$, тогда $MB = \varphi$ и $AM = 1 - \varphi$.

Имеем: $\frac{1-\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi}{1}$, $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, $\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. φ должно быть положительным, итак, значение золотого отношения $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Это иррациональное число, приближенно равное 0,6180339887… Оно одновременно и доля меньшей части от большей, и доля большей части от целого, и длина большей части при условии, что целое равно 1.

Пример 8. Необходимо отметить на отрезке AB точку M так, чтобы $\frac{AM}{MB} = \frac{MB}{AB} = \varphi$.

Решение. На отрезке AB, как на катете, строим прямоугольный треугольник ABC, у которого другой катет $AC = \frac{1}{2}AB$.



Проведем дугу AD с центром в точке C и радиусом CA до ее пересечения с отрезком BC в точке D. Проведем дугу DM с центром B и радиусом, равным BD, до ее пересечения с отрезком AB в точке M. Точка M – искомая. Почему?

Пусть $AB = 1$. Тогда $AC = \frac{1}{2}$ и по теореме Пифагора гипотенуза $BC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $CD = AC = \frac{1}{2}$. $BM = BD = BC - CD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} =$ $= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$, тогда $\frac{MB}{AB} = \frac{\varphi}{1} = \varphi$ и $\frac{AM}{MB} = \frac{MB}{AB} = \varphi$.

Золотым сечением (или делением в крайнем и среднем отношениях) величины a называется ее разделение на такие две части x и $a - x$, чтобы x было средним геометрическим между a и $a - x$:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0{,}618a.$$

Если a – длина отрезка, то отрезок x определяется построением. Величина x является длиной стороны правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса a.

3. c – *среднее гармоническое* двух положительных чисел a и b, если обратное ему число $\frac{1}{c}$ является средним арифметическим для обратных чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$: $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, откуда $c = \frac{2ab}{a+b}$.

Свойство: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$; $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > a \cdot b$; $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$.

Свойство: Пусть $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}$; $a_n > a_{n+1} > \ldots > b_{n+1} > b_n$, тогда последовательности a_n и b_n имеют общий предел c – среднее арифметико-гармоническое чисел a и b.

4. *Среднее квадратическое*: $+\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^n}{n}}$ широко используется в физике при обработке результатов опытов.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.

1. $|a + b| \le |a| + |b|$; $|a + b + \ldots + k| \le |a| + |b| + \ldots + |k|$.
2. $|a| + |b| \ge |a - b| \ge |a| - |b|$.
3. $\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^n}{n}}$.
4. **Неравенство Коши:** $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ при $a_i > 0$.

В неравенствах 3 и 4 равенство имеет место только в случае равенства всех a_i.

Задача 7. («Школьный вариант доказательства неравенства Коши».)

Докажите, что для любых неотрицательных a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a \cdot b},$$

причем равенство справедливо только при $a = b$.

Доказательство. Составим и преобразуем разность между левой и правой частями доказываемого неравенства, а затем сравним эту разность с нулем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}=\frac{a-2\sqrt{a\cdot b}+b}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0,$$

что и доказывает справедливость неравенства, а также дает условие реализации этого соотношения в варианте равенства, а именно, при $a = b$.

Задача 8. Докажите, что для любых неотрицательных переменных a, b, c, d справедливо неравенство (неравенство Коши для четырех переменных):

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd},$$

причем это соотношение реализуется в форме равенства при $a = b = c = d$.

Доказательство.

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{4}\geq\frac{\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c\cdot d}}=\sqrt[4]{abcd},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия: $\frac{a+b}{2}=\sqrt{a\cdot b}$; $\frac{c+d}{2}=\sqrt{c\cdot d}$; $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{c\cdot d}$, т.е. когда $a = b = c = d$. Доказательство завершено.

Задача 9. Докажите, что для любых неотрицательных a и b справедливо неравенство

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{a\cdot b}}.$$

Решение. В очевидном неравенстве $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ (A и B любые неотрицательные) положим $A = a + b$; $B = 2\sqrt{a\cdot b}$ и получим очевидное доказательство.

Задача 10. Сравните числа $\log_4 3$ и $\log_3 2$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши, т.е. соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим для двух неотрицательных чисел:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b},\text{ где }\{a;\,b\}\in[0;+\infty).$$

Но сначала рассмотрим отношение сравниваемых (очевидно положительных) чисел и преобразуем его: $\frac{\log_3 2}{\log_4 3} = \log_3 2 \cdot \log_3 4$.

А вот теперь к положительным числам $\log_3 2$ и $\log_3 4$ применим неравенство Коши $\sqrt{\log_3 2 \cdot \log_3 4} \le \frac{\log_3 2 + \log_3 4}{2}$ и преобразуем правую часть полученного неравенства, что позволит оценить ее значение «сверху» числом 1:

$$\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{2} = \frac{\log_3(2 \cdot 4)}{2} = \frac{\log_3(3^2 - 1)}{2} < 1, \text{ т.к. } \log_3(3^2 - 1) < \log_3 3^2 = 2.$$

Итак, $\sqrt{\log_3 2 \cdot \log_3 4} < 1$, а значит $\frac{\log_3 2}{\log_4 3} < 1$, т.е. $\log_3 2 < \log_4 3$, что и требовалось выяснить.

Задача 11. (Старая олимпиадная задача.) Определить знак разности

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1978}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1977}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1978 \cdot 1}}\right) - 2\frac{1978}{1979}.$$

Решение. Воспользуемся тем, что из неравенства Коши (при любых несовпадающих положительных a и b) следует неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} > \frac{2}{a + b},$$

тогда, очевидно, истинными будут следующие числовые соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1978}} > \frac{2}{1 + 1978} = \frac{2}{1979}; \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1977}} > \frac{2}{2 + 1977} = \frac{2}{1979}, \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1978 \cdot 1}} > \frac{2}{1978 + 1} = \frac{2}{1979},$$

складывая почленно которые, мы получим истинное числовое неравенство, гарантирующее положительность исследуемой разности, т.е. знак числового выражения – это «плюс».

Задача 12. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\frac{2}{a + b} + \frac{2}{c + a} + \frac{2}{b + c} \ge \frac{9}{a + b + c}.$$

Решение. Применим неравенство Коши к числам $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ и $\frac{1}{c+a}$, затем запишем равносильное неравенство

$$\frac{3}{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{b+c}} \le \sqrt[3]{(a+b)(c+a)(b+c)}$$

и, применив еще раз неравенство Коши к числам $b + c$, $a + b$ и $c + a$, получаем доказательство.

