П. Ф. Севрюков

ШКОЛА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Издание третье,
исправленное и дополненное

Москва
Ставрополь
2018

УДК 512.13:37.022
ББК 74.262.21
С28

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *А. Я. Симоновский*:
кандидат физико-математических наук *В. М. Ищенко*

Севрюков, П. Ф.

С28 Школа решения задач с параметрами : учебно-методическое пособие / П. Ф. Севрюков. – Изд. третье, испр. и доп. – М. : Илекса ; Ставрополь : Сервисшкола, 2018. – 212 с.

ISBN 978-5-93078-489-3

Авторы пособия систематизируют стандартные задачи, разделив все многообразие возможных задач с параметрами на классы. При этом идея решения «элементарных задач с параметрами» прослеживается при решении рациональных уравнений и неравенств, задач с иррациональными выражениями, а также задач с тригонометрическими, показательными, логарифмическими функциями и задач с трансцендентными функциями.

Во втором издании особое внимание уделено числу решений в рациональных и дробно-рациональных уравнениях и неравенствах и задачам, к ним приводимым.

Предназначено для учащихся классов физико-математического профиля, абитуриентов и учителей математики общеобразовательных учебных заведений.

УДК 512.13:37.022
ББК 74.262.21

Корректор *О. С. Варганова*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *С. А. Мельник*

Подписано в печать 10.12.2017. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,3. Тираж 1000 экз. Заказ № 57.

ИД № 03253 код 221 от 15.11.2000 г. Издательство «Илекса», Москва, Измайловское шоссе, 48а.

Издательская лицензия ЛР № 065840 от 23.04.1998 г. Издательство «Сервисшкола», 355011, г. Ставрополь, ул. 45-я Параллель, 36.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

Отпечатано в типографии «Сервисшкола», г. Ставрополь, ул. 45 параллель, 36.

ISBN 978-5-93078-489-3

© Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н., 2018
© Илекса, 2018
© Сервисшкола, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

I. Линейные уравнения и неравенства 6

II. Простейшие уравнения и неравенства вида $\frac{p(x)}{q(x)}=0$. $\frac{p(x)}{q(x)}>0$; $\frac{p(x)}{q(x)}<0$ 10

III. Квадратные уравнения и неравенства, сводящиеся к ним. 17

IV. Квадратные уравнения и теорема Виета 29

V. Решение задач с использованием свойств квадратного трехчлена 34

VI. Иррациональные уравнения и неравенства 48

VII. Кубические уравнения и параметры 65

VIII. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметрами 74

IX. Решение уравнений, содержащих знак модуля, при наличии параметров 94

X. Решение показательных уравнений и неравенств с параметрами 119

XI. Логарифмические уравнения и неравенства с параметрами 129

XII. Производная и параметры 136

XIII. Системы уравнений и неравенств с параметрами . . . 141

XIV. Задачи с параметрами в заданиях Единого государственного экзамена 160

XV. Избранные задачи с параметрами на вступительных экзаменах в вузы 176

Заключение 209

Библиографический список 212

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с параметрами – один из труднейших разделов школьного курса математики. Здесь, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений и неравенств, приходится обдумывать, по какому признаку нужно разбить множество значений параметра на классы, следить за тем, чтобы не пропустить какие-либо тонкости. Здесь проверяется не натаскивание учащегося на определенные алгоритмы, а понимание смысла конкретной задачи. Поэтому, например, ведущие вузы с повышенной требовательностью к математической подготовке абитуриентов уравнения и неравенства с параметрами часто включают в варианты письменных работ по математике. Общая методика решения произвольных уравнений и неравенств с параметрами отсутствует. При решении приходится исходить из структуры конкретного уравнения и неравенства.

Во всех известных учебно-методических пособиях авторы предлагают перечень разрозненных задач с параметрами, которые встречаются на вступительных экзаменах ведущих вузов страны, задач ЕГЭ и задач олимпиадного характера.

Авторы настоящего пособия не ставят цель рассмотреть весь объем возможных задач с параметрами, считая своей задачей только ознакомление читателей со стандартными подходами к решению задач с параметрами и идеей отыскания контрольных точек, позволяющих судить о координальном изменении характера уравнения и неравенства при различных контрольных значениях параметра (параметров). Особняком стоят системы уравнений и неравенств, имеющие свои особенности решения. При разборе всех задач, заимствованных у других авторов, авторы указывают на источник заимствования.

Пусть дано уравнение $F(x, a) = 0$. (*)

Если ставится задача отыскать все такие пары $(x; a)$, которые удовлетворяют уравнению (*), то исходное уравнение – это уравнение с двумя переменными x и a. Однако относительно уравнения (*) можно поставить и другую задачу. Дело в том, что если придать a какое–либо фиксированное значение, то уравнение (*) можно рассматривать как уравнение с одной переменной x. Решение этого уравнения, естественно, определяется выбранным значением a.

Если ставится задача для каждого значения a из некоторого числового множества A решить уравнение (*) относительно x, то уравнение (*) называется уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра.

Уравнение (*) – это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Уравнения этого семейства получаются из уравнения (*) при различных конкретных значениях a. Так, уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$, у которого областью изменения параметра a является множество $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, есть краткая запись следующего семейства решений:

$$\begin{cases} 6x = -3 & \text{при} \quad a = -1, \\ 0 \cdot x = -2 & \text{при} \quad a = 0, \\ -2x = -1 & \text{при} \quad a = 1, \\ 0 \cdot x = 0 & \text{при} \quad a = 2, \\ 6x = 1 & \text{при} \quad a = 3. \end{cases}$$

Под областью изменения параметра обычно подразумевают (если это не оговорено специально) множество всех действительных чисел, а задачу решения уравнения с параметром формулируют следующим образом: *решить уравнение (*) с переменной x и параметром a — это значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получающихся из уравнения (*) при всех действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно. Тем не менее каждое уравнение семейства должно быть решено. Это можно сделать, если, например, по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества и решить затем заданное уравнение на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых, или при переходе через которые, происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра будем, следуя А. Г. Мордковичу, называть *контрольными.* Не давая строгого определения контрольного значения параметра, покажем на примерах, как эти значения обнаруживаются, как с их помощью множество значений параметра разбивается на подмножества и как затем на каждом из подмножеств решается заданное уравнение (неравенство).

В настоящей работе мы рассматриваем также уравнения и системы уравнений с несколькими параметрами. Например, выражение вида

$$F(x,\ a,\ b) = 0. \qquad (**)$$

является уравнением с одной переменной x и двумя параметрами a, b.

Задачу решения уравнения с двумя параметрами можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение (**) с двумя параметрами — это значит решить семейство уравнений, которые получаются из уравнения (**) при различных действительных значениях параметров.*

Решение уравнения с несколькими параметрами аналогично решению уравнения с одним параметром, однако в данном случае необходимо учитывать, что теперь нужно искать не только контрольные значения отдельных параметров, но и контрольные зависимости между параметрами.

I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Покажем идею решения линейного уравнения вида $a \cdot x = b$:
при $a = 0$, $b = 0$ $\quad x$ – любое действительное число;
при $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение корней не имеет;
при $a \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{b}{a}$.

Пример 1. Решить уравнение $2a(a - 2)\,x = a - 2$. (1)

Решение. Здесь контрольными являются те значения параметра, для которых коэффициент при x обращается в нуль. Такими значениями являются $a = 0$ и $a = 2$. При этих значениях a невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x. В то же время при значениях параметра $a \neq 0$ и $a \neq 2$ это деление возможно. Таким образом, целесообразно множество всех действительных значений параметра разбить на подмножества

$$A_1 = \{0\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 2 \end{cases}$$

и решить уравнение (1) на каждом из этих подмножеств, т. е. решить уравнение (1) как семейство уравнений, полученных из него при следующих значениях параметра: $a = 0$; $a = 2$; $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 2\ . \end{cases}$

Рассмотрим эти случаи.

1. При $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение корней не имеет.
2. При $a = 2$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число.
3. При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ из уравнения (1) получаем $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$,

   откуда $x = \dfrac{1}{2a}$.

Ответ: при $a = 0$ корней нет;
при $a = 2$ $\quad x$ – любое действительное число;
при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $\quad x = \dfrac{1}{2a}$.

Линейным уравнением с параметром *a* относительно *x* называется уравнение вида $f(a) \cdot x = q(a)$, (2)

где $f(a)$ и $q(a)$ − функции от a, x − неизвестное.

Если $f(a) \neq 0$, то уравнение (2) при любом a из области определения функций $f(a)$ и $q(a)$ имеет единственный корень $x = \dfrac{q(a)}{f(a)}$.

Если $f(a)=0$, $q(a) \neq 0$, то уравнение (2) корней не имеет.

Если существуют такие значения a, при которых $f(a) = q(a) = 0$, то решением уравнения является любое x из области, заданной по условию задачи.

Пример 2. Решить уравнение $ax - 2 = 6x + a$.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $(a - 6)x = a + 2$. Поскольку $f(a) = q(a) = 0$ равенства, невозможные ни при каких a, то уравнение не может иметь бесконечное множество корней. Если $f(a) = 0$, то есть $a = 6$, то $q(6) = 8 \neq 0$, и уравнение при $a = 6$ корней не имеет. При $a \neq 6$ $x = \dfrac{a+2}{a-6}$.

Ответ: при $a = 6$ корней не имеет, при $a \neq 6$ $x = \dfrac{a+2}{a-6}$.

Пример 3. Решить уравнение $(m - 2)^2x - 2(m - 2)(m + 3) = 3(m^2 - 4)x$.

Решение. Заменяем уравнение ему равносильным:

$(m - 2)^2x - 3(m^2 - 4)x = 2(m - 2)(m + 3)$;

$-(m - 2)(m + 4)x = (m - 2)(m + 3)$.

Если $m - 2 = 0$, т. е. $m = 2$, то уравнение приобретает вид $0 \cdot x = 0$, и любое число является его корнем. Если $m + 4 = 0$, $m = -4$, то $0 \cdot x = 6$, уравнение корней не имеет. Если $m \neq 2$, $m \neq -4$, то $x = -\dfrac{m+3}{m+4}$.

Ответ: при $m = -4$ уравнение корней не имеет;
при $m = 2$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$;
при $m \neq 2$, $m \neq -4$ $x = -\dfrac{m+3}{m+4}$.

Пример 4. При каких значениях n уравнение $(n^2 - 16)x + n^2 - 3n - 4 = 0$ имеет корни больше единицы?

Решение. Исследуем ситуацию, при которой $n^2 - 16 = 0$, т. е. $n = -4$ и $n = 4$.

При $n = -4$ получаем уравнение $0 \cdot x + 24 = 0$, которое корней не имеет.

При $n = 4$ имеем уравнение $0 \cdot x = 0$, и любое $x \in R$ является корнем данного уравнение, при этом все действительные значения x, большие единицы, являются решениями.

При $n \neq \pm 4$ $x = -\dfrac{(n+1)(n-4)}{(n+4)(n-4)} = -\dfrac{n+1}{n+4}$.

Итак, $-\dfrac{n+1}{n+4} > 1$; $\dfrac{n+1}{n+4} < -1$; $\dfrac{2n+5}{n+4} < 0$.

Ясно, что при $n \in (-4;\ -2{,}5)$ уравнение имеет корни, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: $n \in (-4;\ -2{,}5) \cup \{4\}$.

Пример 5. Решить уравнение при всех значениях параметра: $\dfrac{a^2}{5a-6}x = a - 2 + x$.

Решение. Если $5a - 6 = 0$, т. е. $a = 1{,}2$, то уравнение корней не имеет (оно не определено).

Выполняем очевидные преобразования: $\dfrac{a^2}{5a-6}x = a - 2 + x$; $\dfrac{a^2 - 5a + 6}{5a-6}x = a - 2$; $\dfrac{(a-2)(a-3)}{5a-6}x = a - 2$. Дальнейшие рассуждения дают ответ.

Ответ: при $a = 1{,}2$; $a = 3$ корней нет;
при $a = 2$ x – любое действительное число;
при $a \neq 1{,}2$; $a \neq 3$; $a \neq 2$ $x = \dfrac{5a-6}{a-3}$.

Пример 6. Решить неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Решение. Здесь контрольные значения параметра те же, что и в примере 1, но с их помощью придется выполнять другое разбиение множества действительных чисел, поскольку при решении неравенства существенно не только то, обращается ли в нуль коэффициент перед x или отличен от нуля, но и его знак. Поэтому рассмотрим заданное неравенство в следующих пяти случаях: $a < 0$; $a = 0$; $0 < a < 2$; $a = 2$; $a > 2$.

1. Если $a < 0$, то $2a(a - 2) > 0$, и заданное неравенство преобразуется к виду $x > \dfrac{a-2}{a(a-2)}$, т. е. $x > \dfrac{1}{a}$.

2. Если $a = 0$, то заданное неравенство принимает вид $0 > -2$, что верно при любых значениях x.

3. Если $0 < a < 2$, то $2a(a - 2) < 0$, и заданное неравенство преобразуется к виду $x < \frac{a-2}{a(a-2)}$, т. е. $x < \frac{1}{a}$.

4. Если $a = 2$, то заданное неравенство принимает вид $0 > 0$, что не выполняется ни при каких значениях x.

5. Если $a > 2$, то $2a(a - 2) > 0$ и, как и в первом случае, $x > \frac{1}{a}$.

Ответ: при $a < 0$; $a > 2$ $x > \frac{1}{a}$;

при $a = 0$ $-\infty < x < +\infty$;

при $0 < a < 2$ $x < \frac{1}{a}$;

при $a = 2$ решений нет.

Упражнения

Для каждого значения параметра решить уравнения.

1. $ax + 7 = 3x + a$.
2. $(m^2 - 2m + 1)x - (m^2 + 2m - 3) = 0$.
3. $(a + 2)2x - 20 = 4x + 5a$.
4. $\frac{3}{a-2}x + \frac{a^2-5a}{a^2-5a+6} = \frac{2}{a-3}x$.
5. Уравнение $(a - 1)(x + 2) + (a + 2)(x - 1) = 3$ имеет своим корнем $x = a + 1$. Найти a.
6. $(a^2 - 1)x \le 2a + 2$.

Ответы:

1. При $a = 3$ корней нет, при $a \ne 3$ $x = \frac{a-7}{a-3}$.
2. При $m \ne 1$ $x = \frac{m+3}{m-1}$; при $m = 1$ x – любое число.
3. При $a = 0$ корней нет; при $a = -4$ $x \in R$; при $a \ne 0$, $a \ne -4$ $x = \frac{5}{a}$.
4. При $a = 2$, $a = 3$ корней нет; при $a = 5$ $x \in R$; при $a \ne 5$, $a \ne 2$, $a \ne 3$ $x = -a$.
5. -3; 1.
6. При $a < -1$ и при $a > 1$ $x \le \frac{2}{a-1}$; при $a = \pm 1$ $x \in R$; при $-1 < a < 1$ $x \ge \frac{2}{a-1}$.

II. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВИДА $\frac{p(x)}{q(x)}=0$; $\frac{p(x)}{q(x)}>0$; $\frac{p(x)}{q(x)}<0$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x^2-9}{x-a}=0$.

Решение. Из уравнения $x^2 - 9 = 0$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Ограничение $x \neq a$ в данном случае означает, что если $a = 3$, то $x_1 = 3$ – посторонний корень, а если $a = -3$, то $x_2 = -3$ – посторонний корень.

Ответ: при $a = 3$ $x = -3$; при $a = -3$ $x = 3$; при $a \neq \pm 3$ $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{ax-5-x}{x^2-4}=0$.

Решение. Имеем $(a - 1)x = 5$. Если $a = 1$, то уравнение, а с ним исходное уравнение не имеют корней ($0 \cdot x = 5$); если же $a \neq 1$, то $x = \frac{5}{a-1}$. Остается проверить полученное значение на выполнение условия $x^2 \neq 4$, т. е. $x \neq 2$, $x \neq -2$. Пусть $\frac{5}{a-1} = 2$; тогда $5 = 2a - 2$, $a = 3{,}5$, это означает, что если $a = 3{,}5$, то $x = 2$ – посторонний корень для заданного уравнения.

Аналогично из уравнения $\frac{5}{a-1} = -2$ находим $5 = -2a + 2$, т. е. $a = -1{,}5$ – еще одно значение параметра, при котором найденный корень является посторонним.

Ответ: при $a = 1$, $a = 3{,}5$, $a = -1{,}5$ уравнение корней не имеет;

при $a \neq 1$, $a \neq 3{,}5$, $a \neq -1{,}5$ $x = \frac{5}{a-1}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{(k-1)x+2k-3}{kx-2}=0$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(k-1)x+2k-3=0,\\ kx-2\neq 0.\end{cases}$$

Решаем уравнение системы: при $k = 1$ получаем уравнение $0 \cdot x - 1 = 0$, которое корней не имеет. При $k \neq 1$ $x = \frac{3-2k}{k-1}$. Подставляя полученное значение x в неравенство системы, получим $\frac{3k-2k^2}{k-1} - 2 \neq 0$, откуда ($k \neq 1$) $3k - 2k^2 - 2k + 2 \neq 0$, $2k^2 - k - 2 \neq 0$, $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Ответ: при $k = 1$ и $k = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ уравнение корней не имеет;

при $k \neq 1$ и $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ $x = \frac{3-2k}{k-1}$.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{x}{2a+x} - \frac{2a+x}{x-2a} = \frac{4a}{x^2-4a^2}$.

Решение. Область определения уравнения задается неравенствами $x \neq -2a$; $x \neq 2a$.

После выполнения преобразований получаем

$x^2 - 2ax - 4a^2 - 4ax - x^2 = 4a$,

или после приведения подобных членов $-6ax = 4a^2 + 4a$.

Решение линейных уравнений с параметрами было подробно рассмотрено в разделе I, поэтому заключаем, что при $a = 0$ решением исходного уравнения будет любое действительное x, кроме $x = 0$; при $a \neq 0$ $x = -\frac{2(a+1)}{3}$.

Остается определить те значения a, при которых $-\frac{2(a+1)}{3} \neq 2a$ и $-\frac{2(a+1)}{3} \neq -2a$, откуда находим $a \neq -\frac{1}{4}$ и $a \neq \frac{1}{2}$.

Ответ: при $a = 0$ x – любое действительное число, кроме $x = 0$;

при $a = -\frac{1}{4}$ или $a = \frac{1}{2}$ уравнение корней не имеет;

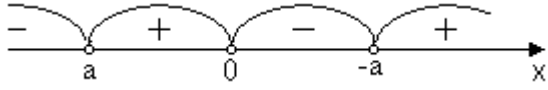
при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$x = -\frac{2(a+1)}{3}$.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{a}{x-a}+\frac{a}{x+a}>0$.

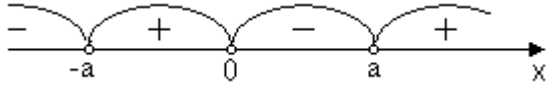
Решение. При $a=0$ неравенство решений не имеет.

При $a<0$ $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}<0$; тогда после упрощения имеем $\frac{x}{(x-a)(x+a)}<0$. Решим неравенство методом интервалов:



$x\in(-\infty;\ a)\cup(0;\ -a)$.

При $a>0$ $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}>0$; тогда после упрощения имеем $\frac{x}{(x-a)(x+a)}>0$. Решим неравенство методом интервалов:



$x\in(-a;\ 0)\cup(a;\ +\infty)$.

Ответ: при $a=0$ неравенство решений не имеет;
при $a<0$ $x\in(-\infty;\ a)\cup(0;\ -a)$.
при $a>0$ $x\in(-a;\ 0)\cup(a;\ +\infty)$.

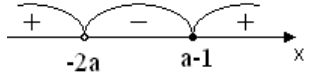
Пример 6. Решить неравенство $\frac{x-a+1}{x+2a}\le 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x-a+1}{x+2a}$.

$D(f)$: $(-\infty;\ -2a)\cup(-2a;+\infty)$.
Нули функции $f(x)$: $x-a+1=0$, $x=a-1$.

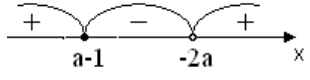
При $a - 1 = -2a$, то есть при $a = \frac{1}{3}$, исходное неравенство принимает вид $1 \le 0$, это позволяет сделать вывод о том, что при $a = \frac{1}{3}$ неравенство решений не имеет.

При $a - 1 > -2a$, то есть при $a > \frac{1}{3}$, покажем решение, используя метод интервалов:



$x \in (-2a;\ a-1]$.

При $a - 1 < -2a$, то есть при $a < \frac{1}{3}$, аналогично будем иметь, показав решение на числовой прямой:



$x \in [a-1;\ -2a)$.

Ответ: при $a = \frac{1}{3}$ неравенство решений не имеет;

при $a > \frac{1}{3}$ $x \in (-2a;\ a-1]$;

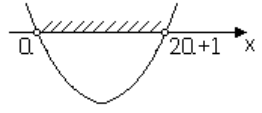
при $a < \frac{1}{3}$ $x \in [a-1;\ -2a)$.

Примечание. При решении неравенства использовано равенство числителя и знаменателя дроби; значение параметра, при котором это равенство выполняется, является контрольным значением для решения неравенства с параметром.

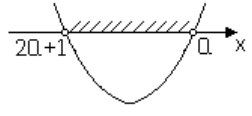
Пример 7. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех x из отрезка [1; 2]?

Решение. Если $a = 2a + 1$, $a = -1$, то неравенство принимает вид $\frac{x-a}{x+a} < 0$, что не выполняется ни при каких значениях x, в частности при x из отрезка [1; 2].

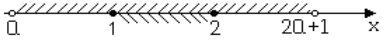
Если же $a < 2a + 1$, $a > -1$, то решение неравенства имеет вид $(a; 2a + 1)$.



Если $a > 2a + 1$, $a < -1$, то решение неравенства имеет вид $(2a + 1; a)$.

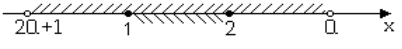


Неравенство должно выполняться для всех x из отрезка $[1; 2]$. Это значит, что отрезок [1; 2] целиком содержится в решении неравенства. Графические модели рассматриваемой задачи представлены на рисунках 1 и 2.



$a > -1$

Рис. 1



$a < -1$

Рис. 2

Рисунок 1 аналитически дает систему неравенств $\begin{cases} a < 1, \\ a > -1, \\ 2 < 2a + 1, \end{cases}$

откуда находим $0{,}5 < a < 1$.

Рисунок 2 аналитически описывается системой неравенств $\begin{cases} 2a+1<1, \\ 2<a, \\ a<-1, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Ответ: (0,5; 1).

Упражнения

Для каждого значения параметра решить уравнения.

1. $\dfrac{(a+2)x-3a+4}{x-2}=0$.

2. $\dfrac{x-1}{c+1}+\dfrac{x+1}{c-1}=\dfrac{xc^2+4-c}{c\ \ -1}$.

3. $\dfrac{a(a-1)x}{(a+1)(x+a)}+\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{a-1}{a+1}$.

4. Существуют ли такие значения параметра *a*, при которых уравнения $\dfrac{(2a+1)x-(a+2)}{x-1}=0$ и $\dfrac{(1-3a)x-a}{x-a}=0$ равносильны?

Решить неравенства при всех значениях параметра.

5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}>0$.

6. $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$.

Указание. Два уравнения равносильны, если множества их решений совпадают (уравнения имеют одинаковые корни или оба корней не имеют).

Ответы:

1. При $a=-2$ и $a=8$ корней нет;

   при $a\neq-2$ и $a\neq 8$ $x=\dfrac{3a-4}{a+2}$.

2. При $c\neq\pm1$; $c\neq 0$; $c\neq 2$ $x=\dfrac{1}{c}$;

   при $c=2$ $x\in R$;

   при $c=\pm1$, $c=0$ корней нет.

3. При $a = 0$ и $a = -1$ корней нет;

при $a \neq 0$; $a \neq -1$ $x = \dfrac{2a^2}{a^2 - a + 2}$.

4. При $a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

5. При $a < 0$ $x \in \left(0;\ -\dfrac{a}{2}\right) \cup (-a;\ +\infty)$;

при $a = 0$ $x \in (0;\ +\infty)$;

при $a > 0$ $x \in \left(-a;\ -\dfrac{a}{2}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

6. При $a < 0$ $a + \sqrt{a^2 - 2a} < x < 1$; $a - \sqrt{a^2 - 2a} < x < 0$;
при $0 \leq a \leq 2$ $0 < x < 1$;

при $a > 2$ $a - \sqrt{a^2 - 2a} < x < a + \sqrt{a^2 - 2a}$; $0 < x < 1$.

Примечание. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, приводящиеся к квадратичным, будут рассмотрены в разделе III.

III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, называется квадратным. Обратим внимание на то, что при решении квадратного уравнения с параметрами необходимо отдельно исследовать случай равенства коэффициента при x^2 нулю, поскольку в этом случае уравнение обращается в линейное (подробно о решении линейных уравнений см. раздел I).

Пример 1. Решить уравнение $(a-1)x^2+2(2a+1)x+(4a+3)=0$. (1)

Решение. В данном случае контрольным значением служит $a = 1$, поскольку при этом значении параметра данное уравнение является линейным (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Целесообразно рассмотреть исходное уравнение как семейство уравнений, получающихся из данного уравнения при следующих значениях параметра: $a = 1$ и $a \neq 1$. Рассмотрим эти случаи.

1. При $a = 1$ уравнение принимает вид $6x + 7 = 0$. Отсюда находим $x = -\frac{7}{6}$.

2. Из множества значений параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант D уравнения обращается в нуль.

Дело в том, что если дискриминант D уравнения равен нулю при $a = a_0$, то при переходе через точку a_0 он может изменить знак (например, если $a < a_0$, то $D < 0$, а если $a > a_0$, то $D > 0$). Вместе с этим при переходе через точку a_0 меняется и число действительных корней квадратного уравнения. Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых дискриминант квадратного уравнения (1) обращается в нуль, также относят к контрольным значениям.

Найдем дискриминант уравнения (1): $\frac{D}{4} = (2a + 1)2 - (a-1)(4a + 3)$,

откуда после упрощений получаем $\frac{D}{4} = 5a + 4$. Из уравнения $\frac{D}{4} = 0$

находим $a = -\frac{4}{5}$ – второе контрольное значение. При этом, если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$; если же $\left[\begin{array}{l} a \geq -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1, \end{array}\right.$ то $D \geq 0$.

Таким образом, остается решить уравнение (1) в указанных двух случаях.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение (1) не имеет действительных корней; если же $a \geq -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$, то находим $x_{1,\,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Ответ: если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

если $a \geq -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$, то $x_{1,\,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Примечание 1. Можно отдельно оговорить, что при $a = -\frac{4}{5}$ уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{(a-1)x^2 + ax - 2}{x^2 - 4} = 0$.

Решение. Область определения уравнения $x \neq \pm 2$. Определим, при каких значениях a числитель дроби обращается в нуль:

при $x = 2$ $\quad (a - 1) \cdot 4 + 2a - 2 = 0$, $6a - 6 = 0$, $a = 1$;

при $x = -2$ $\quad 4a - 4 - 2a - 2 = 0$, $2a - 6 = 0$, $a = 3$.

Итак, при $a = 1$ уравнение корней не имеет (исследовать случай, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уже не имеет смысла), при $a = 3$ получаем уравнение $\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

Далее решаем уравнение $(a-1)x^2+ax-2=0$. $D=a^2+8(a-1)=$ $=a^2+8a-8$.

Если $a^2+8a-8<0$, то уравнение корней не имеет. Неравенство выполняется при $a\in\left(-4-2\sqrt{6};\ -4+2\sqrt{6}\right)$.

Если $a^2+8a-8=0$, то есть $a=-4-2\sqrt{6}$, $a=-4+2\sqrt{6}$, уравнение имеет два равных корня.

При $a=-4-2\sqrt{6}$ имеем

$$x_{1,\,2}=\frac{-a}{2(a-1)}=-\frac{4+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}=-\left(2+\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=2-\sqrt{6}.$$

При $a=-4+2\sqrt{6}$ имеем

$$x_{1,\,2}=\frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-5}=\frac{\left(2-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{6}+5\right)}{-1}=-\left(4\sqrt{6}+10-12-5\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}+2.$$

Если $a\in\left(-\infty;\ -4-2\sqrt{6}\right)\cup\left(-4+2\sqrt{6};\ 1\right)\cup(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$,

то $x_{1,\,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+8a-8}}{2(a-1)}$.

Ответ: при $a\in\left(-4-2\sqrt{6};\ -4+2\sqrt{6}\right)$ уравнение корней не имеет;

при $a=3$ $\quad x=\dfrac{1}{2}$;

при $a=-4-2\sqrt{6}$ $\quad x_1=x_2=2-\sqrt{6}$;

при $a=-4+2\sqrt{6}$ $\quad x_3=x_4=\sqrt{6}+2$;

при $a\in\left(-\infty;\ -4-2\sqrt{6}\right)\cup\left(-4+2\sqrt{6};\ 1\right)\cup(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$

$$x_{5,\,6}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a-8}}{2(a-1)}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{x^2+ax+a}{ax^2+x+a}=0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}x^2+ax+a=0,\\ ax^2+x+a\neq 0.\end{cases}$

Решаем уравнение $x^2 + ax + a = 0$. $D = a^2 - 4a$.

a. Если $a^2 - 4a = 0$, то $a = 0$ или $a = 4$.

При $a = 0$ $x = 0$, но тогда не выполняется неравенство системы, и $x = 0$ – не является корнем данного уравнения.

Если $a = 4$, то $x = -2$, неравенство системы выполняется и, следовательно, при $a = 4$ $x = -2$ (два равных корня).

b. Если $a^2 - 4a < 0$, т. е. $a \in (0; 4)$, то уравнение корней не имеет.

c. Если $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, то $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Если $x = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$, то находим те значения параметра, при которых имеет место неравенство

$$a\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right)^2 + \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} + a \neq 0;$$

$$\frac{a}{4}\left(a^2 + a^2 - 4a - 2a\sqrt{a^2 - 4a}\right) + \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} + a \neq 0;$$

$$2a^3 - 4a^2 - 2a^2\sqrt{a^2 - 4a} - 2a + 2\sqrt{a^2 - 4a} + 4a \neq 0;$$

$$a^3 - 2a^2 + a - a^2\sqrt{a^2 - 4a} + \sqrt{a^2 - 4a} \neq 0;$$

$a(a-1)^2 - \sqrt{a^2 - 4a}\left(a^2 - 1\right) \neq 0$, откуда $a \neq 1$ (уже входит в промежуток (0; 4)) и $a(a-1) - (a+1)\sqrt{a^2 - 4a} \neq 0$.

Решаем уравнение $a(a-1) = (a+1)\sqrt{a^2 - 4a}$;
$a^2(a^2 - 2a + 1) = (a^2 + 2a + 1)(a^2 - 4a)$; $8a^2 + 4a = 0$ и с учетом $a \neq 0$ $a = -\dfrac{1}{2}$.

Итак, если $a = -\dfrac{1}{2}$, то уравнение имеет два равных корня

$x = \dfrac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$. ($a = -\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения

$a(a-1)=(a+1)\sqrt{a^2-4a}$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой).

При $x = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$ получаем

$$a\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)^2+\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}+a\neq 0.$$

Выясним, при каких значениях a имеет место неравенство

$$\frac{a}{4}\left(2a^2-4a+2a\sqrt{a^2-4a}\right)+\frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}+a\neq 0;$$

$$2a^3-4a^2+2a^2\sqrt{a^2-4a}-2a-2\sqrt{a^2-4a}+4a\neq 0;$$

$$2a(a-1)^2+2\sqrt{a^2-4a}\left(a^2-1\right)\neq 0.$$

Значение $a = 1$ входит в область тех значений параметра, при которых уравнение корней не имеет.

Далее $a(a-1)\neq -(a+1)\sqrt{a^2-4a}$, и рассуждения аналогичны уже приведенным выше. Вновь получаем $a\neq -\dfrac{1}{2}$. Легко видеть, что значение $a=-\dfrac{1}{2}$ не является корнем уравнения $a(a-1)=-(a+1)\sqrt{a^2-4a}$.

Ответ: при $a \in [0;\ 4)$ уравнение корней не имеет;

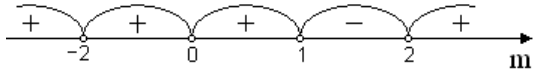
при $a\in(-\infty;\ -0)\cup[4;\ +\infty)$ $x = \dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{2x}{m^2+2m}-\dfrac{1}{m^2-2m}=\dfrac{x^2-2}{m^2-4}$.

Решение. При $m = 0$ и $m = \pm 2$ уравнение не определено, а поэтому корней не имеет. Если $m\neq 0$ и $m\neq\pm 2$ исходное уравнение равносильно уравнению $2x(m-2)-(m+2)=x^2m-2m$, $x^2m-2x(m-2)-m+2=0$.

Находим дискриминант полученного квадратного уравнения: $0{,}25 \cdot D = (m - 2)^2 + m(m - 2) = 2(m - 2)(m - 1)$.

На координатной прямой с учетом $m = 0$ и $m = \pm 2$ покажем знаки дискриминанта:



Уравнение не имеет корней при $m \in (1;\ 2] \cup \{0;\ -2\}$.

При $m \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$

$$x = \frac{m - 2 \pm \sqrt{2(m-2)(m-1)}}{m}.$$

При $m = 1$ уравнение имеет единственный корень $x = -1$.

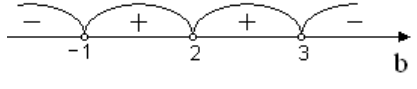
Ответ: при $m \in (1;\ 2] \cup \{0;\ -2\}$ уравнение корней не имеет;
при $m = 1$ $x = -1$;
при $m \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$;

$$x = \frac{m - 2 \pm \sqrt{2(m-2)(m-1)}}{m}.$$

Пример 5. Решить уравнение $\dfrac{b}{3x} = \dfrac{2 - x}{b - 2}$.

Решение. Область определения уравнения задается неравенством $x \neq 0$. При $b = 2$ уравнение не определено и, следовательно, корней не имеет.

При $b \neq 2$ и $x \neq 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $3x(2 - x) = b^2 - 2b$, $3x^2 - 6x + b^2 - 2b = 0$. Находим $\dfrac{D}{4} = 9 - 3(b^2 - 2b) = -3b^2 + 6b + 9 = -3(b^2 - 2b - 3) = -3(b + 1)(b - 3)$. Покажем на координатной прямой знаки дискриминанта:



1) при $b < -1$ и $b > 3$ уравнение корней не имеет;
2) при $b = -1$ и $b = 3$ уравнение имеет два равных корня $x = 1$;

3) при $-1 < b < 2$ и $2 < b < 3$ уравнение имеет два корня $x_{1,\,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3(b+1)(b-3)}}{3}$.

Теперь проверим, нет ли среди найденных корней таких, при которых $x = 0$.

Очевидно, что $x = \dfrac{3+\sqrt{-3(b+1)(b-3)}}{3} > 0$ при всех допустимых значениях параметра.

Корень $x = \dfrac{3-\sqrt{-3(b+1)(b-3)}}{3}$ равен нулю при $\sqrt{-3(b+1)(b-3)} = 3$; $-3(b^2 - 2b - 3) = 9$; $b^2 - 2b = 0$, откуда $b = 0$ или $b = 2$.

Ответ: при $b \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ +\infty) \cup \{2\}$ уравнение корней не имеет;
при $b = 0$ $x = 2$;

при $b \in [-1;\ 2) \cup (2;\ 3]$ $x_{1,\,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3(b+1)(b-3)}}{3}$.

Теперь рассмотрим решение квадратных неравенств на примере, в котором из уравнения (пример 1) сделано неравенство.

Пример 6. Решить неравенство $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) \le 0$. (2)

Решение. Возвращаясь к решению примера 1, вспомним, что нами получены два контрольных значения параметра a – значения 1 и $-\dfrac{4}{5}$. Заданное неравенство придется рассмотреть в каждом из следующих пяти случаев: $a < -\dfrac{4}{5}$; $a = -\dfrac{4}{5}$; $-\dfrac{4}{5} < a < 1$; $a = 1$; $a > 1$.

1) $a < -\dfrac{4}{5}$. В этом случае $D < 0$ и коэффициент при x^2, равный $(a - 1)$, отрицателен. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом при всех x имеет знак старшего коэффициента, т. е. в рассматриваемом случае заданное неравенство выполняется при всех x.

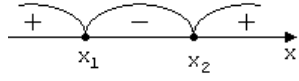
2) $a = -\dfrac{4}{5}$. Неравенство (2) принимает вид $-\dfrac{9}{5}x^2 - \dfrac{6}{5}x - \dfrac{1}{5} \le 0$, или $9x^2 + 6x + 1 \ge 0$, т. е. $(3x + 1)^2 \ge 0$. Это неравенство верно при любых x.

3) $-\frac{4}{5} < a < 1$. В этом случае $D > 0$, и трехчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1} \text{ и } x_2 = \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Значит, заданное неравенство можно преобразовать к виду $(a-1)(x-x_1)(x-x_2) \le 0$ и далее $(x-x_1)(x-x_2) \ge 0$ (мы учли, что в рассматриваемом случае $a-1<0$). Полученное неравенство можно решать методом интервалов, нужно лишь правильно расположить на числовой прямой точки x_1 и x_2.

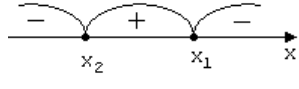
Имеем $-(2a+1)+\sqrt{5a+4} > -(2a+1)-\sqrt{5a+4}$. Разделив обе части этого неравенства на отрицательное число $a-1$,



получим $\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1} < \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, т. е. $x_1 < x_2$. Тогда решение неравенства $x \in (-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$.

4) $a = 1$. Неравенство (2) принимает вид $6x + 7 \le 0$, откуда $x \le -\frac{7}{6}$.

5) $a > 1$. В этом случае $D > 0$; неравенство, как и в случае 3, преобразуется к виду $(a-1)(x-x_1)(x-x_2) \le 0$ и далее $(x-x_1)(x-x_2) \le 0$ (мы учли, что в рассматриваемом случае $a-1>0$). Однако на этот раз, в отличие от случая 3, имеем $\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1} > \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, т. е. $x_1 > x_2$; следовательно, решение неравенства (2) имеет вид $x \in [x_2;\ x_1]$.



Ответ: при $a \le -\frac{4}{5}$ $x \in R$;

при $-\frac{4}{5} < a < 1$ $x \in (-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$;

при $a = 1$ $x \in \left(-\infty;\ -\frac{7}{6}\right]$;

при $a > 1$ $x \in [x_2;\ x_1]$,

где $x_1 = \frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$, $x_2 = \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 7. При каких значениях параметра a неравенство $(x^3 - 8)(a - x) \ge 0$ имеет единственное решение?

Решение. Запишем неравенство в виде $(x-2)(x^2+2x+4)(a-x) \ge 0$. Так как $x^2 + 2x + 4 > 0$ при всех x ($D < 0$), то получаем неравенство $(x - 2)(x - a) \le 0$. Если $a = 2$, то получаем $(x - 2)^2 \le 0$, откуда $x = 2$. Если же $a \ne 2$, то при $a < 2$ имеем $a \le x \le 2$, при $a > 2$ имеем $2 \le x \le a$. Итак, имеем единственное решение только при $a = 2$.

Ответ: 2.

Пример 8. При каких значениях параметра a в множестве решений неравенства $(1 - x)(x - a) \ge 0$ содержится пять целых чисел?

Решение. Имеем $(x - 1)(x - a) \le 0$. Нужно рассмотреть три случая: $a < 1$; $a = 1$; $a > 1$.

1. Если $a < 1$, то решением данного неравенства служит отрезок $[a; 1]$. Тогда пять целых чисел, принадлежащих этому отрезку, должны быть такими: 1; 0; −1; −2; −3. Значит, $-3 \in [a; 1]$, тогда как $-4 \notin [a; 1]$. Это выполняется при условии $-4 < a \le -3$.
2. Если $a = 1$, то решение неравенства состоит из одной точки $x = 1$. Этот случай нас не устраивает.
3. Если $a > 1$, то решением неравенства служит отрезок $[1; a]$. Пять целых чисел, принадлежащих этому отрезку, должны быть такими: 1; 2; 3; 4; 5. Значит, $5 \in [1; a]$, тогда как $6 \notin [1; a]$. Это выполняется при условии $5 \le a < 6$.

Ответ: $a \in (-4;\ -3] \cup [5;\ 6)$.

Рассмотрим примеры решения нескольких рациональных неравенств.

Пример 9. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2ax + 9 > 0$ выполняется при всех действительных x?

Решение. Эта задача основана на школьной теореме: если дискриминант D квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ отрицателен, то при всех x знак y совпадает со знаком старшего коэффициента a. Значит, в данном примере достаточно потребовать выполнения неравенства $D < 0$.

Ответ: $(-3;\ 3)$.

Естественным продолжением рассмотренного примера служит следующий.

Пример 10. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 2(a + 1)x + 2a + 2 \le 0$ выполняется при всех x?

Решение. Задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} a < 0, \\ D \le 0. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty;\ -1]$.

Пример 11. При всех значениях параметра a решить неравенство $x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 \ge 0$.

Решение. Применяя теорему Виета для квадратного уравнения $x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 = 0$, получим, что $x_1 = 1$ и $x_2 = a^2$. В случае совпадения корней, т. е. когда $a^2 = 1$ и $a = \pm 1$, неравенство выполняется при любых x.

При $a^2 > 1$, то есть при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$, $x \in (-\infty;\ 1] \cup [a^2;\ +\infty)$.

При $a \in (-1;\ 1)$ $x \in (a^2;\ 1)$.

Ответ: при $a = \pm 1$ $x \in R$;

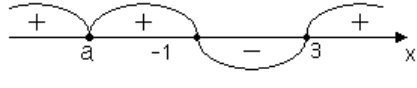
при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$ $x \in (-\infty;\ 1] \cup [a^2;\ +\infty)$;

при $a \in (-1;\ 1)$ $x \in (a^2;\ 1)$.

Пример 12. При каких значениях параметра a решением неравенства $(x - a)^2(x - 3)(x + 1) \le 0$ служит сплошной промежуток?

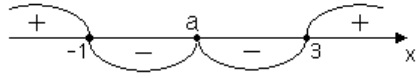
Решение. Очевидно, что задача имеет две контрольные точки: $x = -1$ и $x = 3$; поэтому рассмотрим решение данного неравенства при следующих значениях a: $a < -1$; $a = -1$; $-1 < a < 3$; $a = 3$; $a > 3$.

1. Если $a < -1$, то решение неравенства имеет вид $x = a$; $-1 \le x \le 3$.



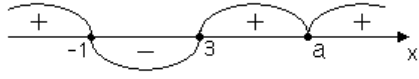
2. Если $a = -1$, то неравенство принимает вид $(x - 3)(x + 1)^3 \le 0$; его решением служит отрезок $[-1;\ 3]$.

3. Если $-1 < a < 3$, то решением неравенства является отрезок $[-1;\ 3]$.



4. Если $a = 3$, то неравенство принимает вид $(x - 3)^3(x + 1) \le 0$, его решением служит отрезок $[-1;\ 3]$.

5. Если $a > 3$, то решение неравенства имеет вид $x = a$; $-1 \le x \le 3$.



Ответ: решение неравенства представляет собой сплошной промежуток при $-1 \le a \le 3$.

Примечание. В задачах с параметрами особое внимание следует уделять внимательному прочтению условия задачи, поскольку даже незначительное отклонение от стандартного сюжета может приводить к грубым ошибкам в решении задачи.

Упражнения

Решить уравнения для каждого значения параметра.

1. $ax^2 + 2x(a + 2) + 2a + 1 = 0$.
2. $2x^2(m + 1) + 2x(m - 2) + m - 2 = 0$.
3. $(a^2 + a - 2)x^2 = 2(a + 1)x - 1$.
4. При каких значениях a уравнение $ax^2 + \sqrt{a^2 - 1} \cdot x - a = 0$ имеет один корень?
5. Найти все значения m, при которых квадратный трехчлен $(m-1)x^2 + 2(m+1)x - 9$ имеет один корень.
6. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2\sqrt{3}\,(a-3)x + a^2 - 3a + 2 = 0$ имеет решение?
7. При каких значениях c уравнение $cx^2 - 2\sqrt{1-2c} \cdot x - c = 0$ корней не имеет?

8. При каких значениях параметра a неравенство $(x-a)(x-2)\le 0$ имеет единственное решение?

Ответы:

1. При $a \in (-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$ корней нет; при $a = 0$ $x = -0{,}25$;

при $a \in [-1;\ 0)\cup(0;\ 4]$ $x = \dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{-a^2+3a+4}}{a}$.

2. При $m=-1$ $x=-0{,}5$; при $m\in[-4;\ 2]$ $x = \dfrac{2-m\pm\sqrt{(2-m)(m+4)}}{2(m+1)}$;

при $m \in (-\infty;\ -4)\cup(2;\ +\infty)$ корней нет.

3. При $a = 1$ $x = 0{,}25$; при $a \in (-\infty;\ -3)$ корней нет; при

$a \in [-3;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ $x_{1,\,2} = \dfrac{a+1\pm\sqrt{a+3}}{a^2+a-2}$.