5. **Неравенство Коши-Буняковского:**

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^n} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^n} \text{ или}$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^n)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^n).$$

Равенство имеет место только при $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_k}{b_k}$.

Задача 13. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c, если $a + b + c \ge 3$, то будет справедливо и неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского дает следующее соотношение:

$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \ge (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2$,

т.е. $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$, но по условию $a + b + c \ge 3$, значит $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge 9$, откуда сразу следует доказываемое соотношение.

Примечание. Возможно получить решение задачи, используя чисто геометрические соображения, ведь условие $a + b + c \ge 3$ означает, что нас интересуют только точки полупространства, образованного плоскостью $a + b + c = 3$ и не содержащего точку (0; 0; 0). Причем требуется доказать, что все точки этого полупространства лежат вне или на сфере с центром в точке (0; 0; 0) и радиуса $\sqrt{3}$. Для этого достаточно сравнить радиус этой сферы и расстояние от ее центра до плоскости $a + b + c = 3$.

Задача 14. Докажите, что для любого значения x из области определения выполняется неравенство

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{6x+1} + \sqrt{1-11x} \le 3.$$

Решение. Неравенство Коши-Буняковского дает для любого значения x из области определения соотношение:

$$\sqrt{5x+1}\cdot 1 + \sqrt{6x+1}\cdot 1 + \sqrt{1-11x}\cdot 1 \le$$

$$\le \sqrt{(\sqrt{5x+1})^2 + (\sqrt{6x+1})^2 + (\sqrt{1-11x})^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}$$

или

$$\sqrt{5x+1}\cdot 1 + \sqrt{6x+1}\cdot 1 + \sqrt{1-11x}\cdot 1 \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{3},$$

что доказывает требуемое неравенство. Остается добавить, что область определения неравенства не является пустым множеством.

Задача 15. Докажите, что если для некоторых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in N$, $n \ge 2$) выполняется условие $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, то для них выполняется и условие $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge 1$, то для них выполняется и соотношение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge \frac{1}{n}$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского дает соотношение:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\cdot(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2) \ge (x_1\cdot 1 + x_2\cdot 1 + \ldots + x_n\cdot 1)^2,$$

где во второй скобке неравенства n слагаемых. Но по условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, что и позволяет сделать нужное заключение.

Векторный вариант записи неравенства Коши-Буняковского.

Рассмотрим неравенство Коши-Буняковского при $n = 2$ и $n = 3$.

В первом случае его можно переписать в следующем виде, если ввести в рассмотрение векторы $\vec{u}(a_1; a_2)$ и $\vec{v}(b_1; b_2)$:

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 \le |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2;$$

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|;$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|,$$

где $|\vec{u}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ – длина вектора $\vec{u}$, $|\vec{v}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ – длина вектора $\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2$ – скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Во втором случае при $n = 3$ получим те же три варианта записи неравенства Коши-Буняковского, если считать, что $\vec{u}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{v}(b_1; b_2; b_3)$.

Случай, когда соотношение выполняется в виде равенства, имеет простое геометрическое истолкование: вариант возможен только в случае коллинеарности (параллельности) векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. При этом должно существовать такое действительное число λ, что $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Примечание. Ясно, что выкладки (по большому счету) аналитической геометрии не было смысла приводить в разделе, где рассматривались геометрические задачи.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2;\\ x^4 + y^4 = 1.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{u}(x^2; y^2)$ и $\vec{v}(x; y)$, тогда для них имеет место неравенство $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \le |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$, т.е. $(x^3 + y^3)^2 \le$ $\le (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)$, (если $(x; y)$ – решение заданной системы) $x^2 + y^2 \le 1\cdot(x^2 + y^2)$, значит неравенство Коши-Буняковского должно выполняться в варианте равенства, а это означает, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, следовательно, $\frac{x^2}{x} = \frac{y^2}{y}$, откуда $x = y$, а значит, поскольку $x^4 + y^4 = 1$, решением системы при условии, что $x \ne 0$ и $y \ne 0$, будут пары $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. Рассмотрение случаев $x = 0$ и $y = 0$ дает, очевидно, решения (0; 1); (0; –1); (1; 0); (–1; 0).

Задача 17. Решите систему

$$\begin{cases}x^4 + y^4 + z^4 = 1;\\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7}.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{u}(x^2; y^2; z^2)$ и $\vec{v}(1; 1; 2)$, тогда для них, с одной стороны, имеют место равенства $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{7}$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = \sqrt{6}$, а с другой стороны, согласно неравенству Коши-Буняковского, $\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, т.е. $\sqrt{7} \le 1\cdot\sqrt{6}$, что является ложным утверждением, значит, исследуемая система уравнений несовместна.

Задача 18. Найдите наибольшее значение функции

$f(x) = \sqrt{x + 7} + \sqrt{11 - x}$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{u}(\sqrt{x + 7}; \sqrt{11 - x})$ и $\vec{v}(1; 1)$, тогда $|\vec{u}| = \sqrt{x + 7 + 11 - x} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{2}$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{x + 7} + \sqrt{11 - x}$. При этом неравенство $\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ примет вид $\sqrt{x + 7} + \sqrt{11 - x} \le$ $\le 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, т.е. при любом допустимом x $f(x) \le 6$. Подозрительное на максимум число – это число 6, осталось выяснить, достигается ли оно. Составим уравнение

$$\frac{\sqrt{x + 7}}{1} = \frac{\sqrt{11 - x}}{1}.$$

Очевидно, что его единственный корень – число 2, значит, действительно $f_{\max} = 6$, причем достигается это значение при $x = 2$.

Примечание. Задания, содержащие неравенство Коши-Буняковского с тригонометрическими подстановками, будут рассмотрены далее в главе XVI.

6. **Неравенство Чебышева.**

Для любых неубывающих (или невозрастающих последовательностей) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geq 2)$ справедливо неравенство:

а) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

при $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ или $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.

Обобщение неравенства Чебышева.

б) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

при $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.

Задача 19 (вспомогательная). Докажите для двух действительных положительных чисел x и y справедливость неравенств:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \text{ и } \frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq \frac{9}{x + y}. \qquad (*)$$

Решение. Очевидно, что первое неравенство – непосредственное следствие из соотношения между средним арифметическим и средним гармоническим положительных чисел x и y.

Аналогичная ситуация со вторым неравенством: достаточно записать соотношение между средним арифметическим и средним гармоническим трех положительных чисел: x; $\frac{y}{2}$ и $\frac{y}{2}$.

Обоснованные только что неравенства помогают без труда решить следующие задачи.