4. Ни при каких.

5. При $m = 1$ и $m = \dfrac{-11\pm\sqrt{153}}{2}$.

6. При $a \in (-\infty;\ 2{,}5]\cup[5;\ +\infty)$.

7. При $c > 0{,}5$.

8. $a = 2$.

Примечание 2. Утверждение, что при $a = -4/5$ уравнение имеет единственный корень $x = -1/3$, является ошибкой. В уравнении $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен с фиксированными коэффициентами, всегда имеются пары сопряженных комплексных корней. Поэтому четность степени многочлена совпадает с четностью числа действительных корней уравнения $P_n(x) = 0$. Следовательно уравнение второй степени не может иметь одного корня (только два равных)!

IV. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМА ВИЕТА

Напомним теорему Виета для квадратного уравнения.

Теорема. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) с дискриминантом $D \geq 0$ имеет корни x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (в случае $D = 0$ считаем $x_1 = x_2$).

Если $\frac{c}{a} < 0$, то $D > 0$, и уравнение имеет два корня, причем эти корни имеют разные знаки:

при $x_1 + x_2 > 0$ положительный корень больше модуля отрицательного;

при $x_1 + x_2 < 0$ положительный корень меньше модуля отрицательного.

Если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$, то оба корня положительные.

Если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$, то оба корня отрицательные.

Покажем, как используются указанные соотношения, полученные из теоремы Виета, в задачах с ограничениями на знаки корней квадратного уравнения и соотношения между корнями.

Пример 1. При каких значениях m корни уравнения $x^2 + mx - m^2 + 4 = 0$ имеют разные знаки?

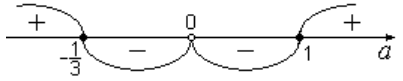
Решение. Достаточно решить неравенство $4 - m^2 < 0$, откуда $m \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 2. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $ax^2 + (a + 1)x + a = 0$ положительны?

Решение. Поскольку в условии задачи речь идет о двух корнях уравнения, $a \neq 0$ и $D > 0$. Дискриминант $D = (a + 1)^2 - 4a^2 = -3a^2 + 2a + 1$, получаем систему неравенств

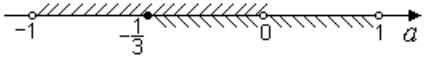
$$\begin{cases} -3a^2 + 2a + 1 \leq 0, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 2a - 1 \geq 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$$



Итак, уравнение имеет два корня при $a \in \left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup (0;\ 1]$.

Поскольку $x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$, необходимо решить неравенство $-\frac{a+1}{a} > 0;\ \frac{a+1}{a} < 0.$

Находим общее решение:



Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right)$.

Пример 3. При каких значениях m оба корня уравнения $(m^2 - 4)x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$ отрицательные?

Решение. Замечаем, что при $m = \pm 2$ уравнение обращается в линейное и иметь двух корней не может. $D = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 16 = -4m + 17$. Уравнение имеет два корня при $-4m + 17 \geq 0$, т. е. при $m \leq 4{,}25$ и $m \neq \pm 2$.

Так как $x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m^2-4}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m^2-4}$, а $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, то

$$\begin{cases} -\frac{2m-1}{m^2-4} < 0, \\ \frac{1}{m^2-4} > 0; \end{cases} \begin{cases} 1-2m < 0, \\ m^2-4 > 0; \end{cases} \begin{cases} m > 0{,}5, \\ (m-2)(m+2) > 0; \end{cases} \begin{cases} m > 0{,}5, \\ m > 2, \end{cases} \text{ откуда } m > 2.$$

Учитывая, что $m \leq 4{,}25$, $m \neq \pm 2$, приходим к выводу, что $m \in (2;\ 4{,}25]$.

Ответ: $(2;\ 4{,}25]$.

Пример 4. При каких значениях a корни уравнения $3x^2 + ax + 2 = 0$ являются действительными, а сумма кубов этих корней равна их удвоенной сумме?

Решение. Прежде всего найдем те значения параметра, при которых уравнение имеет действительные корни, для чего решим неравенство $D \geq 0$; $a^2 - 24 \geq 0$ (в случае равенства дискриминанта нулю будем считать, что уравнение имеет два равных корня). Решение неравенства дает $a \in (-\infty;\ -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6};\ +\infty)$.

Согласно условию задачи имеем равенство $x_1^3 + x_2^3 = 2(x_1 + x_2)$;

$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2) = 0$, откуда $x_1 + x_2 = 0$, или

$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 2 = 0$. Но по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{a}{3}$,

а $x_1x_2 = \dfrac{2}{3}$, поэтому $-\dfrac{a}{3} = 0$, или $\dfrac{a^2}{9} - 4 = 0$. Решая эти уравнения,

находим, что $a = 0$ или $a = \pm 6$. $0 \notin (-\infty;\ -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6};\ +\infty)$.

Ответ: $a = \pm 6$.

Пример 5. Найти положительный коэффициент b уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, если известно, что при увеличении каждого из корней исходного уравнения на единицу они становятся корнями уравнения $x^2 - b^2x - b = 0$.

Решение. Для того, чтобы оба уравнения имели корни, необходимо, чтобы дискриминанты обоих уравнений были неотрицательными: $\begin{cases} b^2 + 4 \geq 0, \\ b^4 + 4b \geq 0, \end{cases}$ откуда $b \in \left(-\infty;\ -\sqrt[3]{4}\right] \cup [0;\ +\infty)$.

Применяя теорему Виета для первого уравнения, получаем

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$ (*). После увеличения каждого из корней первого уравнения на единицу они становятся корнями второго уравнения, поэтому $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2 = b^2, \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = -b. \end{cases}$

Далее с учетом (*) получаем $\begin{cases} b^2+b-2=0, \\ x_1x_2+x_1+x_2+1=-b. \end{cases}$

Первое уравнение полученной системы дает $b = 1$ или $b = -2$, а второе обращается в верное равенство при любых значениях b $(-1 - b = -b - 1)$.

Ответ: $b = 1$ или $b = -2$.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $x^2 - (3a + 2)x + 3a^2 = 0$ в три раза больше другого.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, а D — его дискриминант. Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=3a+2, \\ x_1x_2=3a^2, \\ x_1=3x_2, \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2=3a+2, \\ 3x_2^2=3a^2, \\ x_1=3x_2, \\ -3a^2+12a+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{3a+2}{4}, \\ \left(\dfrac{3a+2}{4}\right)^2=a^2, \\ 3a^2-12a-4<0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы: $9a^2 + 12a + 4 = 16a^2$, $7a^2 - 12a - 4 = 0$. $D_1 = 36 + 28 = 64$, $a_1 = 2$, $a_2 = -\dfrac{2}{7}$. Оба полученных значения удовлетворяют неравенству системы.

Ответ: 2; $-\dfrac{2}{7}$.

Упражнения

1. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительны.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ имеет два корня, разность которых равна их произведению.

3. Разность корней квадратного уравнения $x^2 + (a - 2)x - 2a = 0$ равна 5. Найти a.

4. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2\sqrt{3}(a - 3)x + a^2 - 3a + 2 = 0$ положительны.

5. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - 4a + 1 = 0$ удовлетворяют неравенствам $x_1 \geq a$; $x_2 \geq 0$; $x_1 > x_2$.

6. При каких значениях m оба корня уравнения $(m - 3)x^2 + 2(m + 1)x - 2m = 0$ положительны?

7. Найти все значения b, при которых уравнение $2(3 - b)x^2 + 4(1 - b)x + |2b - 5| = |2b+7|$ имеет два различных корня, а сумма этих корней отрицательна.

Ответы:

1. $(-\infty;\ -3)\cup[2;\ 6]$.

2. 2.

Указание. $x_1 - x_2 = x_1x_2$; $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2x_2^2$; $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2x_2^2$.

3. 3; -7.

Указание. $x_1 - x_2 = 5$; $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25$, или непосредственно найти корни $x = 2$; $x = -a$.

4. $[5;\ +\infty)$.

5. $[0{,}5;\ +\infty)$.

6. (1; 3).

7. $\left(-\infty;\ -2-\sqrt{21}\right)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$.

V. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом. Он имеет два корня при $D > 0$, один корень (два равных) при $D = 0$ и не имеет корней при $D < 0$.

Пример 1. Что можно сказать о знаках параметров a, b, c, если график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид, изображенный на рисунке 1?

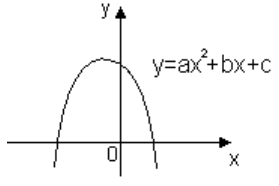


Рис. 1

Решение. 1. Ветви параболы направлены вниз, поэтому $a < 0$.

2. Так как парабола пересекает ось y в точке $(0; c)$, то $c > 0$.

3. Поскольку вершина параболы расположена в левой полуплоскости, ее абсцисса x_0 отрицательна. Но $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и, значит, $-\frac{b}{2a} < 0$; $\frac{b}{2a} > 0$; $b < 0$ (не забудьте, что $2a < 0$).

Ответ: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

Пример 2. 1. Что можно сказать о знаках параметров a, b, c, если известно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-4; 0)$, $(1; 0)$, $(-3; -2)$?

2. Найти значения a, b, c.

Решение. 1. Отметим заданные три точки и сделаем эскиз графика (рис. 2).

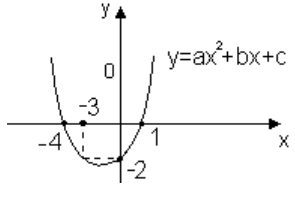


Рис. 2

Далее можно рассуждать, как при решении примера 1.

2. Согласно условию $\begin{cases} 0 = 16a - 4b + c, \\ 0 = a + b + c, \\ -2 = 9a - 2b + c. \end{cases}$

Решая эту систему, находим $a = 2$, $b = 6$, $c = -8$.

Ответ: 1. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$;
2. $a = 2$, $b = 6$, $c = -8$.

Пример 3. При каких значениях a квадратный трехчлен $3(a - 1)x^2 + 3(a + 2)x - 1$ имеет два корня?

Решение. Необходимо ответить на вопрос: «Когда уравнение $3(a - 1)x^2 + 3(a + 2)x - 1 = 0$ имеет два корня?»

Отметим, что при $a = 1$ уравнение обращается в линейное и не может иметь двух корней. При равенстве дискриминанта нулю квадратное уравнение имеет единственный корень. Итак, выясним, при каких значениях a дискриминант квадратного уравнения $D > 0$:

$$9(a + 2)^2 + 12(a - 1) > 0;\ 3(a^2 + 4a + 4) + 4a - 4 > 0;\ 3a^2 + 16a + 8 > 0.$$

Далее, решая квадратное неравенство, получаем $D_1 = 64 - 24 = 40$.

$$a_{1,\,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{3}.$$

Используя метод интервалов с учетом ранее полученного ограничения, имеем $a \in \left(-\infty;\ \frac{-8-2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{-8+2\sqrt{10}}{3};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ: при всех $a \in \left(-\infty;\ \frac{-8-2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{-8+2\sqrt{10}}{3};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a корни трехчлена $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3$ положительны?

Решение.

I способ. Выделим контрольное значение параметра $a = 2$. Тогда трехчлен примет вид $-4x + 5$ – это двучлен. Значит, $a = 2$ является одним из ответов на вопрос задачи.

Пусть $a \neq 2$, тогда $D_1 = 6 - a$. При $a > 6$ дискриминант отрицателен, и уравнение корней не имеет; этот случай нас не интересует. При $a = 6$ дискриминант обращается в нуль, и уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = \frac{3}{2} > 0$, и, значит, $a = 6$ является одним из ответов на вопрос задачи. Остается рассмотреть случай $a < 6$ (причем $a \neq 2$). $x_{1,\,2} = \frac{a \pm \sqrt{6-a}}{a-2}$. Необходимо выяснить, при каких значениях параметра a как $x_1 > 0$, так и $x_2 > 0$.

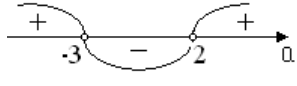
Для этого необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{a+\sqrt{6-a}}{a-2} > 0, \\ \frac{a-\sqrt{6-a}}{a-2} > 0. \end{cases}$

Решение этой системы дает ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (2;\ 6]$.

Заметим, что каждое неравенство системы решаем методом интервалов.

1) $f(a) = \frac{a+\sqrt{6-a}}{a-2}$; $D(f)$: $a \neq 2$.

Нули $f(a)$: $a + \sqrt{6+a} = 0$; $a^2 + a - 6 = 0$; $a = -3$.



2) $g(a) = \frac{a-\sqrt{6-a}}{a-2}$; $D(g)$: $a \neq 2$. Нули g: $a = \sqrt{6-a}$; $a = 2$. Общее решние может быть показано на оси.

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (2;\ 6]$.

II способ. Используя теорему Виета, получим $\begin{cases} \frac{2a}{a-2} > 0, \\ \frac{a+3}{a-2} > 0. \end{cases}$ Решая

систему неравенств, получим $a \in (-\infty;\ -3) \cup (2;\ +\infty)$. С учетом условия $a \le 6$ получаем $a \in (-\infty;\ -3) \cup (2;\ 6]$.

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (2;\ 6]$.

III способ. Снова зафиксируем $a = 2$, которое не дает ответа на вопрос задачи.

Пусть $a \ne 2$. Тогда перепишем уравнение в виде $x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2} = 0$

и рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2}$. Его графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как должно быть $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то парабола пересекает ось x в двух точках правой полуплоскости (или касается этой оси в правой полуплоскости). На рисунке 3 представлен схематический чертеж рассматриваемой задачи.

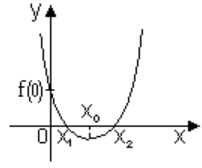


Рис. 3

Теперь рассматриваемую модель опишем аналитически адекватной ей системой условий.

1. Так как имеются точки пересечения (или точка касания) параболы с осью x, то $D \ge 0$, т. е. $6 - a \ge 0$.

2. Замечаем, что $f(0) > 0$, т. е. $\frac{a+3}{a-2} > 0$.

3. Замечаем, что вершина параболы расположена в правой полуплоскости, т. е. абсцисса x_0 положительна. Для параболы $y = ax^2 + bx + c$ абсцисса вершины x_0 находится по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$; значит, в данном случае $x_0 = \frac{a}{a-2}$. Итак, $\frac{a}{a-2} > 0$.

В результате приходим к системе неравенств: $\begin{cases} 6-a \geq 0, \\ \dfrac{a+3}{a-2} > 0, \\ \dfrac{a}{a-2} > 0, \end{cases}$

которая была решена (при II способе решения).

Замечание. Из приведенных трех способов решения последний является не только самым изящным. Безусловно, он проще, чем I способ, где приходится решать систему неравенств. Безусловно, он методически важнее, поскольку здесь естественны взаимосвязи между всеми типами математических моделей (вербальная модель – словесное описание задачи, графическая модель – график квадратного трехчлена, аналитическая модель – описание задачи системой неравенств), логичен и оправдан плавный переход от одной модели к другой. Развивая эту идею, можно предложить учащимся целый ряд задач на принадлежность корней квадратного трехчлена заданному промежутку.

Остановимся подробнее на расположении корней квадратного трехчлена, для чего сформулируем несколько утверждений и поясним их на конкретных примерах.

Утверждение 1. Для того чтобы квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имел два корня, один из которых меньше α, а другой больше α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a \cdot f(\alpha) < 0$.

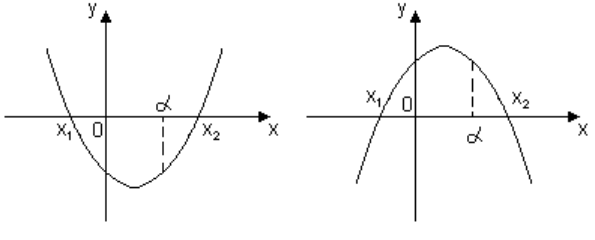


Рис. 4

$a > 0, \quad f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0. \quad a < 0, \quad f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0.$

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых один корень уравнения $x^2 - (3a + 2)x + 2a - 1 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

Решение. Согласно утверждению 1 решаем неравенство $f(1) < 0$: $1 - (3a + 2) + 2a - 1 < 0$, $-a < 2$, $a > -2$.

Ответ: $(-2;\ +\infty)$.

Утверждение 2. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше α, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$

Из рисунка 5 видно, что при $a > 0$, $f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, очевидно, что при $D = 0$ вершина параболы находится в точке $(x_0;\ 0)$.

Аналогично при $a < 0$, $f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$.

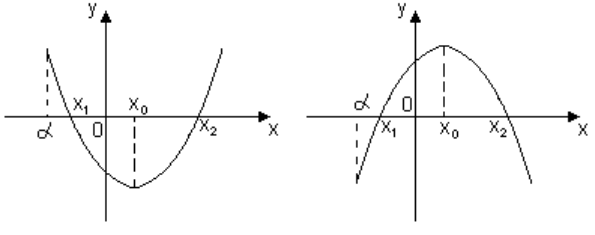


Рис. 5

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3.

Решение. Условие задачи выполняется при всех значениях параметра, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 9a^2 - 2 + 2a - 9a^2 \geq 0, \\ 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0, \\ 3a > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 9(a-1)\left(a - \dfrac{11}{9}\right) > 0, \end{cases}$$

откуда $a > \dfrac{11}{9}$.

Ответ: $\left(\dfrac{11}{9};\ +\infty\right)$.

Утверждение 3. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были меньше α, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$

Наглядной иллюстрацией выполнения этих условий служит рисунок 6.

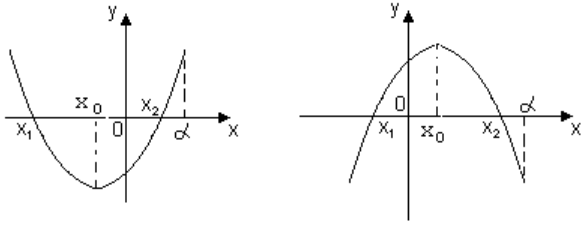


Рис. 6

При $a > 0$, $f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, $x_0 < \alpha$, $D \geq 0$; при $a < 0$, $f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$, $x_0 < \alpha$. $D \geq 0$.

Пример 7. При каких значениях m корни уравнения $(m + 1)x^2 + 2x - 3m - 1 = 0$ меньше 1?

Решение. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 1 + (m+1)(3m+1) \geq 0, \\ (m+1) \cdot f(1) > 0, \\ -\dfrac{1}{m+1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m^2 + 4m + 2 \geq 0, \\ (m+1)(2-2m) > 0, \\ \dfrac{m+2}{m+1} > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы не представляет труда, получаем, что $m \in (-1; 1)$. Заметим, что в задаче не оговаривается число корней уравнения, поэтому, рассматривая случай, когда $m + 1 = 0$, $m = -1$, получаем $x = -1 < 1$.

Ответ: $[-1; 1)$.

Рассмотрим еще один из возможных вариантов решения задач подобного типа.

Пример 8. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ меньше, чем 3?

Решение. При $a = 2$ получаем $-4x + 5 = 0$, откуда $x = \frac{5}{4} < 3$. Значит, $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 2$. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2} = 0$ и рассмотрим график функции $f(x) = x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2}$. Графически условие задачи покажем на рисунке 7.

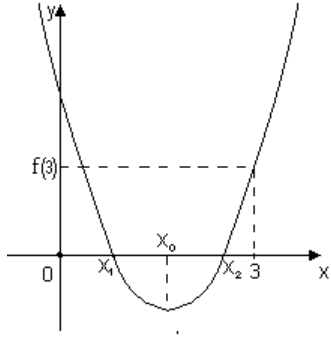


Рис. 7

Дадим аналитическое описание этой модели:

1) $D \geq 0$ (или $\frac{D}{4} \geq 0$, это не принципиально);
2) $f(3) > 0$;
3) $x_0 < 3$.

Расшифруем эти условия:

1) $\frac{D}{4} = 6 - a$, значит, $6 - a \geq 0$;

2) $f(3) = 9 - \frac{2a}{a-2} \cdot 3 + \frac{a+3}{a-2} = \frac{4a-15}{a-2}$;

3) $x_0 = \frac{a}{a-2}$.

Таким образом, получаем систему неравенств $\begin{cases} 6-a \geq 0, \\ \dfrac{4a-15}{a-2} > 0, \\ \dfrac{a}{a-2} < 3. \end{cases}$

Решив ее, получаем $a < 2$; $\dfrac{15}{4} < a \leq 6$.

Ответ: $(-\infty;\ 2) \cup \left(\dfrac{15}{4};\ 6\right]$.

Утверждение 4. Для того чтобы оба корня трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ x_1 и x_2 принадлежали промежутку $(\alpha;\ \beta)$ $(\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$$

Проиллюстрируем данное утверждение на рисунке 8.

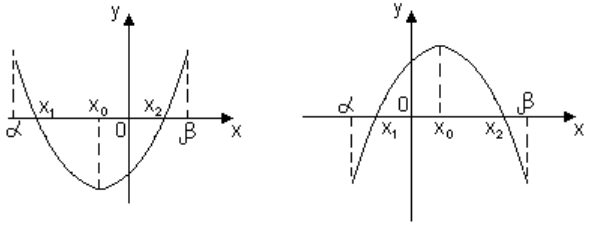


Рис. 8

$a > 0$, $f(\alpha) > 0$ $\Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$ $\qquad$ $a < 0$, $f(\alpha) < 0$ $\Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$

$a > 0$, $f(\beta) > 0$ $\Rightarrow a \cdot f(\beta) > 0$ $\qquad$ $a < 0$, $f(\beta) < 0$ $\Rightarrow a \cdot f(\beta) > 0$

Ясно, что при $D = 0$ вершина параболы расположена в точке с координатами $(x_0;\ 0)$.

Пример 9. При каких значениях параметра a все корни уравнения $(a - 1)x^2 + ax + a - 4 = 0$ расположены в промежутке $(-2;\ 2)$?

Решение. Составим систему неравенств, считая $a \neq 1$:

$$\begin{cases} a^2 - 4(a-1)(a-4) \geq 0, \\ (4(a-1) - 2a + a - 4)(a-1) > 0, \\ (a-1)(4(a-1) + 2a + a - 4) > 0, \\ -2 < \dfrac{a}{2(a-1)} < 2; \end{cases} \begin{cases} -3a^2 + 20a - 16 \geq 0, \\ (a-1)(3a-8) > 0, \\ (a-1)(7a-8) > 0, \\ \dfrac{3a-4}{a-1} > 0, \\ \dfrac{5a-4}{2(a-1)} > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$3a^2 - 20a + 16 \leq 0$. $D = 100 - 48 = 52$. $a_{1,\,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{13}}{3}$.