Задача 20. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b, c и d справедливо следующее двойное неравенство:

$$\frac{12}{a + b + c + d} \leq \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + d} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{b + d} + \frac{1}{c + d} \leq$$

$$\leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Решение. Применяя несколько раз неравенство (*), получаем:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right).$$

С другой стороны:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right)+\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right)\geq 4\left(\frac{1}{2a+b+c}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a+b+c+d}+\frac{1}{b+c+2d}\right)\geq 4\left(\frac{4}{2a+2b+2c+2d}+\frac{1}{a+b+c+d}\right)=$$

$$=\frac{12}{a+b+c+d}.$$

Обе части двойного неравенства доказаны.

Следствия из задач 15, 16.

1. $$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\geq\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}, \qquad (1)$$

2. $$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \qquad (2)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольные действительные числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – произвольные положительные числа, $n \in N$.

Задача 21. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b, c и d справедливо неравенство:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Чтобы появилась возможность применить неравенство (2), домножим числители и знаменатели дробей, чья сумма составляет левую часть доказываемого неравенства, на соответствующие выражения; затем примерим вышеуказанное неравенство:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{x^2}{x(y+z)}+\frac{y^2}{y(x+z)}+\frac{z^2}{z(x+y)}\geq$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+xz+yz)}=A,$$

однако для любых действительных чисел x, y и z справедливо следующее неравенство: $xy + xz + yz \le x^2 + y^2 + z^2$ (напомним, что $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) = (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$), что позволяет немедленно получить следующее неравенство (оценку для A «снизу»):

$$A = \frac{(x + y + z)^2}{2(xy + xz + yz)} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz)}{2(xy + xz + yz)} \ge \frac{3}{2},$$

что и завершает доказательство.

Примечание. Легко заметить, что доказанное выше неравенство равносильно неравенству из упражнения 12, поскольку:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{y+z}\right) + \left(\frac{y}{x+z} + \frac{x+z}{x+z}\right) + \left(\frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{x+y}\right) \ge \frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{x+y} \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} \ge \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

Задача 22. Докажите, что для любых действительных положительных чисел x, y и z справедливо неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \ge 2.$$

Решение.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+a)} +$$

$$+ \frac{d^2}{d(a+b)} \ge \frac{(a+b+c+d)^2}{ab + 2ac + ad + bc + 2bd + cd}, \text{ но}$$

$$(a + b + c + d)^2 = (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc +$$

$$+ 2bd + 2cd \ge 2ac + 2bd + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd =$$

$$= 2(ab + 2ac + ad + bc + 2bd + cd).$$

Теперь очевидно, что полученная оценка «снизу» для числителя рассматриваемой дроби немедленно приводит к обоснованию исследуемого в данной задаче неравенства.

Упражнения.

1. Докажите, что для любых действительных x и y справедливо неравенство $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \ge 0$.

2. Сравните дроби $x = \frac{111110}{111111}$; $y = \frac{222221}{222223}$; $z = \frac{333331}{333334}$.

3. Вычислите с точностью до 10^{-50} значение выражения $\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3}$.

4. Докажите, что для произвольных неотрицательных переменных a, b, c справедливо неравенство: $ab + ac + bc \geq \sqrt{3abc(a + b + c)}$.

5. Докажите, что для любых неотрицательных переменных a, b, c справедливо неравенство (неравенство Коши для трех переменных): $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$,
причем это соотношение реализуется в форме равенства при $a = b = c$.

6. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

7. Расположите в порядке возрастания $4\mathrm{tg}1^\circ$; $3\mathrm{tg}2^\circ$; $2\mathrm{tg}3^\circ$; $\mathrm{tg}4^\circ$.

8. Сравните числа $\log_7 8$ и $\log_6 7$.

9. Какое число больше: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100}?

10. Докажите, что 101! меньше, чем 51^{101}.

11. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c справедливо неравенство $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

12. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b и c справедливо следующее неравенство:
$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} \geq \frac{9}{2(a + b + c)}.$$

13. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b и c справедливо неравенство:
$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Ответы и указания.

1. *Решение*. Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2(y + 1)x + 3y^2 + 6y + 3$ (при любом фиксированном $y \in R$) имеет вид $D = 4(y + 1)^2 - 4(3y^2 + 6y + 3) = -8(y^2 + 2y + 1) = -8(y + 1)^2$, то его положительность очевидна, что и позволяет сделать относительно исходного неравенства соответствующий вывод.

2. *Указание.* Рассмотрите числа $\frac{1}{1 - x}$, $\frac{1}{1 - y}$ и $\frac{1}{1 - z}$.

3. *Решение.* Достаточно доказать, что значение этого числового выражения – это целое число 3.
4. *Указание.* Перейдите к доказательству равносильного неравенства $(ab + bc + ac)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.
5. См. решение задачи 8.
6. *Указание.* Составьте разность квадратов левой и правой частей данного неравенства.
7. *Указание.* Вспомогательная функция $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x \in (0; 5\alpha)$, где α – величина угла в 1°.
8. См. решение задачи 7.
9. *Решение.* Поскольку $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100}$, то достаточно убедиться, что $4^{100} > 2 \cdot 3^{100}$, чтобы установить, что второе из заданных двух чисел больше первого. Для доказательства неравенства $4^{100} > 2 \cdot 3^{100}$ достаточно (и необходимо) установить неравенство $\left(\frac{4}{3}\right)^{100} > 2$, но так как $\left(\frac{4}{3}\right)^{100} > \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{64}{27} > 2$, то оно очевидно, что и завершает обоснование неравенства $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.
10. *Указание.* Докажите неравенство Коши для 101 положительного числа и формулой для вычисления суммы конечного числа членов геометрической прогрессии.
11. Запишите исходное неравенство в явном виде как неравенство Коши-Буняковского.
12. Воспользуйтесь неравенствами задачи 22:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+b+b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$
Исследуемое неравенство обосновано.
13. *Решение.*
$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^4}{c^3 + c^2a + ca^2} \geq$$
$$\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 + c^2a + ca^2} =$$
$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$$
Однако имеет место следующее неравенство (неравенство (2) при n=3 и при $b_1 = b_2 = b_3 = 1$): $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$, что и завершает решение задачи.

XV. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

В курсе высшей алгебры доказывается, что уравнения третьей и четвертой степеней могут быть решены в общем виде. Уравнения, степень которых выше четвертой, при помощи радикалов не могут быть решены в общем виде. Поэтому особое значение приобретают частные приемы решения, выбор которых вызывается не общими соображениями, а конкретным видом данного уравнения. Рассмотрим некоторые такие приемы.