$a \in \left[\dfrac{10 - 2\sqrt{13}}{3};\ \dfrac{10 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Решим второе неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(2\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Решим третье неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1\dfrac{1}{7};\ +\infty\right)$.

Решим четвертое неравенство системы: $a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Решим пятое неравенство системы: $a \in \left(-\infty;\ \dfrac{4}{5}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Общее решение пяти неравенств: $a \in \left(2\dfrac{2}{3};\ \dfrac{10 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Поскольку в условии задачи ничего не говорится о числе корней уравнения, рассмотрим случай, при котором коэффициент перед x^2 обращается в нуль, тогда уравнение становится линейным. При $a = 1$ $x = 3$, однако это значение не входит в промежуток, заданный условием задачи.

Ответ: $\left(2\frac{2}{3};\ \frac{10+2\sqrt{13}}{3}\right]$.

Утверждение 5. Для того чтобы меньший корень x_1 трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ принадлежал промежутку $(\alpha;\ \beta)$, а больший корень x_2 этому промежутку не принадлежал, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$.

Проиллюстрируем это утверждение на рисунке 9.

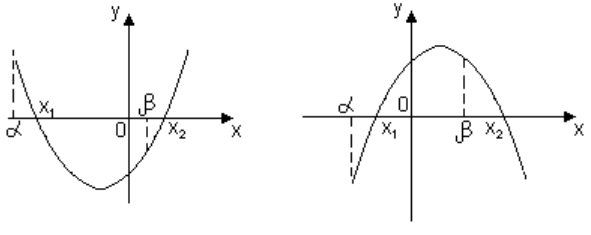


Рис. 9

$a > 0,\ f(\alpha) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$ $\qquad$ $a < 0,\ f(\alpha) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$

$a > 0,\ f(\beta) < 0 \Rightarrow a \cdot f(\beta) < 0$ $\qquad$ $a < 0,\ f(\beta) > 0 \Rightarrow a \cdot f(\beta) < 0$

Утверждение 6. Для того чтобы больший корень трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ принадлежал промежутку $(\alpha;\ \beta)$, а меньший – нет, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$

В справедливости этого утверждения можно легко убедиться, используя графическую интерпретацию.

Замечание 1. Если требуется узнать те значения параметра, при которых один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (не имеет значения какой) принадлежит промежутку $(\alpha; \beta)$, а другой – нет, то достаточно потребовать выполнения неравенств $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Для доказательства рассмотрите случаи $a < 0$ и $a > 0$.

Замечание 2. Мы сознательно не рассматриваем условие $D > 0$, поскольку, если существует x, при котором квадратичная функция принимает отрицательные значения (при $a > 0$) и ветви параболы направлены вверх, то обязательно найдутся на оси абсцисс две различные точки, в которых парабола пересекает эту ось. Аналогичны рассуждения и для $a < 0$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $4x^2 + 2(a - 1)x - a^2 + a = 0$ принадлежит промежутку $(-1; 1)$.

Решение. Пусть $f(x) = 4x^2 + 2(a - 1)x - a^2 + a$, тогда, согласно утверждению 6, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 4 - 2(a-1) - a^2 + a < 0, \\ 4 + 2(a-1) - a^2 + a > 0; \end{cases} \begin{cases} a^2 + a - 6 > 0, \\ a^2 - 3a - 2 < 0. \end{cases}$$

Решение последней системы приводит к ответу: $a \in \left(2; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(2; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Замечание 3. Требование принадлежности бóльшего корня промежутку ничего не говорит о принадлежности этому промежутку меньшего корня. Он может как принадлежать этому промежутку, так и не принадлежать.

Изменим условие примера 10. Потребуем, чтобы хотя бы один корень уравнения принадлежал промежутку $(-1; 1)$. Тогда, согласно замечанию 1, $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

$(4 - 2a + 2 - a^2 + a)(4 + 2a - 2 - a^2 + a) < 0$; $(a^2 + a - 6)(a^2 - 3a - 2) < 0$.

При решении последнего неравенства методом интервалов после разложения каждого из квадратных трехленов на множители получим ответ.

Ответ: $\left(-3;\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(2;\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Упражнения

1. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2)x^2-2ax+a+3=0$ заключены в интервале (1; 3)?

2. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2+(a-4)x-2a=0$ принадлежат промежутку (−1; 1).

3. Найти все значения параметра a, при которых один корень уравнения $(a-2)x^2+3(a+1)x-2(a-1)=0$ больше 1, а другой меньше 1.

4. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $\frac{1}{2}$.

5. Найти все значения a, при которых все корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.

Ответы и решения:

1. При $a\in\{2\}\cup\left(\frac{15}{4};\ 6\right]$.

2. Таких значений параметра нет.

3. (−1,5; 2).

4. $\left(\frac{16}{17};\ 2\right]$.

Решение. Согласно утверждению 2 имеем систему неравенств

$$\begin{cases}9a^2-8a(2-a)\ge 0,\\ (2-a)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)>0,\\ x_0=\frac{3a}{2(2-a)}>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17a^2-16a\ge 0,\\ (2-a)(2-a-6a+8a)>0,\\ \frac{4a-2}{2-a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(17a-16)a\ge 0,\\ (2-a)(a+2)>0,\\ \frac{2a-1}{2-a}>0.\end{cases}$$

Решение системы неравенств методом интервалов с учетом того, что $a = 2$ обращает уравнение в линейное с корнем $x = \frac{2}{3}$, дает ответ $a \in \left(\frac{1}{2};\ 2\right]$.

5. $(-\infty;\ -2)$.

Указание. Необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} a \le \frac{1}{4}, \\ a^2 + 2a > 0, \\ -\frac{1}{2} > a. \end{cases}$

VI. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Напомним, что способ решения задач с параметрами напрямую связан с видом конкретного уравнения или неравенства, поэтому способы решения поясним на конкретных примерах.

Пример 1. При всех значениях параметра a решить уравнение $\sqrt{3x-2}=x+a$.

Решение.

I способ. При решении этого уравнения заметим, что

$$\sqrt{3x-2}=x+a \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=(x+a)^2, \\ x+a\geq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы: $x^2 - x(2a - 3) + a^2 + 2 = 0$.

$D = 4a^2 - 12a + 9 - 4a^2 - 8 = 1 - 12a$.

Если $1 - 12a < 0$, то есть $a > \frac{1}{12}$, то решений нет.

Если $a = \frac{1}{12}$, то $x = \frac{17}{12}$. Условие $x + a \geq 0$ выполняется, уравнение имеет единственный корень.

Если $a < \frac{1}{12}$, то $x_{1,\,2} = \frac{3-2a\pm\sqrt{1-12a}}{2}$. Найдем те значения a, при которых $x + a \geq 0$. Имеем $\frac{3\pm\sqrt{1-12a}}{2} \geq 0$.

1) $3+\sqrt{1-12a}\geq 0$ при всех $a < \frac{1}{12}$;

2) $3-\sqrt{1-12a}\geq 0$, $1 - 12a \leq 9$, $a \geq -\frac{2}{3}$.

Итак, если $-\frac{2}{3} \leq a < \frac{1}{12}$, то $x = \frac{1}{2}\left(3-2a+\sqrt{1-12a}\right)$.

Если $a < -\frac{2}{3}$, то $x = \frac{1}{2}\left(3-2a+\sqrt{1-12a}\right)$.

Ответ: при $a < -\frac{2}{3}$ $x = \frac{1}{2}\left(3 - 2a + \sqrt{1-12a}\right)$;

при $-\frac{2}{3} \le a < \frac{1}{12}$ $x = \frac{1}{2}\left(3 - 2a \pm \sqrt{1-12a}\right)$;

при $a = \frac{1}{12}$ $x = \frac{17}{12}$;

при $a > \frac{1}{12}$ решений нет.

II способ. Область определения уравнения задается неравенством $x \ge \frac{2}{3}$. Положим $\sqrt{3x-2} \ge y$, $y \ge 0$, тогда $x = \frac{y^2+2}{3}$,

и данное уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} y^2 - 3y + 3a + 2 = 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$ (*)

Уравнение системы имеет один корень в случаях:
1) $D = 0$;
2) корни уравнения имеют разные знаки.

В первом случае $a = \frac{1}{12}$, $y = \frac{3}{2}$ и $x = \frac{17}{12}$.

Во втором случае $y_1 y_2 < 0$, $3a + 2 < 0$, $a < -\frac{2}{3}$ (требование выполнения неравенства $D > 0$ не обязательно).

Находим корни уравнения системы (*): $y = \frac{3 \pm \sqrt{1-12a}}{2}$.

Если $a < -\frac{2}{3}$, $y = \frac{3-\sqrt{1-12a}}{2} < 0$ и $y = \frac{3+\sqrt{1-12a}}{2}$, тогда

$\sqrt{3x-2} = \frac{3+\sqrt{1-2a}}{2}$, откуда $x = \frac{1}{2}\left(3 - 2a + \sqrt{1-12a}\right)$.

Для того чтобы оба корня системы (*) были неотрицательны, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} D > 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \\ y_1 y_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 12a > 0, \\ 3a + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a < \frac{1}{12}.$$ Итак, при $-\frac{2}{3} \leq a < \frac{1}{12}$ уравнение имеет два неотрицательных корня.

При других значениях a уравнение корней не имеет.

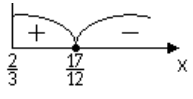
Объединяя все полученные результаты, получаем приведенный в способе I ответ.

III способ. Покажем возможный графический способ решения.

Из данного уравнения находим $a = \sqrt{3x-2} - x$. Построим эскиз графика функции $a = a(x)$ в системе координат $x0a$.

$D(a)$: $x \geq \frac{2}{3}$.

$a'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 1$, $a'(x)=0$, если $3 = 2\sqrt{3x-2}$, $12x - 8 = 9$, $x = \frac{17}{12}$.



При $x = \frac{17}{12}$ рассматриваемая функция имеем максимум, при этом $a = \sqrt{\frac{17}{4} - 2} - \frac{17}{12} = \frac{3}{2} - \frac{17}{12} = \frac{1}{12}$.

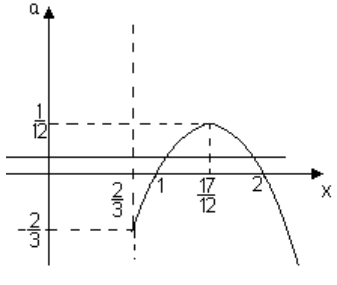


Рис. 1

Из рисунка 1 видно, что при $a = \frac{1}{12}$ и при $a < -\frac{2}{3}$ исходное уравнение имеет один корень, который является большим корнем уравнения $x^2 + (2a - 3)x + a^2 + 2 = 0$ (**), при $-\frac{2}{3} \le a < \frac{1}{12}$ исходное уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения (**).

Примечание. Все три способа решения уравнения дают один и тот же ответ. Вопрос о преимуществе каждого из рассмотренных способов предлагаем решать читателям.

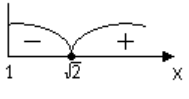
Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2ax-1} = x-1$.

Решение.

I способ. Решим задачу графически. Выразим параметр a через x: $\sqrt{2ax-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax-1 = (x-1)^2, \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x^2-2x+2}{2x}, \\ x \ge 1. \end{cases}$

Исследуем функцию $a(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x}$ на области определения $x \ge 1$ и построим ее график.

$a'(x) = \frac{(2x-2)x - x^2 + 2x - 2}{2x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$. Функция $a(x)$ имеет на луче $[1; +\infty)$ единственную критическую точку $x = \sqrt{2}$.



На промежутке $[1; \sqrt{2}]$ функция убывает, а на промежутке $[\sqrt{2}; +\infty)$ функция возрастает. $x = \sqrt{2}$ – точка минимума; $a(\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

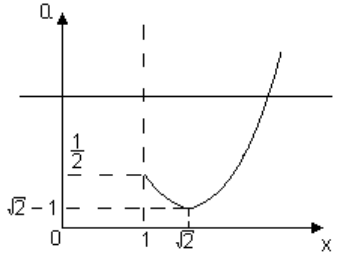


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что при $a = \sqrt{2} - 1$ уравнение имеет один корень $x = \sqrt{2}$. При $\sqrt{2}-1 < a \le \frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $x^2 - 2x(1 + a) + 2 = 0$ (*). $x_{1,\,2} = 1+a \pm \sqrt{a^2+2a-1}$. При $a > \frac{1}{2}$ уравнение имеет один корень, который является большим корнем уравнения (*), т. е. $x = 1+a+\sqrt{a^2+2a-1}$. Ясно, что при $a < \sqrt{2} - 1$ уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a < \sqrt{2} - 1$ уравнение корней не имеет;

при $a = \sqrt{2} - 1$ уравнение имеет один корень $x = \sqrt{2}$;

при $\sqrt{2}-1 < a \le \frac{1}{2}$ уравнение имеет два корня:

$x_{1,\,2} = 1+a \pm \sqrt{a^2+2a-1}$;

при $a > \frac{1}{2}$ уравнение имеет один корень

$x = 1+a+\sqrt{a^2+2a-1}$.

II способ. Заменим исходное уравнение равносильной ему системой

$$\sqrt{2ax-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x(a+1) + 2 = 0, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Если у уравнения системы $D = 0$, то есть $a^2 + 2a - 1 = 0$, $a = -1 \pm \sqrt{2}$, то уравнение имеет один корень $x = a + 1 = \pm\sqrt{2}$. Ясно, что одному значению параметра соответствует одно значение неизвестного. Условию $x \geq 1$ удовлетворяет только $x = \sqrt{2}$, которое соответствует $a = \sqrt{2} - 1$.

Найдем, при каких значениях параметра уравнение имеет два корня, каждый из которых больше единицы. При решении квадратных уравнений мы уже использовали свойства квадратного трехчлена (см. утверждение 2 раздела IV). Ясно, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(1) \geq 0, \\ x_{вершины} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 > 0, \\ 1 - 2a \geq 0, \\ a + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > -1 + \sqrt{2}, \\ a < -1 - \sqrt{2}, \end{array}\right. \\ a \leq \dfrac{1}{2}, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 + \sqrt{2} < a \leq \frac{1}{2}.$$

При этом корни уравнения $x_{1,\,2} = 1 + a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1}$.

Найдем, при каких значениях параметра исходное уравнение имеет один корень – больше единицы, а другой – меньше единицы (см. утверждение 1 раздела IV). Достаточно ограничиться следующими условиями:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 > 0, \\ 1 - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > -1 + \sqrt{2}, \\ a < -1 - \sqrt{2}; \end{array}\right. \\ a > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$ При этом очевидно, что корень данного уравнения является бóльшим корнем уравнения $x^2 - 2x(1 + a) + 2 = 0$, т. е. корень $x = 1 + a + \sqrt{a^2 + 2a - 1}$.

Объединяя полученные результаты, имеем уже полученный ранее ответ.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}$. (1)

Решение. Здесь $a = 0$ − контрольное значение параметра (при $a < 0$ левая часть уравнения не определена, а при $a \geq 0$ − определена). Поэтому при решении исходного уравнения рассмотрим следующие случаи: $a < 0$, $a \geq 0$.

1. При $a < 0$ исходное уравнение не имеет корней.
2. При $a \geq 0$ после возведения обеих частей исходного уравнения в квадрат и последующего упрощения придем к уравнению $2\sqrt{ax}=1-2x-2a$. Это уравнение равносильно данному при $a \geq 0$; $x \geq 0$; $1-(x+a) \geq 0$. При этом мы не обнаруживаем никаких новых контрольных значений параметра, влияющих на решение. Снова возведя обе части уравнения в квадрат и упростив, получим уравнение $4x^2 + 4(a-1)x + 4a^2 - 4a + 1 = 0$, у которого

$$\frac{D}{4} = 4(a-1)^2 - 4(4a^2 - 4a + 1) = 4(2a - 3a^2).$$

Полагая $D = 0$, находим два контрольных значения параметра: $a = 0$ и $a = \frac{2}{3}$. Одно из этих значений встречалось ранее.

Заметим, что $D < 0$, если $a > \frac{2}{3}$ (напомним, что мы рассматриваем случай $a \geq 0$). Таким образом, целесообразно рассмотреть случаи $a > \frac{2}{3}$ и $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$.

При $a > \frac{2}{3}$ уравнение корней не имеет, а при $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ получаем $x_{1,\,2} = \frac{1-a \pm \sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Выше мы отмечали, что при $a < 0$ исходное уравнение не имеет корней, поэтому при $a > \frac{2}{3}$ и $a < 0$ уравнение корней не имеет, а при $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ корнями уравнения могут быть $x_{1,\,2} = \frac{1-a \pm \sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Такая осторожная формулировка связана с тем, что исходное уравнение возводилось в квадрат, и при этом могли появиться посторонние корни. Значит, найденные значения x_1 и x_2 необходимо проверить.

Проверка этих значений подстановкой в исходное уравнение довольно затруднительна, поэтому заметим, что область определения исходного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x \ge 0, \\ 1-(x+a) \ge 0. \end{cases}$

Кроме того, для равносильности преобразований должно выполняться неравенство $1 - 2x - 2a \ge 0$. Поэтому корни уравнения должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 1-(x+a) \ge 0, \\ 1-2x-2a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x+a \le 1, \\ x+a \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x+a \le \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Проверим, удовлетворяет ли последней системе значение x_1. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \le \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Второе неравенство системы (3) равносильно неравенству $\sqrt{2a-3a^2} \le -a$, которое в рассматриваемом случае ($0 \le a \le \dfrac{2}{3}$) имеет единственное решение $a = 0$.

Так как это значение a удовлетворяет и первому неравенству системы (3), то система (3) имеет единственное решение $a = 0$. Это значит, что x_1 при $a = 0$ является корнем уравнения (1). При $a = 0$ имеем $x_1 = \dfrac{1}{2}$, если $a \ne 0$, то x_1 – посторонний корень.

Проверим, удовлетворяет ли системе (3) значение x_2.

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2a-3a^2} \le 1-a, \\ \sqrt{2a-3a^2} \ge a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-4a+1 \ge 0, \\ 4a^2-2a \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 \ge 0, \\ 4a\left(a-\dfrac{1}{2}\right) \le 0, \end{cases},$$

откуда $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $x_2 = \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ – корень уравнения (1), если параметр a удовлетворяет системе $\begin{cases} 0 \le a \le \dfrac{2}{3}, \\ 0 \le a \le \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

откуда $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$.

Итак, решение уравнения (1) можно записать следующим образом:

1) при $a < 0$; $a > \dfrac{1}{2}$ корней нет;

2) при $a = 0$ $x_1 = \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$;

3) при $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Заметим, что при $a = 0$ $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$. Это позволяет сделать запись ответа более компактной.

Ответ: при $a < 0$; $a > \dfrac{1}{2}$ корней нет;

при $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$.

Решение. Область определения уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x \ge 0, \\ a+\sqrt{x} \ge 0, \\ a-\sqrt{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ a \ge -\sqrt{x}, \\ a \ge \sqrt{x}. \end{cases}$

Легко сделать вывод о том, что уравнение может иметь решения при $a \ge 0$, при $a < 0$ уравнение решений не имеет.

При $a \ge 0$ решение исходного уравнения сводится к решению уравнения, полученного из исходного после возведения его обеих частей в квадрат (это действие правомерно, поскольку обе части уравнения неотрицательны):

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x}=1-a, \\ a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-x=(1-a)^2, \\ a \ge 0, \\ a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+1}{2}, \\ 0 \le a \le 1. \end{cases}$$

Далее с учетом сказанного выше получаем систему

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, \\ a \ge \sqrt{x}, \\ 0 \le a \le 1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

В системе координат $x0a$ покажем графическое решение полученной системы.

Графиком функции $a=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ является прямая, которая имеет с кривой $a=\sqrt{x}$ единственную общую точку (1; 1). Из рисунка 3 видно, что при $\frac{1}{2} \le a \le 1$ исходное уравнение имеет один корень $x = 2a - 1$. При $a < \frac{1}{2}$ и при $a > 1$ уравнение корней не имеет.

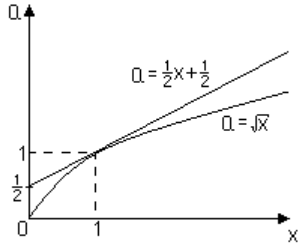


Рис. 3

Ответ: при $\frac{1}{2} \le a \le 1$ $x = 2a - 1$;

при $a < \frac{1}{2}$ и при $a > 1$ уравнение корней не имеет.

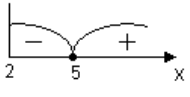
Замечание. Ясно, что $x = 2a - 1$, и так как $2a - 1 \ge 0$, т. е. $a \ge \frac{1}{2}$, но $a \le 1$, поэтому $x = 2a - 1$ при $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-2} = a$.

Решение. Введем функцию $f(x) = \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-2}$.
Замечаем, что $D(f)$: $[2; +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{2\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2}}{2\sqrt{2x+2} \cdot \sqrt{x-2}};$$

$f'(x) = 0$, если $2\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+2}$; $4x - 8 = 2x + 2$; $x = 5$.



На промежутке [2; 5] функция убывает, на промежутке $[5; +\infty)$ – возрастает, $x = 5$ – точка минимума. $f(5) = \sqrt{3}$.

Из рисунка 4 видно, что при $a = \sqrt{3}$ уравнение имеет единственный корень $x = 5$; при $\sqrt{3} < a \le \sqrt{6}$ уравнение имеет два корня, которые могут быть найдены при решении исходного уравнения без наложения дополнительных ограничений двукратным возведением этого уравнения в квадрат:

$$2x+2=a^2+2a\sqrt{x-2}+x-2 \Leftrightarrow x+4-a^2=2a\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x(4-3a^2)+a^4+16=0.$$

$D = 16 - 24a^2 + 9a^4 - a^4 - 16 = 8a^4 - 24a^2$;

$x_{1,2} = 3a^2 - 4 \pm 2a\sqrt{2a^2-6}$.

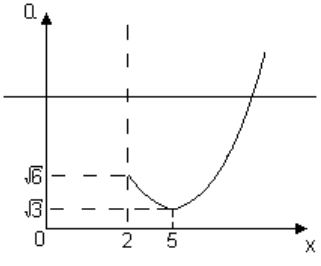


Рис. 4

При $a > \sqrt{6}$ уравнение имеет единственный корень;

$x = 3a^2 - 4 + 2a\sqrt{2a^2-6}$.

При $a < \sqrt{3}$ уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a < \sqrt{3}$ уравнение корней не имеет;

при $a = \sqrt{3}$ $x = 5$;

при $\sqrt{3} < a \le \sqrt{6}$ $x_{1,2} = 3a^2 - 4 \pm 2a\sqrt{2a^2-6}$;

при $a > \sqrt{6}$ $x = 3a^2 - 4 + 2a\sqrt{2a^2-6}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}$$

при всех значениях параметров a и b.