ВВЕДЕНИЕ НОВОГО НЕИЗВЕСТНОГО.

Решим уравнение

$(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 4{,}5.$

Возведем в квадрат первую скобку, а две другие перемножим:

$(64x^2 + 112x + 49)(4x^2 + 7x + 3) = 4{,}5.$

Введем новую переменную $a = 4x^2 + 7x + 3$.

Тогда $64x^2 + 112x + 49 = 16a + 1$, откуда $(16a + 1)a = 4{,}5$.

Решение полученного уравнения дает корни $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = -\frac{9}{16}$.

Далее необходимо решить два квадратных уравнения:

$4x^2 + 7x + 3 = \frac{1}{2}$; $\quad 4x^2 + 7x + 3 = -\frac{9}{16}$.

Первое из уравнений дает корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{5}{4}$. Второе уравнение корней не имеет.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЛЕВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

Если левую часть уравнения удается разложить на множители, то уравнение распадается на решение нескольких уравнений более низкой степени. Иногда разложение на множители не удается произвести простейшими средствами, известными из курса средней школы. В этом случае можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

Поясним **примером.** Пусть надо решить уравнение

$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0.$

Предположим, что левая часть этого уравнения разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами. Обозначим один из множителей через $x^2 + rx + s$, а второй через $x^2 + px + q$. Коэффициенты p, q, r, s пока не определены. Задача состоит в том, чтобы найти их. Имеем

$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + rx + s)(x^2 + px + q).$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях неравенства. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} p + r = -4; \\ s + q + pr = -10; \\ ps + qr = 37; \\ qs = -14. \end{cases}$$

Последнее уравнение показывает, что для q возможны следующие значения: 1; 2; 7; 14; –1; –2; –7; –14 (поскольку по предположению p, q, r, s – целые). Предположим, что $q = 1$. Тогда $s = -14$. Второе и третье уравнения дают систему

$$\begin{cases} pr = 3; \\ -14p + r = 37. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 14, второе на r и сложим их почленно. Получим

$r^2 - 37r - 42 = 0.$

Нетрудно убедиться, что это уравнение не имеет решения в целых числах. Но r должно быть целым. Выходит, что $q \neq 1$.

Берем теперь для испытаний другое число q. Пусть $q = 2$. Тогда $s = -7$. Второе и третье уравнения дают систему

$$\begin{cases} pr = -5; \\ -7p + 2r = 37. \end{cases}$$

Исключая из этой системы p, получим

$2r^2 - 37r + 35 = 0.$

Сумма коэффициентов равна нулю. Очевидно, что целое $r = 1$, тогда $p = -5$. Первое уравнение системы тоже удовлетворяется при $r = 1$, $p = -5$. Итак, имеем

$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7).$

Следовательно, заданное уравнение можно записать как

$(x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0.$

Остается решить два квадратных уравнения
$x^2 - 5x + 2 = 0$; $x^2 + x - 7 = 0$.

Ответ: $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ УРАВНЕНИЯ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Сформулируем некоторые теоремы и следствия из них.

Теорема 1. *Для того, чтобы несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *была корнем уравнения*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы p *было делителем свободного члена* a_n, *а* q *было делителем старшего коэффициента* a_0.

Следствие 1. *Если уравнение имеет целые коэффициенты, а старший из них равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа.*

Действительно, $a_n = 1$, q – делитель a_0. Значит, $q = \pm 1$, а тогда $\frac{p}{q}$ – целое.

Следствие 2. *Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.*

Теорема 2. *Если несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *является корнем уравнения* $f(x) = 0$ *с целыми коэффициентами, то* $f(m)$ *при любом целом* m *делится на* $p = mq$.

Пример. Решите уравнение $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$.

Решение. Свободный член имеет следующие целые делители: ± 1; ± 3; ± 7; ± 21.

Поэтому $p = \pm 1$; ± 3; ± 7; ± 21.

Выпишем все делители старшего коэффициента: ± 1; ± 2. Следовательно, $q = 1$; 2. Отрицательные значения q мы отбрасываем, так как если $\frac{p}{q} < 0$, то можно считать, что $p < 0$, $q > 0$. Для несократимой дроби $\frac{p}{q}$ получаем следующие значения:

$$1;\ 3;\ 7;\ 21;\ -1;\ -3;\ -7;\ -21;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{2};\ \frac{21}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2};\ -\frac{7}{2};\ -\frac{21}{2}.$$

Среди этих чисел содержатся рациональные корни уравнения. Каждое из этих чисел надо испытать, чтобы выяснить, является ли это число корнем нашего уравнения. Подставляем в левую часть уравнения вместо x число 1. Получаем $f(1) = -20$. Значит, 1 не является корнем уравнения. Теперь воспользуемся теоремой 2. Если $\frac{p}{q}$ – корень уравнения, то $f(1)$ делится на $p - q$. Число –20 делится на $3 - 1 = 2$, поэтому число 3 должно остаться для проверки. Число –20 не делится на $7 - 1 = 6$, поэтому 7 можно больше не испытывать. 7 не является корнем уравнения. Точно так же можно не испытывать значения

$$-7; -21; \frac{21}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{21}{2}.$$

Эти числа не являются корнями уравнения. Теперь остались для испытаний следующие значения:

$$3; 21; -1; -3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}.$$

Находим, что $f(3) = 150$. Число 3 не является корнем уравнения. Воспользуемся теоремой 2. Если $\frac{p}{q}$ – корень уравнения, то $f(3)$ делится на $p - 3q$. 150 не делится на $21 - 3 = 18$. Поэтому значение 21 можно вычеркнуть и не подвергать дальнейшей проверке. 150 не делится на 4. Поэтому можно вычеркнуть –1 и $-\frac{3}{2}$. Теперь остаются для испытаний следующие числа:

$$3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}.$$

Находим, что $f(-3) = 0$, значит $x_1 = -3$. Делением на $x + 3$ понижаем степень уравнения. Получаем уравнение третьей степени

$$f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 15x + 7 = 0.$$

Находим, что $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Значит, $x_2 = \frac{1}{2}$. Делением на $x - \frac{1}{2}$ понижаем еще раз степень уравнения. Получаем квадратное уравнение $x^2 + x - 7 = 0$. Корни этого уравнения легко найти.

Ответ: $-3; \frac{1}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

ПОНИЖЕНИЕ СТЕПЕНИ ВОЗВРАТНЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Дадим несколько определений и сформулируем теоремы.

Определение. *Возвратным уравнением называется уравнение вида*

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n+2} + \ldots + a_n x^{n+1} + \lambda a_{n-1} x^n + \lambda^3 a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\lambda^{2n+1} = 0,$$

если степень уравнения нечетная, и уравнение вида

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_n x^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0\lambda^{2n} = 0,$$

если степень его четная (λ – некоторое число).

Примеры.

1. Уравнение $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 81x + 486 = 0$ возвратное: здесь $\lambda = 3$.
2. Уравнение $4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 20x - 32 = 0$ возвратное: здесь $\lambda = -2$.

Теорема 1. *Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -\lambda$.*

Теорема 2. *В результате деления левой и правой части возвратного уравнения нечетной степени на $x + \lambda$ получается возвратное уравнение четной степени.*

Из теоремы 2 следует, что решение возвратного уравнения нечетной степени сводится к решению возвратного уравнения четной степени.

Теорема 3. *Возвратное уравнение четной степени $2n$ подстановкой $y = x + \dfrac{\lambda}{x}$ может сводиться в области действительных чисел к уравнению степени n и к n уравнениям второй степени.*

Пример. Решите уравнение

$$2x^9 + (2\sqrt{2} - 9)x^8 - (9\sqrt{2} - 20)x^7 + (20\sqrt{2} - 33)x^6 - (33\sqrt{2} - 46)x^5 + (46\sqrt{2} - 66)x^4 - (66\sqrt{2} - 80)x^3 + (80\sqrt{2} - 72)x^2 - (72\sqrt{2} - 32)x + 32\sqrt{2} = 0.$$

Решение. Это уравнение – возвратное нечетной степени, $\lambda = \sqrt{2}$. Согласно теореме 1, это уравнение имеет корень $x_1 = -\sqrt{2}$. Разделим обе части уравнения на $x + \sqrt{2}$. Получим уравнение восьмой степени

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0.$$

Это уравнение – возвратное четной степени, $\lambda = 2$, его можно записать как

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 33\cdot 2x^3 + 20\cdot 2^2\cdot x^2 - 9\cdot 2^3\cdot x + 2\cdot 2^4 = 0.$$

Понизим степень этого уравнения с помощью подстановки $x + \frac{2}{x} = y$. Для проведения подстановки разделим левую часть уравнения на x^4 и сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$2\left(x^4 + \frac{16}{x^4}\right) - 9\left(x^3 + \frac{8}{x^3}\right) + 20\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 33\left(x + \frac{2}{x}\right) + 46 = 0.$$

Тогда при $x + \frac{2}{x} = y$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4;\ x^3 + \frac{8}{x^3} = y^3 - 6y;\ x^4 + \frac{16}{x^4} = y^4 - 8y^2 + 8.$$

Произведем подстановку. Тогда для нового неизвестного y получим уравнение $2y^4 - 9y^3 + 4y^2 + 21y - 18 = 0$.

Решив уравнение четвертой степени, получим

$$y_1 = 1;\ y_2 = 2;\ y_3 = 3;\ y_4 = -\frac{3}{2}.$$

Остается решить уравнения

$$x + \frac{2}{x} = 1;\ x + \frac{2}{x} = 2;\ x + \frac{2}{x} = 3;\ x + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

Определение. *Уравнение n-й степени называется симметрическим, если у него равны коэффициенты при x^k и x^{n-k}. Таким образом, симметрическое уравнение имеет вид*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$$

Симметрическое уравнение является частным видом возвратного уравнения (здесь $\lambda = 1$).

Пример. $2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$ и $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x + 1 = 0$ – симметрические уравнения.

Из теорем 1 и 2 о возвратных уравнениях вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень –1.*

Теорема 5. *В результате деления симметрического уравнения нечетной степени на $x + 1$ получается симметрическое уравнение четной степени.*

Теорема 6. *Симметрическое уравнение четной степени* $2n$ *подстановкой* $y = x + \frac{1}{x}$ *может сводиться в области действительных чисел к уравнению степени* n *и к* n *уравнениям второй степени.*

Решаются симметрические уравнения теми же приемами, что и возвратные уравнения.

Пример. Решите уравнение $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x^2. Получим

$x^2 + 2x - 7 - 4\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2} = 0$, откуда имеем

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{2}{x}\right) - 7 = 0.$$

Положим $x - \frac{2}{x} = a$, тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = a^2 + 4$. Получим уравнение $a^2 + 2a - 3 = 0$. Находим, что $a_1 = -3$, $a_2 = 1$. Остается решить два квадратных уравнения: $x - \frac{2}{x} = -3$ и $x - \frac{2}{x} = 1$.

Ответ: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$; $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$; $x_3 = 2$; $x_4 = -1$.

Пример. Решите уравнение $x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение. Это уравнение имеет корень $x = -1$, так как это – симметрическое уравнение нечетной степени. Разделим обе части полученного уравнения на x^3 и объединим первый член с последним, второй с предпоследним и т.д. Получаем

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

Положим $x + \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$.

Для неизвестного y имеем уравнение $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень $y = 1$. Очевидно, что уравнение $x + \frac{1}{x} = 1$ корней не имеет.

Ответ: $x = -1$.

Примечание. Во многих справочных изданиях (см., например, Википедию) симметрические и возвратные уравнения отождествляются (рассматриваются только симметрические).

XVI. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Учащимся в большинстве случаев трудно представить, что в алгебраическом уравнении вместо переменной можно подставить… тригонометрическую функцию, поскольку при этом, как кажется, алгебраическое уравнение усложняется. Однако известные свойства тригонометрических функций могут существенно упростить решение.

Рассмотрим пример, который встречается во многих пособиях для поступающих в вузы (см., например, Ткачук В.В. Математика – абитуриенту: Все о вступительных экзаменах в вузы. В 2 т. М.: ТЕИС, 1994). Этот пример предлагается для самостоятельного решения, и к нему дается ответ.

Пример 1. Решить уравнение $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

Решение. Приведение исходного уравнения к виду

$x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \dfrac{35}{12}$ дает возможность утверждать, что $x > 1$.

1 способ. Принимая во внимание, что $x > 1$, возводя обе части в квадрат, получим:

$$x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{x^2-1} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 \text{ или } \frac{x^4}{x^2-1} + 2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2.$$

Далее подстановка $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y$, $y > 0$ приводит к уравнению $y^2 + 2y - \left(\dfrac{1225}{144}\right) = 0$, откуда $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+\dfrac{1225}{144}} = -1 \pm \dfrac{37}{12}$. Тогда $y_1 = -1 + \dfrac{37}{12} = \dfrac{25}{12}$; $y_2 < 0$.