Решение. Считая, что все подкоренные выражения неотрицательны, после возведения обеих частей уравнения в квадрат, получим $4a+b-5x+2\sqrt{4a+b-5x}\cdot\sqrt{4b+a-5x}+4b+a-5x=9a+9b-18x$, или

$$\sqrt{(4a+b-5x)(4b+a-5x)}=2a+2b-4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17ab+4a^2+4b^2-5x(4a+b)-5x(4b+a)+25x^2= \\ =4a^2+4b^2+8ab-16ax-16bx+16x^2, \\ 2a+2b-4x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 9(x-a)(x-b)=0,$ откуда $x=a$ или $x=b$.

$x=a$ будет корнем исходного уравнения при выполнении условий

$\begin{cases} 4a+b-5x\ge 0, \\ 4b+a-5x\ge 0, \\ a+b-2x\ge 0. \end{cases}$ Подставив $x=a$, получим $\begin{cases} -a+b\ge 0, \\ 4b-4a\ge 0, \\ b-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow b\ge a,$

$x=b$ будет корнем исходного уравнения при выполнении тех же условий: $\begin{cases} 4a+b-5x\ge 0, \\ 4b+a-5x\ge 0, \\ a+b-2x\ge 0. \end{cases}$

После замены $x=b$ приходим к неравенству $a\ge b$.

Ответ: $x=a$ при $b\ge a$; $x=b$ при $a\ge b$.

Рассмотрим задание А-11 МК №17–05 выпускного экзамена по алгебре и началам анализа для математических классов.

Пример 7. Найти a, при которых уравнение

$(x+4a)\sqrt{x-4a-32}=0$ имеет единственное решение.

Решение. Произведение двух сомножителей равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла (цитата из любого учебника элементарной математики).

Выражение, стоящее под радикалом всегда дает один из корней уравнения, второй корень уравнения не существует, когда выполняется условие, описываемое системой

$$\begin{cases} x+4a=0, \\ x-4a-32<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4a, \\ x<4a+32 \end{cases} \Leftrightarrow -4a<4a+32 \Leftrightarrow a>-4.$$

Остается проверить случай равенства нулю выражения в скобках и выражения, стоящего под радикалом (при этом уравнение имеет два равных корня, или по школьной терминологии один корень): $x + 4a = x - 4a - 32$, откуда $a = -4$.

Ответ: $a \geq -4$.

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{ax} \geq x + a$ при всех значениях параметра a.

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax \geq (a+x)^2, \\ a + x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} ax \geq 0, \\ a + x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Обратим внимание на то, что условие $ax \geq 0$ в первой системе не является обязательным.

Решаем первую систему неравенств $\begin{cases} x^2 + ax + a^2 \leq 0, \\ a + x \geq 0. \end{cases}$

У квадратного уравнения, соответствующего первому неравенству системы $D \leq 0$, поэтому $x^2 + ax + a^2 \geq 0$ и, значит, $x^2 + ax + a^2 = 0$ только при $a = 0$ $D = 0$ и $x = 0$.

Решаем вторую систему неравенств. Пусть $a \leq 0$, тогда $x \leq 0$. При $a > 0$ имеем $x > 0$ и $x + a > 0$, что противоречит второму неравенству этой системы.

Ответ: при $a \leq 0$ $x \in (-\infty;\ 0]$; при $a > 0$ решений нет.

Рассмотрим задания, предложенные на вступительных экзаменах в Санкт-Петербургском университете в 1997 г.

Пример 9. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{a^2 - \sqrt{x^2 - a^2}} \geq x$.

Решение. Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} x^2 - a^2 \geq 0, \\ a^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq |a|, \\ x^2 \leq a^4 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq |a|, \\ |x| \leq |a|\sqrt{a^2 + 1}. \end{cases}$$

Если $x < 0$, то неравенство выполняется при всех $x < 0$ из области определения уравнения, т. е. при

$$\begin{cases} -x \ge |a|, \\ -x \le |a|\sqrt{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow -|a|\sqrt{a^2+1} \le x \le -|a|, \ (a \ne 0).$$

При $a = 0$ $\sqrt{-x^2} \ge x$, $x = 0$.

Если $x > 0$,

то $a^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \ge x^2 \Leftrightarrow a^2 - x^2 \ge \sqrt{x^2 - a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x^2 \ge 0, \\ x^2 - a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = |a|$.

Ответ: при $a = 0$ $x = 0$;

при $a \ne 0$ $x \in |a| \cup \left[-|a|\sqrt{1+a^2}; -|a|\right]$.

Пример 10. При каких значениях a множество решений неравенства $a + \sqrt{x^2 + ax} \ge x$ не пересекается с промежутком $[-1; 0]$?

Решение. При $a = 0$ $|x| \ge x$ и $x \in R$. Присутствует пересечение с отрезком $[-1; 0]$.

1. Пусть $a > 0$, тогда область определения неравенства $x \in (-\infty; -a] \cup [0; +\infty)$.

$$\sqrt{x^2 + ax} \ge x - a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax \ge x^2 - 2ax + a^2, \\ x \ge a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{a}{3}, \\ x \ge a, \end{cases}$$

откуда с учетом области определения $x \ge a$.

Если $x - a \le 0$, $x \le a$, то $x \in (-\infty; -a] \cup (0; a]$. С учетом области определения неравенства $x \in (-\infty; -a] \cup [0; +\infty)$ при $a > 0$ получаем $x \in (-\infty; -a] \cup [0; +\infty)$. Очевидно, что полученное множество значений для x имеет с отрезком $[-1; 0]$ общую точку $x = 0$.

2. Пусть $a < 0$, тогда область определения неравенства $x \in (-\infty; 0] \cup [-a; +\infty)$.

$$\sqrt{x^2 + ax} \ge x - a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax \ge x^2 - 2ax + a^2, \\ x \ge a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{a}{3}, \\ x \ge a \end{cases} \text{ и } x \in \left[a; \dfrac{a}{3}\right].$$

При $a < 0$ решением неравенства будет $x \in \left(-\infty;\ \frac{a}{3}\right]$. Полученное решение не будет иметь общих точек с отрезком $[-1;\ 0]$ при $\frac{a}{3} < -1$, т. е. при $a < -3$.

Ответ: $(-\infty;\ -3)$.

Пример 11. Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1$.

Решение. Область определения неравенства $|x| \leq a$.

При $a \geq -1$, после возведения обеих частей неравенства в квадрат получим $a^2 - x^2 \geq a^2 + 2a + 1$. $x^2 \leq -(2a + 1)$.

Если $-(2a + 1) < 0$, т. е. $a > -\frac{1}{2}$, неравенство решений не имеет.

Если $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$, то $-\sqrt{-(2a+1)} \leq x \leq \sqrt{-(2a+1)}$. При этом неравенство $|x| \leq a$ выполняется.

Если $a < -1$, то $a \leq x \leq -a$.

Ответ: при $a < -1$ $\quad a \leq x \leq -a$;

при $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ $\quad -\sqrt{-(2a+1)} \leq x \leq \sqrt{-(2a+1)}$;

при $a > -\frac{1}{2}$ неравенство решений не имеет.

Упражнения

1. Решить уравнение $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

2. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sqrt{x} - 2\right)(x - a) = 0$ имеет один корень?

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

4. Решить уравнение $\sqrt{2x+1} = x - a$.

5. Решить уравнение $2\sqrt{x+a}=\sqrt{(x-a)(x+3)}$.

6. Решить неравенство $\sqrt{2x+a}\geq x$.

Ответы:

1. При $a < 1$ $x_1 = 1$, $x_2 = a$; при $a \geq 1$ $x = a$.
2. При $a < 0$ и $a = 4$.
3. При $0 \leq a \leq 0{,}4$ и $a = -0{,}1$.

Указание. Лучше применить графический способ, выразив a через x.

4. При $a > -0{,}5$ и при $a = -1$ $x = a+1+\sqrt{2a+2}$;

   при $-1 < a \leq -0{,}5$ $x = a+1\pm\sqrt{2a+2}$;

   при $a < -1$ корней нет.

5. При $a < -15+4\sqrt{14}$ корней нет;

   при $-15+4\sqrt{14} \leq a \leq 0$ и $a \geq 3$ $x=\dfrac{1+a\pm\sqrt{a^2+30a+1}}{2}$;

   при $0 < a < 3$ $x=\dfrac{1+a+\sqrt{a^2+30a+1}}{2}$.

6. При $a < -1$ решений нет;

   при $-1 \leq a \leq 0$ $1-\sqrt{1+a} \leq x \leq 1+\sqrt{1+a}$;

   при $a > 0$ $-\dfrac{a}{2} \leq x \leq 1+\sqrt{1+a}$.

VII. КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ

В этом разделе мы не будем решать кубические уравнения, а, в основном, будем рассматривать задачу о нахождении количества корней уравнения в зависимости от значений параметров. Начнем с довольно простых примеров.

Пример 1. Уравнение $x^3 + ax^2 - a^2x + 5 = 0$ имеет корень $x = 1$. Найти остальные корни этого уравнения.

Решение.

I способ. Поскольку известен один корень кубического уравнения, подставим его значение в уравнение, которое должно обратиться в верное равенство $1 + a - a^2 + 5 = 0$ или $a^2 - a - 6 = 0$. Решим полученное уравнение относительно a и получим $a = -2$; $a = 3$.

При $a = -2$ имеем уравнение $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$. Разделив многочлен третьей степени «уголком» или по схеме Горнера на $x - 1$, получим квадратное уравнение $x^2 - x - 5 = 0$, при этом $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Возможна группировка и разложение на множители:

$x^3 - 1 - 2x^2 + 2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - 2(x^2 - 1) - 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 5) = 0.$

При $a = 3$ получаем уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$. Вновь разделив левую часть уравнения на $x - 1$, получим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$, которое дает $x = 1$ и $x = -5$.

Возможна группировка и разложение на множители:

$(x^3 - 1) - 3(x^2 - 1) - 9(x - 1) = 0; \quad (x - 1)(x^2 + 4x - 5) = 0.$

Ответ: при $a = -2$ $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$;

при $a = 3$ $\quad x = -5$.

Примечание. Обратим внимание на то, что по условию задачи необходимо найти корни, отличные от единицы, при таких значениях параметра, при которых $x = 1$ является корнем заданного уравнения.

II способ. Для кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет место зависимость между его возможными корнями x_1, x_2, x_3 и коэффициентами a, b, c: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$ (теорема Виета).

В нашем случае $x_3 = 1$, тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 + 1 = -a, \\ x_1x_2 + x_2 + x_1 = -a^2, \\ x_1x_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -a - 1, \\ a^2 - a - 6 = 0, \\ x_1x_2 = -5. \end{cases}$

Дальнейшее решение системы не представляет труда и приводит к уже полученным результатам.

Пример 2. Известно, что уравнение $x^3 + ax^2 + 2bx - 1 = 0$ имеет своими корнями числа -1 и 2. Найти третий корень этого уравнения.

Решение. Укажем наиболее простой способ решения. Подставляя в данное уравнение $x = -1$ и $x = 2$, получим уравнения $a - 2b = 2$ и $4a + 4b = -7$. Решая систему $\begin{cases} a - 2b = 2, \\ 4a + 4b = -7, \end{cases}$ получим $a = -\frac{1}{2}$ и $b = -\frac{5}{4}$. Тогда данное уравнение принимает вид

$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$, $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$. Поскольку $x = -1$ и $x = 2$ являются корнями уравнения, многочлен в левой части уравнения делится на $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$. Ясно, что $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x^2 - x - 2)(2x + 1)$, тогда третий корень исходного уравнения $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

Пример 3. Определить, при каких значениях a уравнение $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$ имеет ровно два корня.

Решение.

I способ. Перепишем исходное уравнение в виде $a = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3$ и построим график функции $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3 = a$. Для того чтобы найти число уравнения $f(x) = a$, часто бывает достаточно представить схематический график функции $y = f(x)$, не проводя полных исследований.

При решении данной задачи достаточно найти экстремумы функции и промежутки монотонности:

1. $D(f) = R$, поскольку функция является многочленом.

2. Находим производную функции и критические точки из уравнения $f'(x) = 0$, поскольку $D(f') = R$.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

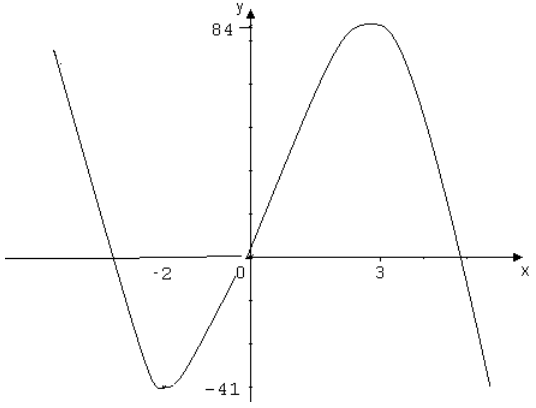
3. Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции. На промежутках $(-\infty; -2]$; $[3; +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $[-2; 3]$ функция возрастает.

$x = -2$ – точка минимума; $f(-2) = -41$;

$x = 3$ – точка максимума; $f(3) = 84$.

Строим график функции $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x + 3$ и находим точки пересечения графика этой функции с прямой $y = a$.

Покажем схематичное решение на рисунке:



Ясно, что данное уравнение имеет ровно два корня при $a = -41$ и при $a = 84$.

II способ. Применим теорему Виета. Поскольку уравнение имеет два равных корня, будем считать $x_2 = x_3$, тогда, применительно к нашему уравнению, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \dfrac{3}{2}, \\ 2x_1x_2 + x_2^2 = -18, \\ x_1x_2^2 = -\dfrac{1}{2}(a-3). \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $x_2 = -2$ или $x_2 = 3$, но тогда $x_1 = \frac{11}{2}$ или $x_1 = -\frac{9}{2}$. Для определения a имеем два уравнения:

1) $\frac{a-3}{2} = -\frac{11}{2} \cdot 4$, $a - 3 = -44$, $a = -41$;

2) $\frac{a-3}{2} = -\frac{9}{2} \cdot 9$, $a = 84$.

III способ. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Любое кубическое уравнение имеет либо один действительный корень, либо три действительных корня. Если оно имеет ровно два корня, то уравнение имеет три корня, два из которых равны, а поэтому

$2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 2(x - t)(x - z)^2$, где t и z – корни уравнения.

$2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 2(x - t)(x^2 - 2xz + z^2)$;

$2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 2x^3 - (4z + 2t)x^2 - (2z^2 + 4zt)x - 2tz^2$.

Два многочлена одной степени от одного и того же переменного равны только при равенстве коэффициентов при равных степенях.

Это дает нам систему уравнений $\begin{cases} 4z + 2t = 3, \\ z^2 + 2zt = -18, \\ -2tz^2 = a - 3. \end{cases}$

Эта система была решена при решении задачи вторым способом.

Ответ: -41; 84.

Рассмотрим вопрос о количестве корней кубического уравнения.

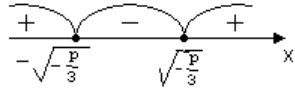
Любое кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ заменой неизвестного $x = y - \frac{a}{3}$ сводится к каноническому виду $x^3 + px + q = 0$ (мы сохранили обозначение переменной). Будем считать, что p и q отличны от нуля. Если $p \geq 0$, то для функции $f(x) = x^3 + px + q$ имеем $f'(x) = 3x^2 + p > 0$, поэтому функция f возрастает на R и уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет ровно один действительный корень.

Пример 4. Определить все значения a, при которых уравнение $x^3 + (a - 1)x + a^2 = 0$ имеет ровно один корень.

Решение. Очевидно, исходя из приведенных рассуждений, уравнение имеет один корень, если $a - 1 \geq 0$, то есть $a \geq 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

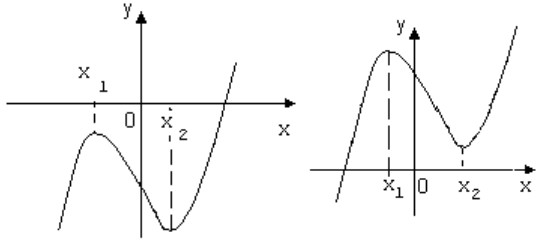
Если $p < 0$, то функция $f(x)$ имеет две критические точки $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$.



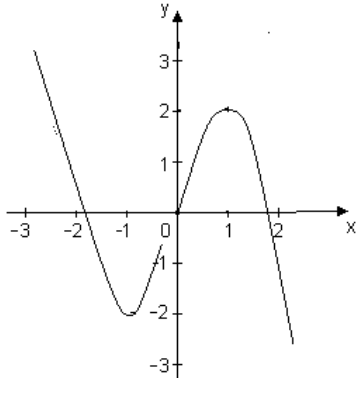
$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ – точка максимума, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$;

$x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ – точка минимума, $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$.

Если $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \cdot f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$ при $p < 0$ имеет один корень:



Например, уравнение $x^3 - 3x + a = 0$ будет иметь один корень, если $f(-1) \cdot f(1) > 0$, то есть $(a-2)\cdot(a+2) > 0$, откуда $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$. Подтверждение можно получить, построив график функции $a = 3x - x^3$.

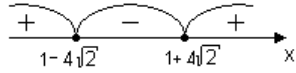


Пример 5. Определить все значения a, при которых уравнение $x^3 - 6x + a - 1 = 0$ имеет один корень.

Решение. Здесь $p = -6 < 0$, решаем неравенство $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) > 0$.

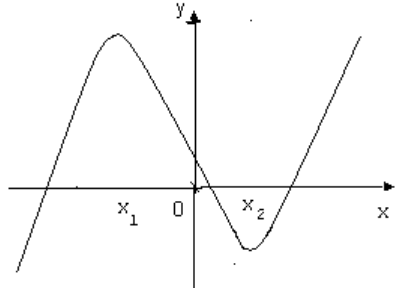
$$\left(-2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + a - 1\right) \cdot \left(2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + a - 1\right) > 0;$$

$$\left(a + 4\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(a - 4\sqrt{2} - 1\right) > 0.$$



Ответ: при $a \in \left(-\infty;\ 1 - 4\sqrt{2}\right) \cup \left(4\sqrt{2} + 1;\ +\infty\right)$.

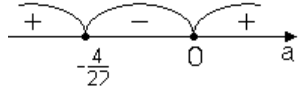
Если $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ и $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ – числа разных знаков, то уравнение имеет три корня. Очевидно, что в этой ситуации p и q должны удовлетворять неравенству $27q^2 + 4p^3 < 0$.



Например, уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет три действительных корня, поскольку $27 \cdot 1^2 + 4 \cdot (-3)^3 < 0$.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + ax + a^2 = 0$ имеет три корня?

Решение. Здесь $p = a$, $q = a^2$, получаем неравенство $27a^4 + 4a^3 < 0$, $a^3(27a + 4) < 0$.



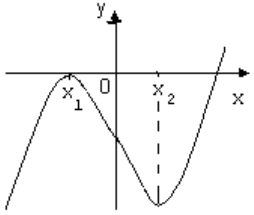
Ответ: при $a \in \left(-\frac{4}{27};\ 0\right)$.

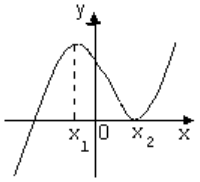
Пример 7. В зависисмости от параметра a указать те значения q, для которых уравнение $ax^3 + 2x + 1 = b$ имеет три различных корня.

Решение. Если $a = 0$, то при всех q уравнение имеет один корень, поэтому далее считаем, что $a \neq 0$, но тогда, поделив обе части уравнения на $a \neq 0$, получаем ему равносильное уравнение $x^3 + \frac{2}{a}x + \frac{1}{a} - \frac{b}{a} = 0$. Здесь $p = \frac{2}{a}$ и $q = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}$, и так как $27q^2 + 4p^3 < 0$, то $4\left(\frac{2}{a}\right)^3 + 27\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right)^2 < 0$; $\frac{32}{a^3} + \frac{27(1-b)^2}{a^2} < 0$. Ясно, что если $a > 0$, то решений нет, поскольку $\frac{32}{a^3} + \frac{27(1-b)^2}{a^2} > 0$; при $a < 0$ получаем $\frac{32}{a^3} + \frac{27(1-b)^2}{a^2} < 0$; $(1-b)^2 < -\frac{32}{27a}$; $|b-1| < \frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1 < b < \frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1$.

Если же $\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0$ или $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0$; то кубическое уравнение имеет кратный корень, совпадающий с точкой максимума или точкой минимума:





В первом случае $\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = -q,\ q > 0$, но тогда $\frac{4p^3}{27} + q^2 = 0$, во втором $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = +q,\ q < 0$, но тогда вновь $\frac{4p^3}{27} + q^2 = 0$, то есть

в обоих случаях имеем, что $4p^3 + 27q^2 = 0$ есть необходимое условие для уравнения $x^3 + px + q = 0$ иметь корень кратности 2.

Вернемся к примеру 3.

Уравнение $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$ имеет ровно два корня. Найти a. Сделаем замену $x = y + \frac{1}{2}$, тогда

$$2y^3 + 3y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4} - 3y^2 - 3y - \frac{3}{4} - 36y - 18 + a - 3 = 0;$$

$$2y^3 - \frac{75}{2}y - \frac{43}{2} + a = 0; \quad 8y^3 - 150y + 4a - 86 = 0.$$

Сделаем еще одну замену $2y = z$, тогда получаем уравнение $z^2 - 75z + 4a - 86 = 0$, но тогда $4p^3 + 27q^2 = 0$. В нашем случае $p = 75$; $q = 4a - 86$. Откуда $27(4a - 86)2 + 4 \cdot (-75)2 = 0$; $(4a - 86)2 = 4 \cdot 56$; $4a - 86 = \pm 250$. И окончательно имеем $a = -41$ и $a = 84$. Найденные значения совпадают с полученными ранее результатами.

Пример 8. Для всех значений параметра a решить уравнение $x^3 - (2 - a)x^2 - ax - a(a - 2) = 0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно параметра a: $a^2 - (x^2 - x + 2)a + x^2(2 - x) = 0$.

Заметим, что $a_1 + a_2 = x^2 + (2 - x)$ и $a_1 \cdot a_2 = x^2(2 - x)$, но тогда $a_1 = 2 - x$, $a_2 = x^2$. Итак, $2 - x = a$, откуда $x = 2 - a$, $x^2 = a$.

При $a < 0$ последнее уравнение корней не имеет, при $a = 0$ $x = 0$, при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Далее определим, при каких значениях параметра корни совпадают, для чего решим уравнения $2 - a = \sqrt{a}$ и $2 - a = -\sqrt{a}$, откуда $a = 1$ и $a = 4$.

Ответ: при $a < 0$ $x = 2 - a$;
при $a = 0$ $x = 0$ и $x = 2$;
при $0 < a < 1$; $1 < a < 4$; $a > 4$ $x = 2 - a$; $x = \pm\sqrt{a}$;
при $a = 1$ $x = \pm 1$;
при $a = 4$ $x = \pm 2$.

Упражнения

1. Уравнение $x^3 - 2x - a = 0$ имеет корень $x = 2$. Найти остальные корни этого уравнения.

2. Определить, при каких значениях a уравнение $2x^3 + 3x^2 - 36x - a + 2 = 0$ имеет ровно два корня.

3. В зависимости от параметра p указать те значения a, для которых уравнение $x^3 - 2px^2 + p = a$ имеет ровно два корня.

Указание. Выполнить подстановку $x = -\frac{2p}{3}t$.

4. Известно, что уравнение $x^3 + bx + a - 4 = 0$ имеет два равных корня, а третий корень равен 2. Найти a и b.

Ответы и решения:

1. Других корней нет.
2. При $a = 83$ и $a = -42$.
3. При $p > 0$ $p < a < \frac{32}{27}p^3 + p$; при $p < 0$ $\frac{33}{27}p^3 + p < a < p$; при $p = 0$ решений нет.
4. (2; −3); (20; −12).

Решение. Поскольку уравнение имеет своим корнем 2, выполняется равенство $8 + 2b + a - 4 = 0$, $a + 2b = -4$. Далее, используя условие кратности корня, получаем $4b^3 + 27(a - 4)^2 = 0$. Имеем систему $\begin{cases} a + 2b = -4, \\ 4b^3 + 27(a-4)^2 = 0. \end{cases}$

Далее, оставляя одну переменную, получаем $b^3 + 27b^2 + 216b + 432 = 0$. Очевиден корень $b = -3$, тогда $(b + 3)(b^2 + 24b + 144) = 0$.

VIII. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

При решении тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами будем особое внимание обращать на контрольные значения параметров (см. введение).

Так, для уравнения $a \cdot \sin x = 3$ значение $a = 0$ – первое контрольное значение параметра, с помощью которого составляем разбиение множества R. Короче это разбиение можно записать в виде следующей совокупности: $a = 0$; $a \neq 0$. Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a \neq 0$, то уравнение $a \cdot \sin x = 3$ можно преобразовать к виду $\sin x = \frac{3}{a}$.

Так как $|\sin x| \leq 1$, то естественно считать те значения параметра, которые обращают $\frac{3}{a}$ в 1 или -1, контрольными значениями. Таким образом, $a = 3$, $a = -3$ – вторые контрольные значения параметра.

При $\left[\begin{array}{l} a \geq 3, \\ a \leq -3 \end{array}\right.$ из уравнения $\sin x = \frac{3}{a}$ получаем $x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{a} + \pi k$, $k \in Z$, а при $\begin{cases} -3 < a < 3, \\ a \neq 0 \end{cases}$ уравнение не имеет решений (так как выполняется неравенство $\left|\frac{3}{a}\right| > 1$).

Ответ: при $(-3; 3)$ уравнение решений не имеет;

при $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ $x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{a} + \pi k$, $k \in Z$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin ax\pi = 0$.

Решение. Если $a = 0$, то x – любое число, так как имеем очевидное равенство $\sin 0 = 0$. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{n}{a}$, где $n \in Z$.

Ответ: при $a = 0$ $x \in R$; при $a \neq 0$ $x = \frac{n}{a}$, где $n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos(a-1)x = a$.

Решение. Данное уравнение будет иметь корни, если $|a| \le 1$. Далее замечаем, что если $a = 1$, то $\cos 0 = 1$ — верное равенство и x — любое действительное число.

Если $a \ne 1$, то $x = \pm\frac{1}{a-1}\arccos a + \frac{2\pi n}{a-1}$, $n \in Z$.

Ответ: при $a = 1$ $x \in R$;

при $a \in [-1; 1)$ $x = \pm\frac{1}{a-1}\arccos a + \frac{2\pi n}{a-1}$, $n \in Z$;

при $a \in (-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$ корней нет.

Умение найти контрольные значения во многом зависит от наблюдательности и сообразительности решающего. При отыскании контрольных значений существенным является также выбор наиболее «удобного» уравнения в цепи преобразований, получаемых из заданного при последовательном его преобразовании.

Пример 3. Решить уравнение $\cos(a+x) + \cos(a-x) = 2\sin a$.

Решение. Уравнение легко преобразуется к виду $2\cos a \cos x = 2\sin a$.

Если $\cos a = 0$, то $a = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$, $\sin a \ne 0$, и уравнение корней не имеет.

Если $\cos a \ne 0$; $\cos x = \operatorname{tg} a$. Последнее уравнение имеет корни, если $-1 \le \operatorname{tg} a \le 1$, тогда $-\frac{\pi}{4} + \pi n \le a \le \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ и $x = \pm\arccos(\operatorname{tg} a) + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$;

$x = \pm\arccos(\operatorname{tg} a) + 2\pi k$, $k \in Z$;

при $a \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi m; \frac{3\pi}{4} + \pi m\right)$, $m \in Z$ корней нет.

Пример 4. Решить уравнение $4\sin x \cos^2 x = a + \sin x$.

Решение. При решении уравнения $4\sin x \cos^2 x = a + \sin x$ довольно трудно сразу увидеть контрольные значения параметра. Преобразовав заданное уравнение, имеем

$4\sin x \cos^2 x - \sin x = a$;

$\sin x(4\cos^2 x - 1) = a$;

$\sin x(4(1 - \sin^2 x) - 1) = a$;
$\sin x(3 - 4\sin^2 x) = a$;
$3\sin x - 4\sin^3 x = a$;
$\sin 3x = a$.

Естественно, последнее уравнение наиболее удобно для отыскания контрольных значений параметра: $a = 1$, $a = -1$. С помощью найденных контрольных значений составим следующее разбиение множества значений параметра: $a < -1$; $-1 \le a \le 1$; $a > 1$. В первом и последнем случаях уравнение не имеет решений, а на отрезке $[-1; 1]$ $x = \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin a + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ корней нет;

при $a \in [-1; 1]$ $x = \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin a + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $(a - 1)\cos x + (a + 1)\sin x = 2a$.

Решение. Разделим обе части уравнения на выражение $\sqrt{(a-1)^2 + (a+1)^2} = \sqrt{2(a^2+1)}$.

Так как $\left(\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\right)^2 = 1$, то найдется такое α, что $\sin \alpha = \frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$, $\cos \alpha = \frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$. Именно если $a \ge -1$, то $\alpha = \arcsin \frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$, при $a < -1$ имеем $\alpha = \pi - \arcsin \frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$.

Поэтому $\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$, т. е. $\sin(x + \alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$.

Это уравнение имеет действительные корни при условии, что

$\left|\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\right| \le 1$, т. е. $-1 \le a \le 1$. В этом случае существует такое β, что

$\sin\beta = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$. Поэтому при $-1 \le a \le 1$ данное уравнение принимает вид $\sin(x + \alpha) = \sin\beta$. Отсюда получаем, что $x = 2\pi n + \beta - \alpha$ или $x = 2\pi k + \pi - \beta - \alpha$, где $\{n, k\} \in Z$. Эти решения можно представить в виде

$$x = 2\pi n + \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} - \arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}},\ n \in Z, \text{ или}$$

$$x = (2k+1)\pi - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} - \arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}},\ k \in Z.$$

Ответ: при $a[-1;\ 1]$ $x = 2\pi n + \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} - \arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$,

$n \in Z$,

$x = (2k+1)\pi - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} - \arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}}$, $k \in Z$;

при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$ корней нет.

Пример 6. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

Решение. Выполняем очевидные преобразования:

$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = a$;

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = a$;

$2 - \sin^2 2x = 2a$; $\sin^2 2x = 2 - 2a$; $1 - \cos 4x = 4 - 4a$; $\cos 4x = 4a - 3$.

Последнее уравнение будет иметь решения, если $|4a - 3| \le 1$; $-1 \le 4a - 3 \le 1$; $2 \le 4a \le 4$; $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

Итак, если $a \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Ответ: при $a \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ $x = \pm\frac{1}{4}$ arccos $(4a - 3) + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$;

при $a \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right) \cup (1;\ +\infty)$ решений нет.

Далее превратим уже решенное уравнение в неравенство (так мы поступали в первых разделах этого учебно-методического пособия).

Пример 7. Решить неравенство $\sin^4 x + \cos^4 x < a$.

Решение.

I способ. Применив формулы понижения степени, получим

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 < a \text{ и далее } \cos^2 2x < 2a - 1. \qquad (*)$$

Так как $0 \le \cos^2 2x \le 1$, то контрольные значения параметра найдем из условий $2a - 1 = 0$; $2a - 1 = 1$ — это значения $a = \frac{1}{2}$ и $a = 1$. Рассмотрим неравенство (*) в каждом из следующих пяти случаев: $a < \frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < a < 1$; $a = 1$ и $a > 1$.

1) $a < \frac{1}{2}$. Тогда $2a - 1 < 0$ и неравенство (*) не имеет решений.

2) $a = \frac{1}{2}$. Неравенство (*) принимает вид $\cos^2 2x < 0$; это неравенство решений не имеет.

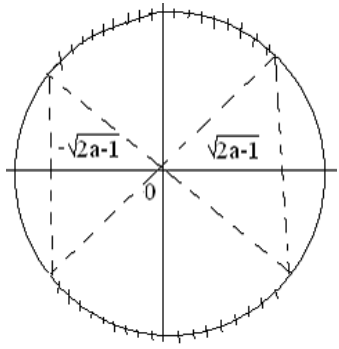
3) $\frac{1}{2} < a < 1$. Тогда $0 < 2a - 1 < 1$ и неравенство (*) сводится к двойному неравенству $-\sqrt{2a-1} < \cos 2x < \sqrt{2a-1}$.

С помощью единичной окружности находим

$\pi n + \arccos\sqrt{2a-1} < 2x < \arccos\left(-\sqrt{2a-1}\right) + \pi n$, т. е.

$\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\arccos\sqrt{2a-1} < x < \frac{1}{2}\arccos\left(-\sqrt{2a-1}\right) + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in Z$ (см. рисунок).



4) $a = 1$. Тогда неравенство (*) принимает вид $\cos^2 2x < 1$, что верно для всех x, за исключением тех значений x, когда $\cos^2 2x = 1$, т. е. $x \neq \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

5) $a > 1$. В этом случае $2a - 1 > 1$ и неравенство выполняется для всех x.

Ответ: при $a \leq \frac{1}{2}$ решений нет;

при $\frac{1}{2} < a \leq 1$

$$\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\arccos\sqrt{2a-1} < x < \frac{1}{2}\arccos\left(-\sqrt{2a-1}\right) + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

при $a > 1$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Замечание. При записи ответа проведено объединение решений.

II способ. Применив формулы понижения степени, получим

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 < a,\ \cos^2 2x < 2a - 1,$$

далее $\frac{1+\cos 4x}{2} < 2a - 1$; $\cos 4x < 4a - 3$.

Если $4a - 3 > 1$, $a > 1$, то $x \in R$;
если $4a - 3 \leq -1$, $a \leq 0{,}5$, то решений нет;
если $0{,}5 < a \leq 1$,
$\arccos(4a - 3) + 2\pi n \leq 4x \leq 2\pi - \arccos(4a - 3) + 2\pi n$, $n \in Z$;

$$\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{1}{2}\pi n \le x \le -\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{1}{2}\pi(n+1),\ n \in Z.$$

Примечание. Обратим внимание на то, что различные способы решения дают различную запись ответа.

Пример 8. Решить неравенство $a\sin^2 x + 2\cos x - a + 1 > 0$.

Решение. Неравенство легко приводится к виду

$$a\cos^2 x - 2\cos x - 1 < 0. \qquad (1)$$

Если $a = 0$, то имеем $2\cos x + 1 > 0$, откуда получаем

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi m < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi m, \text{ где } m \in Z.$$

При $a \ne 0$ положим $\cos x = z$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} az^2 - 2z - 1 < 0, \\ -1 \le z \le 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Различные возможные случаи определяются знаками функции $f(z) = az^2 - 2z - 1$ в точках -1 и 1, знаком a и положением и значением экстремума функции $y = f(z)$. Имеем: $f(-1) = a + 1$, $f(1) = a - 3$. Далее, так как $f'(z) = 2az - 2$, экстремум функции находится в точке $z = \frac{1}{a}$ и является минимумом при $a > 0$, максимумом при $a < 0$. Значение функции в точке экстремума равно $-\frac{a+1}{a}$. Уравнение $az^2 - 2z - 1 = 0$ имеет действительные корни при $a > -1$, причем эти корни равны:

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{1+a}}{a};\quad z_2 = \frac{1+\sqrt{1+a}}{a}.$$

Значения функции $f(z)=az^2 - 2z - 1$ в точках -1 и 1 и в точке экстремума меняют знак при следующих значениях a: -1, 0, 1 и 3. Поэтому разобъем числовую прямую на следующие промежутки: $(-\infty; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 3)$; $(3; +\infty)$.

При $a < -1$ $f(-1)$ и $f(1)$ отрицательны, отрицательно и значение экстремума, находящегося в точке $\frac{1}{a}$ промежутка $(-1; 1)$. В этом случае функция $y = f(z)$ отрицательна во всех точках отрезка $[-1; 1]$.

При $-1 < a < 0$ значение функции положительно при $z = -1$ и отрицательно при $z = 1$. Точка экстремума лежит вне отрезка. Поэтому функция имеет один корень на отрезке $[-1; 1]$, а именно z_1. Поэтому функция $y = f(z)$ отрицательна на промежутке $(z_1; 1)$.

При $0 < a < 3$ дело обстоит аналогичным образом.

Пусть теперь $a > 3$. В этом случае функция $y = f(z)$ положительна на концах отрезка $[-1; 1]$, имеем на этом отрезке точку минимума, причем ее значение в этой точке отрицательно. Поэтому неравенство $f(z)<0$ имеет место на промежутке $(z_1; z_2)$.

Итак, мы выяснили, каково решение системы (2). Возвращаясь к неравенству (1), получаем ответ.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1)$ x – любое действительное число;

при $a = -1$ $x \neq \pi(2k + 1)$, $k \in Z$;

при $a = 0$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$;

при $a = 3$ $2\pi n - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < x < 2\pi n + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $n \in Z$;

при $a \in (-1; 0) \cup (0; 3)$ $2\pi l - \arccos z_1 < x < 2\pi l + \arccos z_1$, $l \in Z$;

при $a \in (3; +\infty)$ $2\pi p - \arccos z_1 < x < 2\pi p + \arccos z_2$, $p \in Z$ или $2\pi q + \arccos z_2 < x < 2\pi q + \arccos z_1$, $q \in Z$,

где $z_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{a+1}\right)$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{a+1}\right)$.

Решим еще несколько различных уравнений.

Пример 9. Решить уравнение $\sin 4x = a\operatorname{tg} x$.

Решение. Область определения уравнения задается неравенством $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$. Преобразуем исходное уравнение:

$4\sin x \cos x \cos 2x - a\sin x = 0$;

$\sin x(8\cos^4 x - 4\cos^2 x - a) = 0$.

Уравнение $\sin x = 0$ дает $x = \pi n$, $n \in Z$. Заметим, что этот результат не зависит от параметра a, т. е. $a \in R$. Биквадратное уравнение относительно $\cos^2 x$ $8\cos^4 x - 4\cos^2 x - a = 0$ будет иметь решение, если дискриминант его будет неотрицательным, т. е. при выполнении условия $1 + 2a \geq 0$, $a \geq -\frac{1}{2}$. Итак, $\cos^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{1+2a}}{4}$, но $0 \leq \cos^2 x \leq 1$.

Проверим выполнение последнего неравенства:

1) $0 \le \frac{1-\sqrt{1+2a}}{4} \le 1$; $0 \le 1-\sqrt{1+2a} \le 4$; $-1 \le -\sqrt{1+2a} \le 3$;

$-3 \le \sqrt{1+2a} \le 1$; тогда $0 \le \sqrt{1+2a} \le 1$; $0 \le 1 + 2a \le 1$; $-1 \le 2a \le 0$;

$-\frac{1}{2} \le a \le 0$.

Получаем $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1+2a}}{4}}$;

$x = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1+2a}}{4}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

2) $0 \le \frac{1+\sqrt{1+2a}}{4} \le 1$; $0 \le 1+\sqrt{1+2a} \le 4$; $-1 \le \sqrt{1+2a} \le 3$;

$0 \le \sqrt{1+2a} \le 3$; $0 \le 1 + 2a \le 9$; $-1 \le 2a \le 8$; $-\frac{1}{2} \le a \le 2$.

Получаем $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+2a}}{4}}$;

$x = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+2a}}{4}}\right) + 2\pi l,\ l \in Z.$

Ответ: при $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (4;\ +\infty)$ $x = \pi n,\ n \in Z$;

при $a \in \left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$ $x = \pi n,\ n \in Z$;

$x = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1+2a}}{4}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+2a}}{4}}\right) + 2\pi l,\ l \in Z$;

при $a \in (0; 4]$ $x = \pi n,\ n \in Z$;

$$x = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+2a}}{4}}\right) + 2\pi l,\ l \in Z.$$

Замечание. Очевидно, что все корни входят в область определения уравнения.

Рассмотрим еще один возможный подход к решению.

Итак, $\cos^2 x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+2a}}{4}$. Применяя формулу понижения степени, получим $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+2a}}{4}$; $1+\cos 2x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+2a}}{2}$;

$\cos 2x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+2a}}{2}$.

1) $\cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}$. Это уравнение имеет корни, если $1 + 2a \geq 0$, $a \geq -\dfrac{1}{2}$:

$$-1 \leq \frac{-1-\sqrt{1+2a}}{2} \leq 0;\ -1 \leq -\sqrt{1+2a} \leq 1;\ -1 \leq \sqrt{1+2a} \leq 1;\ -\frac{1}{2} \leq a \leq 0.$$

При $a \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$ $x = \pm\ \dfrac{1}{2}\arccos\ \dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos\ 2x = \dfrac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$. Это уравнение имеет корни, если

$$-1 \leq \frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2} \leq 1,$$

тогда при $-\dfrac{1}{2} \leq a \leq 4$ $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\ \dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Далее можно делать выводы о количестве корней на каждом из рассмотренных промежутков...

Пример 10. Решить уравнение $\cos(a + x) = \dfrac{\cos a}{\cos x}$. (1)

Решение. Умножив обе части уравнения на $\cos x$, получим: $\cos x \cos(a + x) = \cos a$ и далее
$\cos(x + a + x) + \cos(x - a - x) = 2\cos a$, т. е. $\cos(2x + a) = \cos a$. (2)

Из уравнения (2) находим (используя условие равенства косинусов)

$2x + a = \pm a + 2\pi k,\ k \in Z,$

откуда получаем

$x = \pi n,\ x = -a + \pi k,\ \{n, k\} \in Z.$ (3)

Проверка. В процессе решения исходного уравнения (1) мы выполнили умножение обеих частей уравнения на $\varphi(x) = \cos x$, что привело к расширению области определения уравнения, а значит, и могло привести к появлению посторонних корней. Отберем из найденной совокупности семейств решений уравнения (2) такие семейства, которые являются решениями уравнения (1). Для этого исключим из совокупности семейств (3) значения x, при которых $\cos x = 0$, т. е. значения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$. Ясно, что семейства $x = \pi n$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$ не пересекаются.

Полагая далее $-a + \pi k = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,$

находим $a = \dfrac{\pi}{2}(-1 + 2k + 2m).$

Это значит, что семейство $x = -a + \pi k$ является решением уравнения (1) лишь при значениях $a \neq \dfrac{\pi}{2}(2k + 2m - 1)$, или, короче, при $a \neq \dfrac{\pi}{2}(2p - 1)$, где $p = m + k,\ p \in Z.$

Ответ: при $a = \dfrac{\pi}{2}(2p - 1)$ $\quad x = \pi k,\ \{k, p\} \in Z;$

при $a \neq \dfrac{\pi}{2}(2p - 1)$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = -a + \pi m, \end{array}\right.$ $\{p, n, m\} \in Z.$

Пример 11. Решить уравнение

$(a-1)\sin^2 x - 2(a+1)\sin x + 2a - 1 = 0.$ (1)

Решение. Положим $\sin x = y$, тогда уравнение (1) примет вид

$(a-1)y^2 - 2(a+1)y + 2a - 1 = 0.$ (2)

Первым контрольным значением параметра a будет значение $a = 1$, которое обращает в нуль коэффициент при y^2. Это значение позволяет составить следующее разбиение множества значений параметра: $a = 1$; $a \neq 1$.

При $a = 1$ уравнение (2) принимает вид

$-4y + 1 = 0,$

откуда находим $y = \frac{1}{4}$, т. е. $\sin x = \frac{1}{4}$, и, следовательно,

$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \neq 1$. Найдем дискриминант уравнения (2). Имеем $D = (a+1)^2 - (a-1)(2a-1) = -a^2 + 5a$.

Назовем вторыми контрольными значениями параметра a те, при которых $D = 0$. Это будут значения $a = 0$, $a = 5$. Заметим, что $D < 0$, если $a < 0$; $a > 5$ и $D \geq 0$, если $0 \leq a \leq 5$.

В случае $\left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 5 \end{array}\right.$ уравнение (2) не имеет решений.

В случае $\left[\begin{array}{l} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{array}\right.$ квадратное уравнение имеет два действительных корня: $y_{1,\,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{5a - a^2}}{a-1}$.

Так как $y = \sin x$, то должны выполняться следующие неравенства: $-1 \leq y_1 \leq 1$; $-1 \leq y_2 \leq 1$. Выясним, есть ли такие значения параметра a (из рассматриваемого множества $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{cases}$), которые удовлетворяют системе неравенств x, т. е. системе $-1 \leq y_1 \leq 1$ или системе

$$\begin{cases} \dfrac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \geq -1, \\ \dfrac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \leq 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Система неравенств, в свою очередь, равносильна следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-1>0,\\ a+1+\sqrt{5a-a^2}\ \geq 1-a,\\ a+1+\sqrt{5a-a^2}\ \leq a-1;\end{cases}\\ \begin{cases}a-1<0,\\ a+1+\sqrt{5a-a^2}\ \leq 1-a,\\ a+1+\sqrt{5a-a^2}\ \geq a-1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (4)$$

Решив первую систему совокупности (4), имеем

$$\begin{cases}a>1,\\ \sqrt{5a-a^2}\ \geq -2a,\\ \sqrt{5a-a^2}\ \leq -2.\end{cases} \qquad (5)$$

Поскольку последнее неравенство системы (5) не имеет решений, система (5) решений не имеет.