Возврат к старой переменной дает $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{25}{12}$, а после преобразований квадратное уравнение

$144x^4 - 625x^2 + 625 = 0$;

$D = 625^2 - 4\cdot144\cdot625 = 625\cdot49$;

$x_1^2 = \frac{25}{12}$; с учетом $x > 1$ получаем $x_1 = \frac{5}{3}$;

$x_2^2 = \frac{225}{144}$; с учетом $x > 1$ получаем $x_2 = \frac{5}{4}$.

2 способ. Сделаем подстановку $t = \sqrt{x^2 - 1}$, тогда $x = \sqrt{t^2 + 1}$, и уравнение принимает вид $\sqrt{t^2 + 1}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{35}{12}$, а после возведения в квадрат $(t^2 + 1)\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1225}{144}$. Перемножение скобок в левой части уравнения дает приведенное симметрическое уравнение (см. раздел «Игры»), которое после группировки принимает вид $\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2 - \frac{1225}{144} = 0$. Далее стандартная вторая подстановка $a = t + \frac{1}{t}$, при которой $a^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Эта подстановка приводит к квадратному уравнению $a^2 + 2a - \frac{1225}{144} = 0$, корни которого $a_1 = -\frac{49}{12}$ и $a_2 = \frac{25}{12}$.

Очевидно, что $t > 0$ и $a > 0$. Решаем уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{25}{12}$, которое приводится к квадратному с корнями $t_1 = \frac{3}{4}$ и $t_2 = \frac{4}{3}$. Ясно, что $x_1 = \frac{5}{4}$ и $x_2 = \frac{5}{3}$.

При решении уравнения стандартными способами приходится делать подстановки и решать не одно квадратное уравнение. Это занимает довольно длительный промежуток времени. Попытаемся решить уравнение (а рассматриваемое уравнение является классическим примером «уравнения на способ решения»), используя несколько другие соображения.

Неравенство $x > 1$ дает возможность сделать тригонометрическую подстановку $x = \frac{1}{\sin z}$, где $\sin z > 0$, $2\pi n < z < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Исходное уравнение при такой подстановке легко приводится к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\cos z} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4}; \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \end{cases}$$ которая дает

$$\begin{cases}\sin z = \dfrac{3}{5};\\ \cos z = \dfrac{4}{5}\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\sin z = \dfrac{4}{5};\\ \cos z = \dfrac{3}{5}.\end{cases}$$ Очевидно, что $\cos z > 0$.

Ответ: $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

Замечание. Покажем, что не произошло потери корней. Первое уравнение системы дает $\dfrac{\sin z + \cos z}{2\sin z \cdot \cos z} = \dfrac{25}{24}$. Стандартная подстановка $\sin z + \cos z = \alpha$, $2\sin z \cdot \cos z = \alpha^2 - 1$ приводит к уравнению $\alpha^2 - \dfrac{24}{35}\alpha - 1 = 0$, которое с учетом $\alpha > 0$ имеет корень $\alpha = \dfrac{7}{5}$.

$$\sin 2z = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25};\ \cos 2z = \pm\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \pm\frac{7}{25}.$$

$$\sin z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2z}{2}}.\ (\sin z)_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5};\ (\sin z)_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

$x_1 = \dfrac{5}{4}$ и $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

Примененная нами подстановка встречается в решениях довольно редко. Рассмотрим возможные тригонометрические подстановки.

Если из условия следует, что $|x| \le 1$, то удобно применить подстановки $x = \sin\varphi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ или $x = \cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Обе тригонометрические функции на указанных промежутках монотонны и каждое свое значение принимают только один раз.

Иногда бывает полезной подстановка $x = \operatorname{tg}\varphi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 3x - 4x^3$.

Решение. Поскольку $|x| \le 1$, выполняем подстановку $x = \sin\varphi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда $\cos\varphi = \sin 3\varphi$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin 3\varphi = 0;\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right) = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

$n = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{8}$, $x = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$;

$n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$; $\varphi \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$n = -1$, $\varphi = -\frac{3\pi}{8}$, $x = -\sin\frac{3\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$ и $x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

***Ответ*:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Пример 3. Решить уравнение $x^2\sqrt{1 - x^2} = |x|^3 - |x| + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Левая и правая части уравнения являются функциями четными, поэтому можно положить $|x| = \sin\varphi$, где $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Имеем:

$\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi = \sin^3\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi = -\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Выполним преобразования в левой части уравнения:

$\sin 2\varphi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1$. Так как $|\sin t| \le 1$, последнее равенство выполнимо, когда

$$\begin{cases} \sin 2\varphi = 1; \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 2\varphi = -1; \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = -1. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $\varphi = \frac{\pi}{4}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, вторая система решений не имеет. Итак, $|x| = \sin\frac{\pi}{4}$ и $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение $2(2x^2 - 1)^2 - 1 = x$.

Решение. В этом примере тригонометрическая подстановка не очевидна, поэтому сначала покажем, что числа, модуль которых больше единицы, не могут быть решениями уравнения.

Пусть $|x| > 1$, тогда, поскольку $2x^2 - 1 = x^2 + x^2 - 1$, $2x^2 - 1 > x^2 > |x|$, а далее $2(2x^2 - 1)^2 - 1 > |2x^2 - 1| > |x|$.

Проведем замену $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$, получим уравнение $2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = \cos\alpha$. Поскольку $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, левая часть полученного уравнения равна $\cos 4\alpha$, поэтому уравнение принимает вид $\cos 4\alpha = \cos\alpha$, тогда справедливо соотношение $\pm 4\alpha = \alpha + 2\pi n$, при $n \in Z$.

Далее имеем $\alpha = \frac{2\pi n}{5}$ и $\alpha = \frac{2\pi n}{3}$. Отрезку $[0; \pi]$ принадлежат только решения $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$. Все корни различны, так как на указанном отрезке косинус монотонно убывает (мы о монотонности уже упоминали ранее).

Более того, уравнение четвертой степени не может иметь более четырех корней. Возвращаясь к исходной переменной, получаем корни: $1; -\frac{1}{2}; \cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{4\pi}{5}$.

Ответ: $1; -\frac{1}{2}; \cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{4\pi}{5}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{1 + x^2} + x = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Ясно, что при решении этого задания необходимо выполнить подстановку $x = \mathrm{tg}\alpha$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Исходное уравнение примет вид $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \cos^3\alpha$ или $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - (1-\sin^2\alpha)\cos\alpha = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на $1+\sin\alpha \neq 0$ и умножив на $\cos\alpha \neq 0$ (поскольку $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$), получим $1-(1-\sin\alpha)(1-\sin^2\alpha) = 0$, или $\sin^3\alpha - \sin^2\alpha - \sin\alpha = 0$.

Ясно, что $\sin\alpha = 0$ и $\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0$. Корень первого уравнения очевиден. Из второго уравнения системы получаем $\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ясно, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Далее найдем $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ и

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}-1}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Итак, уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $0;\ -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{1+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 3$.

Решение. Легко видеть, что $|x| \le 2$, поэтому в этом задании удобно применить подстановку $x = 2\cos\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$. Уравнение примет вид:

$$\sqrt{1+\sin 2\varphi} + \sqrt{2}\left(\sqrt{1-\cos\varphi} + \sqrt{1+\cos\varphi}\right) = 3;$$

$$\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 3;$$

$$\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)} + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) = 3.$$

Если $0 \le \varphi \le \pi$, то $\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + \varphi \le \frac{5\pi}{4}$. На полученном промежутке $\sin t$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + \varphi \le \pi$, тогда $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 3$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и так как $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$, то $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. При этом $x = 2\cos 0 = 2$ и $x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

При $\pi \le \frac{\pi}{4} + \varphi \le \frac{5\pi}{4}$, т.е. $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$, $-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 3$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Полученное уравнение корней не имеет.

Из двух найденных корней $x = 2$ и $x = 0$ непосредственной проверкой убеждаемся, что корнем данного уравнения является только первое значение.

Ответ: 2.

Системы алгебраических уравнений, в которых возможны тригонометрические подстановки, имеют некоторые особенности.

Пример 7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (4x^3 - 3x)^6 + (4y^3 - 3y)^6 = 1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как $x^2 + y^2 = 1$, то можно положить $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$. Тогда первое уравнение системы примет вид: $\sin^6 3\alpha + \cos^6 3\alpha = 1$.

Выполним преобразование:

$(\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha)(\sin^4 3\alpha - \sin^2 3\alpha \cdot \cos^2 3\alpha + \cos^4 3\alpha) = 1$,

$1 - 3\sin^2 3\alpha \cdot \cos^2 3\alpha = 1$, откуда $\sin 3\alpha = 0$ или $\cos 3\alpha = 0$.

Пусть $\sin 3\alpha = 0$, тогда $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 0$ и, значит, или $\sin\alpha = 0$, или $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\sin\alpha = 0$, то $x = 0$, $y = \pm 1$. Если $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y = \pm\frac{1}{2}$. Отсюда получаем решения: $(0; 1)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $(0; -1)$.

Данная система симметрична относительно переменных, значит, существуют еще шесть пар ее решений: $(1; 0)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1; 0)$.

Ответ: $(0;\ 1);\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right);\ (0;\ -1).$

$(1;\ 0);\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ (-1;\ 0).$

Пример 8. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2} = y; \\ \dfrac{2y}{1-y^2} = z; \\ \dfrac{2z}{1-z^2} = x. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = \mathrm{tg}\alpha$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тогда первое уравнение дает $y = \mathrm{tg}2\alpha$, а второе – $z = \mathrm{tg}4\alpha$. Третье уравнение примет вид $\mathrm{tg}8\alpha = \mathrm{tg}\alpha$ или тогда $\sin 7\alpha = 0$ при $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos 8\alpha \neq 0$. Значит, $\sin 7\alpha = 0$, $x = \frac{\pi}{7}n$, $n \in Z$, $n \neq 0$. Легко видеть, что $(0;\ 0;\ 0)$ – решение системы. Значение $x = \frac{\pi}{7}n$ должно удовлетворять ограничениям на α:

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{16}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{16};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{\pi}{16}\right) \cup \left(\frac{\pi}{16};\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, $\alpha = 0$; $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}$; $\alpha = \pm\frac{2\pi}{7}$; $\alpha = \pm\frac{3\pi}{7}$. Искомые решения системы таковы: $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{4\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{8\pi}{7}\right)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{6\pi}{7};\ \mathrm{tg}\frac{12\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{4\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{8\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{6\pi}{7};\ -\mathrm{tg}\frac{12\pi}{7}\right)$.

Рассмотрим несколько заданий с неравенствами, в которых используются тригонометрические подстановки.

Пример 9. Докажите, что для любых двух действительных чисел a и b, удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 = 1$, справедливо неравенство $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

Доказательство. Поскольку $a^2 + b^2 = 1$, это означает, что радиус-вектор с концом в точке $(a;\ b)$, которая лежит на единичной окружности, задаваемой уравнением $a^2 + b^2 = 1$, образует некоторый угол φ

с осью абсцисс. Это дает возможность воспользоваться следующим представлением a и b: $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Теперь исследуемое неравенство принимает вид $|\sin\varphi + \cos\varphi| \le \sqrt{2}$, а ему равносильным будет неравенство $\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right| \le \sqrt{2}$, которое, в свою очередь, очевидно. Легко видеть, что в варианте равенства доказываемое соотношение реализуется лишь в двух случаях: если $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или если $a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 10. Докажите, что для любых двух действительных чисел a и b, удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 = 1$, справедливо неравенство $|a^3b - ab^3| \le \frac{1}{4}$.

Доказательство. Подстановка $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, где $\varphi \in R$, приводит нас к неравенству $|\cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi| \le \frac{1}{4}$. Ему равносильна цепочка неравенств: $|\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)| \le \frac{1}{4}$; $\left|\frac{1}{2}\sin2\varphi\cos2\varphi\right| \le \frac{1}{4}$; $\left|\frac{1}{4}\sin4\varphi\right| \le \frac{1}{4}$; $|\sin4\varphi| \le 1$.

Получили очевидное неравенство, значит, обоснование исходного неравенства состоялось.

Пример 11. Докажите, что для любых двух действительных чисел a и b справедливо неравенство $(a + b)^4 \le 8(a^4 + b^4)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a = 0$ или $b = 0$. В этом случае неравенство очевидно.

2) Пусть теперь $a \ne 0$ и $b \ne 0$, тогда для числа $\frac{b}{a}$ найдется такой угол α, что $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\alpha$. Отсюда имеем: $b = a\mathrm{tg}\alpha$, и исследуемое неравенство можно заменить на следующее: $a^4(1 + \mathrm{tg}\alpha)^4 \le 8a^4(1 + \mathrm{tg}^4\alpha)$ или $(\cos\alpha + \sin\alpha)^4 \le 8(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha)$, которое, очевидно, равносильно неравенству $(1 + 2\cos\alpha\sin\alpha)^2 \le 8(1 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha)$.