Решив вторую систему совокупности (4), имеем

$$\begin{cases}a<1,\\ \sqrt{5a-a^2}\ \leq -2a,\\ \sqrt{5a-a^2}\ \geq -2.\end{cases} \qquad (6)$$

Так как второе неравенство системы (6) не имеет решений, система (6) решений не имеет.

Итак, значений параметра a, удовлетворяющих системе (3), нет. Это значит, что уравнение $\sin x = \dfrac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ не имеет решений.

Теперь будем искать значения параметра a из рассматриваемого множества $\begin{cases}0 \leq a \leq 5,\\ a \neq 1,\end{cases}$ которые удовлетворяют системе неравенств $-1 \leq y_2 \leq 1$, т. е. системе

$$\begin{cases} \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \geq -1, \\ \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \leq 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Система (7), в свою очередь, равносильна следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1>0, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \geq 1-a, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \leq a-1; \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \leq 1-a, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \geq a-1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (8)$$

Решим первую систему совокупности (8). Имеем

$$\begin{cases} a>1, \\ \sqrt{5a-a^2} \leq 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \geq 2, \end{cases}$$

и далее

$$\begin{cases} a>1, \\ 5a-a^2 \leq 4a^2, \\ 5a-a^2 \geq 4, \end{cases}$$

откуда находим $1 < a \leq 4$.

Решим вторую систему совокупности (8). Имеем

$$\begin{cases} a<1, \\ \sqrt{5a-a^2} \geq 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \leq 2, \end{cases}$$

или далее (так как $a \geq 0$),

$$\begin{cases} a < 1, \\ 5a - a^2 \geq 4a^2, \\ 5a - a^2 \leq 4, \end{cases}$$

откуда находим $0 \leq a < 1$.

Итак, совокупность систем (8), а следовательно, и система (4) имеют решения: $0 \leq a < 1$, $1 < a \leq 4$. Это значит, что на множестве $\begin{cases} 0 \leq a \leq 5, \\ a \neq 1 \end{cases}$ уравнение $\sin x = \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ (9) имеет решения только в том случае, если $\begin{cases} 0 \leq a \leq 4, \\ a \neq 1. \end{cases}$

Это решение таково: $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + \pi k$, $k \in Z$.

Если же $4 < a \leq 5$, то уравнение (9), а с ним и уравнение (1) не имеют решений.

Ответ: при $a = 1$ $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

при $a \in [0;\ 1) \cup (1;\ 4]$ $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + \pi k$, $k \in Z$;

при $a \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty)$ уравнение (1) не имеет решений.

Пример 12. Решить уравнение $2(\sin^2 2x - a \sin^2 x) = a^2$ при всех значениях параметра a.

Решение. Исходное уравнение легко преобразуется к виду

$$2\left(1 - \cos^2 2x - \frac{a(1-\cos 2x)}{2}\right) = a^2;$$

$2(1 - \cos^2 2x) - a(1 - \cos 2x) = a^2$;

$2\cos^2 2x - a\cos 2x + a^2 + a - 2 = 0$.

Полагая $\cos 2x = t$, $t \in [-1;\ 1]$, приходим к уравнению

$2t^2 - at + a^2 + a - 2 = 0$. (*)

Определим те значения параметра a, при которых оба корня этого уравнения принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < t_в < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 8a^2 - 8a + 16 \geq 0, \\ 2 + a + a^2 + a - 2 > 0, \\ 2 - a + a^2 + a - 2 > 0, \\ -1 < \dfrac{a}{4} < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a^2 + 8a - 16 \leq 0, \\ a^2 > 0, \\ a^2 + 2a > 0, \\ -4 < a < 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-4 - 8\sqrt{2}}{7} \leq a \leq \dfrac{-4 + 8\sqrt{2}}{7}, \\ a \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a < -2; \end{array}\right. \\ -4 < a < 4; \end{cases} \quad \text{откуда } a \in \left[-\frac{4 + 8\sqrt{2}}{7};\ -2\right) \cup \left(0;\ \frac{-4 + 8\sqrt{2}}{7}\right].$$

При этих значениях a $\quad t = \dfrac{a \pm \sqrt{-7a^2 - 8a + 16}}{4}$,

$$\cos 2x = \frac{a \pm \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4};\ x = \pm\ \frac{1}{2} \arccos\ \frac{a \pm \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

При $a = -2$ $2t^2 + 2t + 4 - 2 - 2 = 0$; $t = 0$ и $\cos 2x = 0$,

тогда $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Определим те значения a, при которых меньший корень уравнения (*) принадлежит промежутку $[-1; 1]$. Для этого необходимо решить систему неравенств

$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a > 0, \\ a^2 < 0. \end{cases}$ Очевидно, что эта система решений не имеет.

Теперь определим те значения a, при которых больший корень уравнения (*) принадлежит отрезку $[-1; 1]$. При этом должна иметь решения система неравенств

$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a < 0, \\ a^2 > 0. \end{cases}$$

Решение системы неравенств $-2 < a < 0$ дает $t = \frac{a + \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4}$;

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a + \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{4 + 8\sqrt{2}}{7}\right] \cup \left[\frac{8\sqrt{2} - 4}{7}; +\infty\right)$ уравнение решений не имеет;

при $a \in \left[-\frac{4 + 8\sqrt{2}}{7}; -2\right) \cup \left[0; \frac{-4 + 8\sqrt{2}}{7}\right]$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a \pm \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + \pi k,\ k \in Z;$$

при $-2 < a < 0$ $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a + \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

при $a = -2$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$;

при $a = 0$ $x = \frac{1}{2}\pi n$, $n \in Z$.

Пример 13. Решить уравнение $\sin a \cdot \sin x = \cos b$ (*) при всех действительных значениях параметров.

Решение. Здесь контрольными являются те значения параметра a, при которых $\sin a = 0$, т. е. значения $a = \pi n$, $n \in Z$. Если далее $\sin a = 0$, то контрольными будем считать те значения b, при которых $\cos b = 0$, т. е. $b = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Наконец, если $\sin a \neq 0$, то уравнение (*) преобразуется к виду $\sin x = \frac{\cos b}{\sin a}$, и здесь уже придется отметить контрольную зависимость между параметрами a, b:

$$\left|\frac{\cos b}{\sin a}\right| = 1.$$

В результате для уравнения (*) можно составить разбиение множества значения параметров a, b в виде следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} a = \pi n, \\ b = \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{cases} \\
\begin{cases} a = \pi n, \\ b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{cases} \\
\begin{cases} a = \pi n, \\ \left|\frac{\cos b}{\sin a}\right| > 1; \end{cases} \\
\begin{cases} a \neq \pi n, \\ \left|\frac{\cos b}{\sin a}\right| \leq 1, \end{cases}
\end{array}\right. \quad n \in Z,\ k \in Z.$$

Для первой системы решением уравнения (*) является любое действительное число. Вторая и третья системы говорят о том, что уравнение решений не имеет. Для четвертой системы получим

$$x = (-1)^m \arcsin\left(\frac{\cos b}{\sin a}\right) + \pi m,\ m \in Z.$$

Упражнения

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют ровно один корень.

1. $(x - 1)\arcsin(x - a) = 0$.

2. $(a^2 - 5a + 6)\sin x = a - 3$ на $[0; 2\pi]$.

3. $\dfrac{(x-a)(x-1)}{\sin^2 x} = 0$.

Сколько корней имеют уравнения на указанном промежутке в зависимости от параметра a?

4. $\cos^2 x + \cos x = a$ на $[0; 2\pi]$.

5. $\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1} = a$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

При каких значениях a уравнение (1) следует из уравнения (2)?

6. $\sin^2 x = 1$ (1); $a\sin x = 1$ (2).

7. $\sin 3x + \cos 5x - \cos 3x = a$ (1); $\sin x = a\sin x^2$ (2).

8. Решить уравнение $\cos^2 x = a\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ при всех значениях параметра a.

Указание. Уравнение преобразовать к виду $2(1 - \sin^2 x) = a(1 - \sin x)$.

9. Решить уравнение $4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = (3a - \sin 2x)^2$.

Указание. Уравнение преобразовать к виду $\sin^2 2x - 2(1 + 3a)\sin 2x + 9a^2 - 2 = 0$, положить $\sin 2x = t$ и воспользоваться условием принадлежности корней последнего уравнения промежутку $[-1; 1]$.

10. При каких значениях a неравенство $\sin^2 x - 2a\sin x + 4a - 3 \geq 0$ выполняется при всех значениях x?

11. При каких значениях a неравенство

$\cos^2 x - 2(a - 3)\cos x + 2a + 9 \geq 0$ выполняется на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$?

Ответы (во всех примерах k, l, m, n целые):

1. $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

2. $\{1\}$.

3. $\{1\} \cup \pi k$.

4. При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right) \cup (2;\ +\infty)$ решений нет; при $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (0;\ 2]$ – два решения; при $a = 0$ – три решения; при $a \in \left(-\frac{1}{4};\ 0\right)$ – четыре решения.

5. При $a \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$ – решений нет; при $a \in [-1;\ 0]$ – одно решение.

6. $\{-1;\ 1]$.

7. $a = 0$.

Указание. Заметьте, что $x = 0$ – корень уравнения (2).

8. При $a \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $a \in [0;\ 4]$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ и $x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{a}{2} - 1\right) + \pi n,\ n \in Z$.

9. При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ +\infty)$ решений нет;

при $a \in \left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right]$ $x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(3a + 1 \pm \sqrt{6a + 3x}\right) + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;

при $a \in \left(-\frac{1}{3};\ 1\right]$ $x = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin\left(3a + 1 - \sqrt{6a + 3x}\right) + \frac{\pi k}{2},\ m \in Z$.

10. $a \in [1;\ +\infty]$.

11. $a \in \left[-12\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.

IX. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ, ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАМЕТРОВ

1. Аналитический способ

Пример 1. Решить уравнение $|x - a| = a + 3$.

Решение. При $a + 3 < 0$, т. е. при $a < -3$, уравнение корней не имеет. При $a = -3$ уравнение имеет корень $x = -3$. При $a > -3$ уравнение распадается на два: $x - a = a + 3$ или $x - a = -a - 3$, откуда $x = 2a + 3$ и $x = -3$.

Ответ: при $a < -3$ корней нет; при $a = -3$ $x = -3$; при $a > -3$ $x = -3$ и $x = 2a + 3$.

Пример 2. Для каждого значения a найти число корней уравнения $|x - 1| = ax + 2$.

Решение. 1. Пусть $x \geq 1$, тогда $x - 1 = ax + 2$; $(a - 1)x = -3$ и $x = \dfrac{3}{1-a}$ при $a \neq 1$. Проверим, при каких значениях a выполняется неравенство $x \geq 1$:

$$\frac{3}{1-a} \geq 1;\ \frac{2+a}{1-a} \geq 0;\quad -2 \leq a < 1.$$

2. Пусть $x \leq 1$, тогда $-x + 1 = ax + 2$, $(a + 1)x = -1$, $x = -\dfrac{1}{a+1}$ при $a \neq -1$. Проверим, при каких значениях a выполняется неравенство $-\dfrac{1}{a+1} \leq 1$; $\dfrac{a+2}{a+1} \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -2] \bigcup (-1; +\infty)$.

Занесем результаты решения в таблицу.

Замечание. Авторы умышленно значение $a = -2$ включили в два рассматриваемых промежутка, что позволяет сделать проверку выполнения задания. Очевидно, что при $a = -2$ $\dfrac{3}{1-a} = -\dfrac{1}{a+1}$, и уравнение имеет один корень. Далее будет дано графическое решение этого упражнения.

a	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$\frac{3}{1-a}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-\frac{1}{a+1}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

(«−» означает не корень, «+» означает корень)

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ уравнение имеет один корень, при $a \in (-1; 1)$ два корня.

Пример 3. Решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = -3$ и $x = 1$.

Пусть $x < -3$, тогда $-x - 3 + ax - a = 4$, $x(a - 1) = a + 7$, $x = \frac{a+7}{a-1}$ при $a \neq 1$. Найдем те значения a, при которых $\frac{a+7}{a-1} < -3$; $\frac{4a+4}{a-1} < 0$; $\frac{a+1}{a-1} < 0$. Очевидно, что $|a| < 1$.

Пусть $-3 \leq x \leq 1$, тогда получаем уравнение $x + 3 + ax - a = 4$, $x(a + 1) = a + 1$, и если $a = -1$, то $-3 \leq x \leq 1$ − решение данного уравнения; если $a \neq -1$, то $x = 1$.

Рассматривая случай, когда $x > 1$, получаем уравнение $x + 3 - ax + a = 4$, $x(1 - a) = 1 - a$. Если $a = 1$, решением уравнения является $x > 1$; если $a \neq 1$, то $x = 1$.

Ответ: при $a = 1$ $x > 1$; при $a = -1$ $-3 \leq x \leq 1$; при $|a| < 1$ $x = 1$ и $x = \frac{7+a}{a-1}$; при $|a| > 1$ $x = 1$.

Упражнение

Решить уравнения:

1. $x^2 + |x| + a = 0$.
2. $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

3. $a|x - 2| = 2x + 3$.

4. $|2x + 2| = x^2 + a^2$.

5. $|x - a| - |x - 2| = 1$.

Ответы и решения:

1. Пусть $x \geq 0$, тогда $x^2 + x + a = 0$. Если $1 - 4a < 0$, т. е. $a > 0{,}25$, то уравнение корней не имеет. Если $a = 0{,}25$, решение квадратного уравнения дает $x = -0{,}5$, что не удовлетворяет неравенству $x \geq 0$. Пусть $a < 0{,}25$, тогда корень $x_1 = 0{,}5(-1-\sqrt{1-4a})$ не удовлетворяет неравенству $x \geq 0$, а корень $x_2 = 0{,}5(-1+\sqrt{1-4a})$ этому неравенству будет удовлетворять, если $\sqrt{1-4a} \geq 1$, т. е. при $a \leq 0$.

Пусть $x < 0$. Имеем уравнение $x^2 - x + a = 0$. Если $a > 0{,}25$, уравнение корней не имеет. При $a \leq 0{,}25$ уравнение имеет корни $x_3 = 0{,}5(1+\sqrt{1-4a})$ и $x_4 = 0{,}5(1-\sqrt{1-4a})$. Первый корень не удовлетворяет условию $x < 0$, а второй при выполнении проверки условия $x < 0$ дает $a < 0$.

Ответ: при $a < 0$ $x = 0{,}5(-1+\sqrt{1-4a})$; $x = 0{,}5(1-\sqrt{1-4a})$; при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 0$ решений нет.

2. Положим $12^{|x|} = t$, где $t > 0$, получаем уравнение $t^2 - 2t + a = 0$, которое не имеет корней, если $1 - a < 0$, т. е. $a > 1$ и имеет единственный корень $t = 1$ при $a = 1$, но тогда $12^{|x|} = 1$ и $x = 0$.

При $a < 1$ уравнение имеет корни: $t_1 = 1+\sqrt{1-a}$, который дает $12^{|x|} = 1+\sqrt{1-a}$, а далее $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$, и $t_2 = 1-\sqrt{1-a}$, который положителен при $0 < a < 1$, тогда $12^{|x|} = 1-\sqrt{1-a}$, $|x| = \log_{12}(1-\sqrt{1-a})$. Очевидно, что $\log_{12}(1-\sqrt{1-a}) < \log_{12}1 = 0$.

Ответ: при $a \leq 1$ $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$, при $a > 1$ уравнение корней не имеет.

3. $a|x - 2| = 2x + 3$.

При $x \geq 2$ получаем уравнение $ax - 2a = 2x + 3$;
$(a - 2)x = 2a + 3$. Если $a = 2$, то уравнение не имеет корней.

При $a \neq 2$ $x = \dfrac{2a+3}{a-2}$.

Эти значения будут корнями уравнения при всех a, удовлетворяющих неравенству $\frac{2a+3}{a-2} \geq 2$, откуда $a > 2$.

При $x < 2$ получаем уравнение $ax - 2a = -2x - 3$; $(a + 2)x = 2a - 3$. При $a = -2$ уравнение корней не имеет. Пусть $a \neq -2$, тогда $x = \frac{2a-3}{a+2}$. Очевидно, что должно выполняться неравенство $\frac{2a-3}{a+2} < 2$, которое дает $a > -2$.

Дополнительно исследуем случаи $a = 2$ и $a = -2$. При $a = 2$ получаем уравнение $|2x - 4| = 2x + 3$, которое дает корень $x = 0{,}25$. При $a = -2$ уравнение $|2x - 4| = -2x - 3$ корней не имеет.

Ответ: при $a \leq -2$ уравнение корней не имеет, при $-2 < a \leq 2$ $x = \frac{2a-3}{a+2}$, при $a > 2$ $x = \frac{2a+3}{a-2}$ и $x = \frac{2a-3}{a+2}$.

Примечание. В дальнейшем будет дан и графический способ решения этого уравнения.

4. Рассмотрим решение двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 - 2x - 2 + a^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 2x + 2 + a^2 = 0. \end{cases}$$

Решением уравнения первой системы являются корни вида $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$. Если $|a| > \sqrt{3}$, то исходное уравнение не имеет корней. Если $a = \pm \sqrt{3}$, то уравнение имеет корень $x = 1$. Если $|a| < \sqrt{3}$, то уравнение имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$, удовлетворяющие условию $x \geq -1$.

Уравнение второй системы корней не имеет, поскольку $(x + 1)^2 + a^2 + 1 > 0$ при любых действительных x.

Ответ: при $|a| \leq \sqrt{3}$ $x = 1 \pm \sqrt{3 - a^2}$; при $a > \sqrt{3}$ и при $a < -\sqrt{3}$ уравнение корней не имеет.

5. Пусть $a = 2$, тогда $|x - 2| - |x - 2| = 1$ — корней нет.

При $a > 2$ имеем три системы:

а) $\begin{cases} x \le 2, \\ -x + a + x - 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2, \\ a = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 < x \le a, \\ -x + a - x + 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < x \le a, \\ x = \dfrac{1+a}{2}. \end{cases}$ Найденные значения будут корнями уравнения, если $2 < \dfrac{1+a}{2} \le a$, откуда $a > 3$;

в) $\begin{cases} x > a, \\ x - a - x + 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ a = 1. \end{cases}$ Решений нет, поскольку рассматривается случай $a > 2$.

При $a < 2$ опять имеем три системы:

а) $\begin{cases} x \le a, \\ -x + a + x - 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le a, \\ a = 3. \end{cases}$ Решений нет, поскольку рассматривается случай $a < 2$.

б) $\begin{cases} a < x \le 2, \\ x - a + x - 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a < \dfrac{a+3}{2} \le 2, \\ x = \dfrac{a+3}{2}. \end{cases}$ Для определения возможных значений a необходимо решить систему $\begin{cases} a + 3 \le 4, \\ 2a < a + 3, \end{cases}$ откуда $a \le 1$;

в) $\begin{cases} x > 2, \\ x - a - x + 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ a = 1. \end{cases}$

Ответ: при $a = 1$ $x \ge 2$; при $a = 3$ $x \le 2$; при $a > 3$ $x = \dfrac{1+a}{2}$; при $a < 1$ $x = \dfrac{a+3}{2}$; при $1 < a < 3$ решений нет.

2. Решение неравенств с параметрами, содержащих модули, методом интервалов

Универсальность метода интервалов позволяет применять его и при решении неравенств с параметрами (аналитический способ). В дальнейшем авторы подробно остановятся и на графическом способе решения.

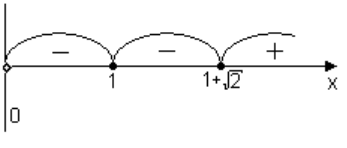
Пример 1. Решить неравенство $|x + 2a| \le \frac{1}{x}$.

Решение. При $x \le 0$ неравенство решений не имеет, поэтому далее считаем, что $x > 0$, но тогда исходное неравенство равносильно неравенству $|x^2 + 2ax| \le 1$. После возведения в квадрат обеих частей последнего неравенства получаем ему равносильное неравенство $(x^2 + 2ax - 1)(x^2 + 2ax + 1) \le 0$.

Пусть $f(x) = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 + 2ax - 1)$ и $D(f) = R_+$.

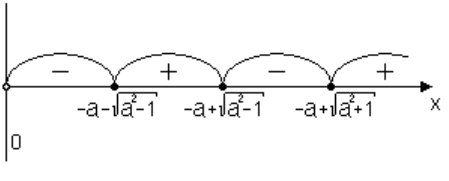
Нули f: $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$.

Корень $x = -a - \sqrt{a^2 + 1}$ не удовлетворяет условию $x > 0$. Очевидно, что $x = -a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$ при всех $a \in R$. Корни $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ удовлетворяют условию $x > 0$ только при $a \le -1$. Рассмотрим случай $a = -1$. В этом случае нули функции f $x = 1 + \sqrt{2}$ и $x = 1$, причем последний корень кратности 2.



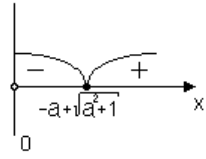
Итак, при $a = -1$ $x \in (0; 1 + \sqrt{2}]$.

Пусть $a < -1$. Имеем ситуацию, представленную на рисунке:



Ясно, что при $a < -1$ $\quad 0 < x \le -a - \sqrt{a^2 - 1}$;

$-a + \sqrt{a^2 - 1} \le x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$. Далее случай $a > -1$. Оба корня $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ не удовлетворяют условию $x > 0$.



При $a > -1$ $\quad 0 < x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$.

Ответ: при $a < -1$

$0 < x \le -a - \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 - 1} \le x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$;

при $a = -1$ $\quad 0 < x \le 1 + \sqrt{2}$;

при $a > -1$ $\quad 0 < x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$.

Пример 2. Для каждого значения параметра a решить неравенство $2|x - a| < 2ax - x^2 - 2$.

Решение.

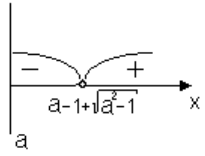
Введем обозначение $f(x) = 2|x - a| - (2ax - x^2 - 2)$. Необходимо решить неравенство $f(x) < 0$. $D(f) = R$. Находим нули функции.

1. $\begin{cases} x \ge a, \\ 2x - 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0. \end{cases}$ После решения уравнения системы получим $x = a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Найдем те значения a, при которых $x \ge a$.

а) $a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} \ge a$, откуда $a \le -\sqrt{2}$ и $a \ge \sqrt{2}$; при этих значениях a $\quad a^2 - 1 > 0$;

б) $a - 1 - \sqrt{a^2 - 1} \ge a$; $\sqrt{a^2 - 1} \le -1$. Последнее неравенство не выполняется ни при каких действительных a.