Далее имеем как следствие полученного неравенства цепочку равносильных между собой неравенств:

$$(1 + \sin2\alpha)^2 \le 8\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) \Leftrightarrow 1 + 2\sin2\alpha + \sin^2 2\alpha \le 8 - 4\sin^2 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 2\alpha + 2\sin2\alpha - 7 \le 0 \Leftrightarrow (5\sin2\alpha + 7)(\sin2\alpha - 1) \le 0.$$

Последнее неравенство очевидно. Этим решение данной задачи завершено.

Заключение

В данном издании рассмотрен далеко не полный круг элементарных олимпиадных задач.

Предыдущие две книги автора были рассчитаны на тех, кто делает первые шаги в подготовке к олимпиадам. В этом издании содержится материал не только для начинающих, но и для учащихся, которые уже знакомы с основными «олимпиадными» подходами. Добавлены математические парадоксы, материал, относящийся к свойствам квадратного трехчлена и решению классических неравенств (в том числе и геометрических). Разбираются уравнения высших степеней и тригонометрические подстановки в алгебраических уравнениях и неравенствах.

Книга рассчитана на учителей, которые занимаются подготовкой учащихся к олимпиадам (для этого во введении указаны сайты наиболее популярных в России олимпиад по математике). Она будет интересна и любознательным юным математикам. Именно поэтому указанный в конце книги список литературы разделен на две части: для учителей и для учеников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Литература для учителей

1. *Агаханов, Н.Х.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др. ; под ред. С.И. Демидовой, И.И. Колисниченко. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.
2. *Агаханов, Н.Х.* Квадратичная функция в задачах муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин // Математика в школе. – 2010. – №9. – С. 60–66.
3. *Алексеев, В.Б.* Олимпиады Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова / В.Б. Алексеев, А.В. Бегунц и др. // Математика в школе. – 2011. – №2. – С. 18–24.
4. *Бугаенко, В.О.* Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике / В.О. Бугаенко. – М. : Дом НТТМ, 1993. – 81 с.
5. *Гомонов, С.А.* Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10–11 кл. : учебное пособие / С.А. Гомонов. – М. : Дрофа, 2005. – 254 с.
6. Олимпиадные задания по математике. 5–6 классы / авт.-сост. Ю.В. Лепехин. – Волгоград : Учитель, 2010. – 236 с.
7. Олимпиадные задания по математике. 5–11 классы / авт.-сост. О.Л. Безрукина. – Волгоград : Учитель, 2009. – 143 с.
8. *Севрюков, П.Ф.* Тригонометрические подстановки в алгебраических уравнениях / П.Ф. Севрюков // Математика: приложение к газете «1 сентября». – 2010. – №20. – С. 14–17.
9. *Сгибнев, А.И.* О некоторых интересных конференциях школьников / А.И. Сгибнев, А.Б. Скопенков // Математика в школе. – 2011. – №4. – С. 44–45.
10. *Фарков, А.В.* Математические олимпиады. 5–6 классы : учебно-методическое пособие для учителей математики общеобразовательных школ / А.В. Фарков. – 3-е изд., стереотип. – М. : Экзамен, 2008. – 189 с.
11. *Фарков, А.В.* Олимпиадные задачи по математике и методы их решения / А.В. Фарков – М. : Народное образование, 2003. – 112 с.
12. *Фомин, Д.В.* Задачи ленинградских математических олимпиад : методическое пособие / Д.В. Фомин. – Л. : ЛГИУУ, 1990. – 80 с.

Литература для учащихся

1. *Агаханов, Н.Х.* Математические олимпиады школьников: Книга для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.Х. Агаханов, Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко и др. – М. : Просвещение: Учеб. лит., 1997. – 208 с.
2. *Барр, Ст.* Россыпи головоломок / Ст. Барр. – М. : Мир, 1978. – 234 с.
3. *Босс, В.* Интуиция и математика / В. Босс. – М. : Айрис-Пресс, 2003. – 183 с.
4. *Васильев, Н.Б.* Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М. : ГУПИ МП РСФСР, 1963. – 52 с.
5. *Виленкин, Н.Я.* Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин. – М. : Наука, 1975. – 88 с.
6. *Гарднер, М.* Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. – М. : Мир, 1978. – 438 с.
7. *Гарднер, М.* Математические досуги / М. Гарднер. – М. : Мир, 1972. – 412 с.
8. *Гарднер, М.* Математические новеллы / М. Гарднер. – М. : Мир, 1974. – 426 с.
9. *Генкин, С.А.* Серия изданий Санкт-Петербургского городского дворца творчества юных «Математический кружок» / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – СПб. : Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных, 1992–1994.
10. *Довбыш, Р.И.* Математические олимпиады: 906 самых интересных задач с примерами и решениями / Р.И. Довбыш, Л.Л. Потемкина и др. – Р-н/Д : Феникс ; Донецк : Кредо, 2006. – 335 с.
11. *Кордемский, Б.А.* Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. – ГИТТЛ, 1958. – 478 с.
12. *Перельман, Я.И.* Живая математика / Я.И. Перельман. – М. : Учпедгиз, 1953. – 121 с.
13. *Перельман. Я.И.* Занимательная алгебра / Я.И. Перельман. – М. : Наука, 1970. – 200 с.
14. Сборники Московских математических олимпиад 1961–2010 гг.
15. Олимпиадные задачники «Библиотечки «Кванта» 1975–2010 гг.

Учебное издание

Севрюков Павел Федорович

ШКОЛА РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание второе, исправленное

Публикуется в авторской редакции

Техническое редактирование и компьютерная верстка – *Б. А. Ефремова*
Корректура – *Т. С. Шевченко*

Подписано в печать 01.11.2017 г. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура «Times». Формат 60 × 84/16. Усл. печ. л. 10,2. Тираж 1000. Заказ №38.

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-963000.

ИД №03253 код 221 от 15.11.2000 г.
Издательство «Илекса». г. Москва, ул. Буженинова, 30, стр. 4 (офис),
тел.: (495) 964-35-67, 8-964-35-67, e-mail: real@ilexa.ru (отдел реализации), ilexa@nm.ru.

Издательская лицензия ЛР № 065840 от 23.04.1998 г.
Издательство «Ставропольсервисшкола», 355011, г. Ставрополь, ул. 45-я параллель, 36,
тел./факс (8652) 57-47-27, 57-47-25, www.knigozona.ru, e-mail: s-school@mail.ru.

Отпечатано в типографии «Сервисшкола».