Итак, при $a \le -\sqrt{2}$ и $a \ge \sqrt{2}$ получаем

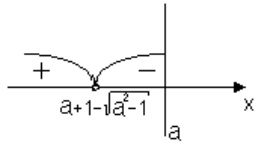


$x \in [a; a-1+\sqrt{a^2-1})$.

2. Пусть теперь $x \le a$, тогда $-2x + 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0$, $x^2 - 2x(1 + a) + 2(1 + a) = 0$. $x = a + 1 \pm \sqrt{a^2-1}$.

а) неравенство $a+1+\sqrt{a^2-1} \le a$ не выполняется ни при каких a;

б) неравенство $a+1-\sqrt{a^2-1} \le a$ вновь выполняется при $a < -\sqrt{2}$ и при $a > \sqrt{2}$.



Ясно, что $x \in (a+1-\sqrt{a^2-1}; a]$.

Ответ: при $|a| \le \sqrt{2}$ неравенство решений не имеет;

при $|a| > \sqrt{2}$ $a-\sqrt{a^2-1}+1 < x < a+\sqrt{a^2-1}-1$.

Упражнения

Решить методом интервалов неравенства:

1. $x^2 - |x| + a \ge 0$.
2. $x^2 \le |x - a|$.

В дальнейшем мы познакомимся с графическим методом решения неравенств, который является более наглядным и в ряде случаев дает более простое решение.

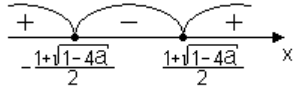
Решения, ответы:

1. ***Решение.*** Пусть $f(x) = x^2 - |x| + a$. $D(f) = R$. Находим нули функции f: $|x|^2 - |x| + a = 0$, $|x| = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

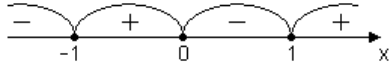
Если $1 - 4a \le 0$, $a \ge 0{,}25$, то квадратные трехчлены $x^2 - x + a$ и $x^2 + x + a$ неотрицательны. В этом случае $x \in R$.

Если $a < 0{,}25$, то нули $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$. Если $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < 0$, то есть $a < 0$, то уравнение $|x| = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ (*) корней не имеет и

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right).$$

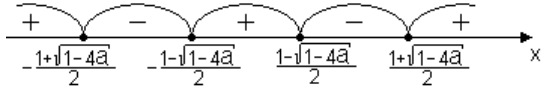


Если $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = 0$, т. е. $a = 0$, то $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$.



Ясно, что $x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$.

Если $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} > 0$, то $0 < a < 0{,}25$ и уравнение (*) имеет два корня: $x = \pm\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.



Если $0 < a < 0{,}25$, то

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: при $a < 0$ $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right)$;

при $a = 0$ $x \in [-1;\ 0] \cup [1; +\infty)$;

при $0 < a < 0{,}25$

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right);$$

при $a \geq 0{,}25$ $x \in R$.

2. ***Решение. I способ.***

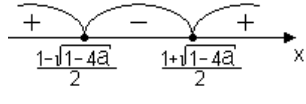
1) $\begin{cases} x \geq a, \\ x^2 \leq x - a; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq a, \\ x^2 - x + a \leq 0. \end{cases}$ Если $D < 0$, т. е. $1 - 4a < 0$, $a > 0{,}25$, то неравенство решений не имеет. Если $D = 0$, т. е. $a = 0{,}25$, $x = 0{,}5$ и условие первого неравенства системы выполняется.

Если $D > 0$, тогда $a < 0{,}25$, и уравнение $x^2 - x + a = 0$ имеет два корня: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

Покажем, что оба корня при $a < 0{,}25$ больше a:

$\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} > a$; $\sqrt{1-4a} > 2a - 1$, что верно при указанных a.

$\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} > a$, $\sqrt{1-4a} < -2a + 1$. $1 - 2a > 0$ при $a < 0{,}25$ и после возведения в квадрат получаем $1 - 4a < 1 - 4a + 4a^2$, которое очевидно.



Значит, если $a < 0{,}25$, то $x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]$.

2) $\begin{cases} x < a, \\ x^2 + x - a \le 0. \end{cases}$ Если $D < 0$, т. е. $1 + 4a < 0$, $a < -0{,}25$, то второе неравенство системы не выполняется ни при каких значениях x. Если $D = 0$, а $a = -0{,}25$, то $x = -0{,}5$ и первое неравенство системы выполняется. Если $D > 0$, т. е. $a > -0{,}25$, то квадратный трехчлен имеет два корня:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

$\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < a$ очевидное неравенство при $a > -0{,}25$.

Выясним, при каких значениях a $\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} < a$, для чего решим систему неравенств $\begin{cases} a > -0{,}25, \\ \sqrt{1+4a} < 2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -0{,}25, \\ 1+4a < 4a^2 + 4a + 1, \end{cases}$ то есть второй корень также меньше a.

Тогда $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

Ответ: при $a < -0{,}25$ $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]$;

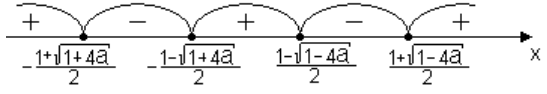
при $-0{,}25 \le a \le 0{,}25$

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right];$$

при $a > 0{,}25$ $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

II способ.

После возведения обеих частей неравенства в квадрат получаем равносильное исходному неравенство $x^4 - (x - a)^2 \le 0$, или $(x^2 - x + a)(x^2 + x - a) \le 0$. Пусть дискриминанты обоих трехчленов положительны, тогда $\begin{cases} 1-4a>0, \\ 1+4a>0, \end{cases}$ откуда $-0{,}25 < a < 0{,}25$. См. решение упражнения 1: левая часть неравенства имеет нули $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ и $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.



Пусть теперь $\begin{cases} 1-4a<0, \\ 1+4a>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>\dfrac{1}{4}, \\ a>-\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $a > \dfrac{1}{4}$, тогда $x^2 - x + a \ge 0$ при $x \in R$ и необходимо решить неравенство $x^2 + x - a \le 0$, которое дает ответ $x \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

Пусть далее a удовлетворяет системе неравенств

$\begin{cases} 1-4a>0, \\ 1+4a<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a<\dfrac{1}{4}, \\ a<-\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $a < -\dfrac{1}{4}$, тогда $x^2 + x - a > 0$ при $x \in R$ и необходимо решить неравенство $x^2 - x + a \le 0$, которое дает ответ $x \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Если $a = \pm 0{,}25$, получаем неравенство, решение которого входит в виде частного случая при неотрицательных обоих дискриминантах.

Ответ совпадает с ответом, полученным при решении способом 1.

Примечание. Отметим интересную аналогию в решении двух различных неравенств, приведенных в упражнениях.

3. Графический метод решения уравнений и неравенств с модулями при наличии параметров

Использование графиков функций и уравнений значительно упрощает решение уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2|x|-x^2}=a$?

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{2|x|-x^2}$ четная. $D(f)$: $[-2; 2]$. Строим график функции $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ и отображаем его симметрично относительно оси Оу.

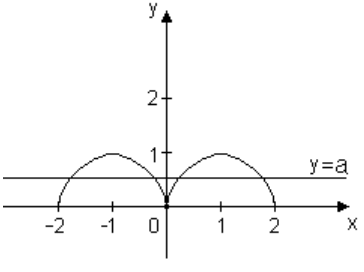


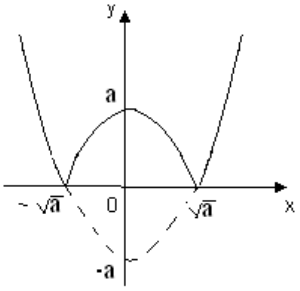
Рис. 1

Прямая $y = a$ параллельна оси Ох. Из рисунка 1 видно, что при $a < 0$ и $a > 1$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ уравнение имеет три корня, при $0 < a < 1$ уравнение имеет четыре корня, при $a = 1$ уравнение имеет два корня.

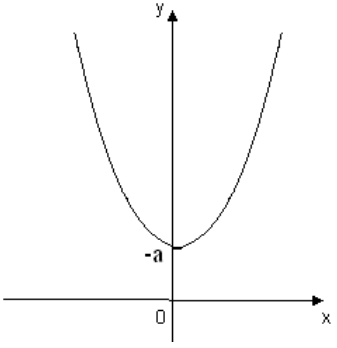
Пример 2. Сколько корней при различных действительных значениях параметров a и b будет иметь уравнение $|x^2 - a| = b$?

Решение. Построим графики функции $y = |x^2 - a|$ при различных значениях параметра a и подсчитаем, сколько раз принимает эта функция значения параметра b (помним, что графиком функции $y = b$ является горизонтальная прямая, параллельная оси абсцисс).

Пусть $a > 0$, получаем график



При $b < 0$ уравнение корней не имеет;
при $b = 0$ уравнение имеет два корня;
при $0 < b < a$ уравнение имеет четыре корня;
при $b = a$ уравнение имеет три корня;
при $b > a$ уравнение имеет два корня.
Пусть $a \le 0$, тогда график функции имеет вид



При $b < -a$ уравнение корней не имеет;
при $b = -a$ уравнение имеет один корень;
при $b > -a$ уравнение имеет два корня.
Ответ: при $a > 0$, $b < 0$ и при $a \le 0$, $b < -a$ уравнение корней не имеет;
при $a \le 0$, $b = -a$ уравнение имеет один корень;
при $a > 0$, $b = 0$; $a > 0$, $b > a$ и $a \le 0$, $b > -a$ уравнение имеет два корня;
при $a > 0$, $b = a$ уравнение имеет три корня;
при $a > 0$, $0 < b < a$ уравнение имеет четыре корня.

Пример 3. Решить уравнение $||x + 1| - 2| = a$.

Решение. Строим график функции $y = |x + 1| - 2$. Точка $(-1; -2)$ является точкой излома графика. Строим график этой функции и, отобразив часть графика, лежащую ниже оси Ox, симметрично относительно этой оси вверх, получаем график функции $g(x) = ||x + 1| - 2|$.

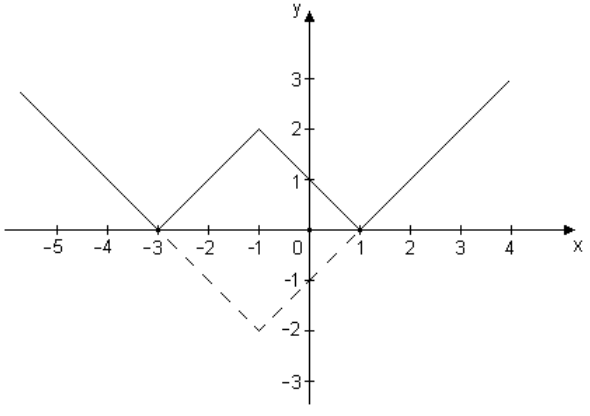


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет; при $a = 0$ уравнение имеет два корня $x = 1$ и $x = -3$.

При $0 < a < 2$ уравнение имеет четыре корня:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=a, \\ -x+1=a, \\ x+3=a, \\ -x-3=a; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=a+1, \\ x=1-a, \\ x=a-3, \\ x=-a-3; \end{array}\right.$$

при $a = 2$ уравнение имеет три корня, один из которых равен -1, найдем два других:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2, \\ -x-3=2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-5; \end{array}\right.$$

при $a > 2$ уравнение имеет два корня:

$$\left[\begin{array}{l} x-1=a, \\ -x-3=a; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=a+1, \\ x=-a-3. \end{array}\right.$$

Советуем это уравнение решить и чисто аналитическим способом.

Пример 4. Решить неравенство $|x| + |x - a| \le 2$.

Решение. Строим график функции $y = |x| + |x - a|$. Если $x = 0$, то $y = |a|$, если $x = a$, то $y = |a|$. Имеем две точки излома графика: $(0; |a|)$ и $(a; |a|)$.

Пусть $a > 0$, точки излома $(0; a)$ и $(a; a)$, тогда при $x = 2a$ $y = 3|a| = 3a$, при $x = -a$ $y = 3|-a| = 3|a| = 3a$. Покажем график функции на рисунке 3.

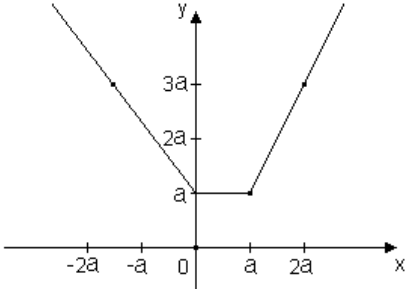


Рис. 3

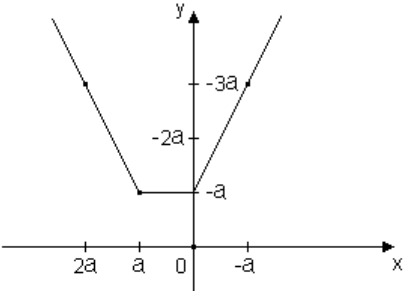


Рис. 4

Пусть $a < 0$, точки излома $(0; -a)$ и $(a; -a)$, тогда при $x = 2a$ $y = -3a$, при $x = -a$ $y = -3a$. Покажем график функции на рисунке 4.

Прямая $y = 2$ параллельна оси Ox, тогда очевидно, что при $|a| > 2$ неравенство решения не имеет.

При $a = 2$ $x \in [0; 2]$, при $a = -2$ $x \in [-2; 0]$.

При $|a| < 2$ решение должно удовлетворять двойному неравенству $x_1 < x < x_2$, где x_1 определяем из уравнения $-x - x + a = 2$, $x_1 = 0{,}5(a - 2)$, а x_2 определяем из уравнения $x + x - a = 2$, $x_2 = 0{,}5(a + 2)$.

Замечание. Данное неравенство можно решить иначе. Запишем его в виде $|x - a| \le 2 - |x| \Leftrightarrow |x| - 2 \le a - x \le 2 - |x| \Leftrightarrow x + |x| - 2 \le a \le 2 + x - |x|$.

Если $x \ge 0$, то $2x - 2 \le a \le 2$, если $x < 0$, то $-2 \le a \le 2 + 2x$. Очевидно, что $-2 \le a \le 2$. $a = 2 + 2x_1$, $x_1 = 0{,}5(a - 2)$, $a = 2 + 2x_2$, $x_2 = 0{,}5(a + 2)$. Покажем решение на рисунке 5.

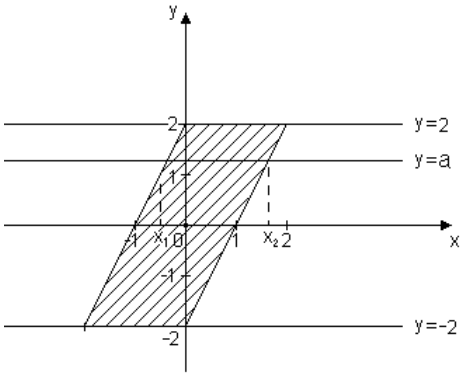


Рис. 5

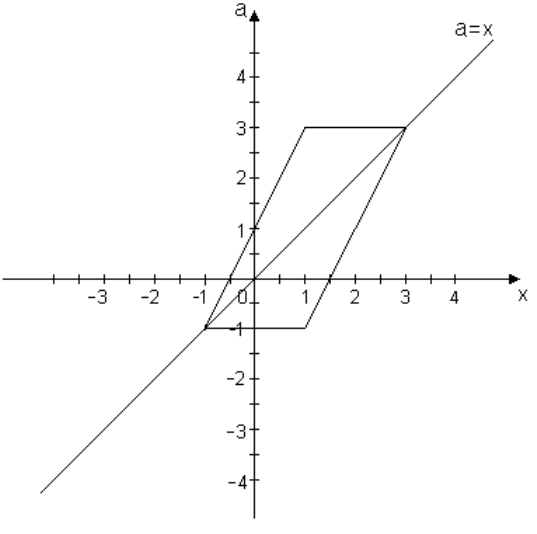
$x \in [0{,}5(a-2);\ 0{,}5(a+2)]$.

Ответ: при $|a| \le 2$ $x \in [0{,}5(a-2);\ 0{,}5(a+2)]$;
при $|a| > 2$ решений нет.

Пример 5. Решить уравнение $|x-a| + |x-1| = 2$.

Решение. 1) $x \ge a$, $x - a = 2 - |x-1|$, построим график $a = x - 2 + |x-1|$: $a(1) = -1$, $a(0) = -1$, $a(2) = 1$.

2) $x < a$, $-x + a = 2 - |x-1|$, построим график $a = 2 + x - |x-1|$: $a(1) = 3$, $a(2) = 3$, $a(0) = 1$.



При $a = 3$ уравнение имеет бесконечное множество корней: $1 \le x \le 3$.

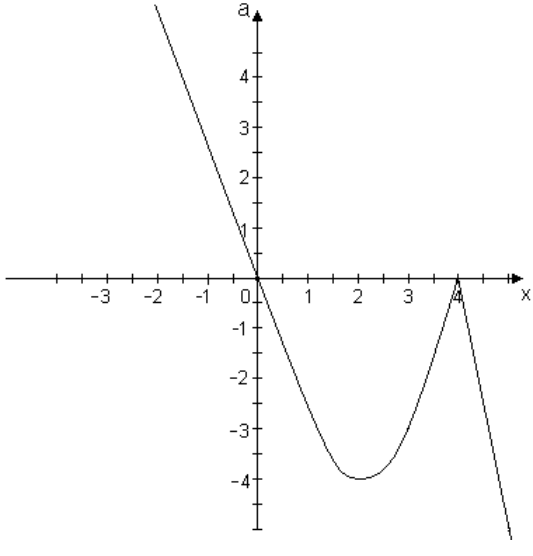
При $-1 < a < 3$ уравнение имеет два корня, причем больший из них находим из уравнения $a = x - 2 + x - 1$, $x = 0{,}5(a + 3)$, а меньший из уравнения $a = 2 + x + x - 1$, $x = 0{,}5(a - 1)$.

При $a = -1$ уравнение имеет корни $-1 \le x \le 1$.

Ответ: при $a = 3$ $x \in [1; 3]$; при $-1 < a < 3$ $x = 0{,}5(a + 3)$ и $x = 0{,}5(a - 1)$; при $a = -1$ $x \in [-1; 1]$; при $a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ уравнение корней не имеет.

Пример 6. Решить уравнение $x\,|x - 4| + a = 0$.

Строим график функции $f(x) = a = -x\,|x - 4| = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2 + 4x, \\ x \ge 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4x, \\ x < 4. \end{cases} \end{array}\right.$



При $a < -4$ уравнение имеет один корень, являющийся большим корнем уравнения $-x^2 + 4x = a$; $x^2 - 4x + a = 0$, $x = 2 + \sqrt{4 - a}$. При $a = -4$ уравнение имеет два корня, один из которых $x = 2$,

а второй – больший корень уравнения $-x^2 + 4x = -4$, т. е. $x = 2 + 2\sqrt{2}$. При $-4 < a < 0$ уравнение имеет три корня, два из которых являются корнями уравнения $x^2 - 4x - a = 0$: $x = 2 \pm \sqrt{4+a}$, а третий – больший корень уравнения $-x^2 + 4x = a$, т. е. $x = 2 + \sqrt{4-a}$. При $a = 0$ уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = 4$.

При $a > 0$ уравнение имеет один корень, являющийся меньшим корнем уравнения $x^2 - 4x = a$, т. е. $x = 2 - \sqrt{4+a}$.

Ответ: при $a < -4$ $x = 2 + \sqrt{4-a}$;

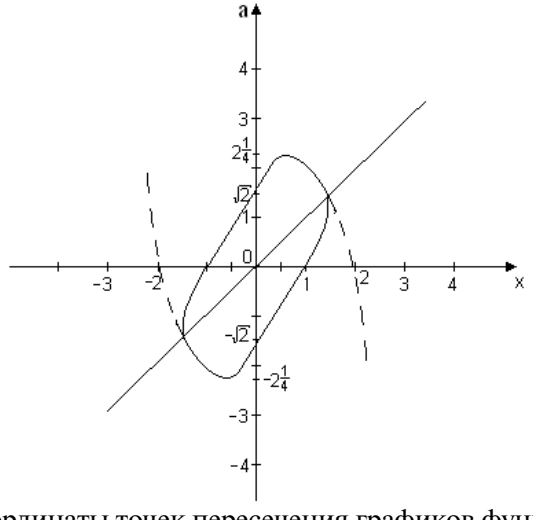
при $-4 \le a \le 0$ $x = 2 \pm \sqrt{4+a}$, $x = 2 + \sqrt{4-a}$;

при $a > 0$ $x = 2 - \sqrt{4+a}$.

Пример 7. Решить уравнение $2 - |x - a| = x^2$.

Решение. При $x \ge a$ $x - a = 2 - x^2$, $a = x^2 + x - 2$. При $x < a$ $x - a = x^2 - 2$, $a = -x^2 + x + 2$.

В прямоугольной системе координат x0a строим графики функций $a = x^2 + x - 2$, где $a \le x$, и $a = -x^2 + x + 2$, где $a > x$.



Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

$x^2 + x - 2 = -x^2 + x + 2$, откуда $x = \pm\sqrt{2}$, тогда $a = \pm\sqrt{2}$. Посмотрим на рисунок.

При $a = 2{,}25$ уравнение имеет один корень $x = 0{,}5$.

При $\sqrt{2} \le a < 2{,}25$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $a = 2 + x - x^2$, $x^2 - x + a - 2 = 0$, т. е. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$.

При $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ уравнение имеет два корня, меньший из которых равен меньшему корню уравнения $a = 2 + x - x^2$, т. е. $x = \dfrac{1-\sqrt{9-4a}}{2}$, а больший – больший корень уравнения $a = x^2 + x - 2$, т. е. $x = \dfrac{-1+\sqrt{9+4a}}{2}$.

При $-2{,}25 < a \le -\sqrt{2}$ уравнение имеет два корня, которые являются корнями уравнения $x^2 + x - 2 - a = 0$, т. е. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$.

При $a = -2{,}25$ уравнение имеет корень $x = -0{,}5$.

Ответ: при $-2{,}25 \le a \le -\sqrt{2}$ $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$;

при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ $\quad x = \dfrac{1-\sqrt{9-4a}}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{9+4a}}{2}$;

при $\sqrt{2} \le a \le 2{,}25$ $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$;

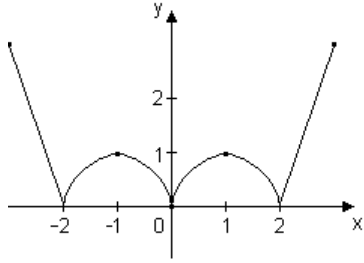
при $|a| > 2{,}25$ уравнение корней не имеет.

Упражнения

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 2|x|| = a$ в зависимости от значений параметра?
2. Решить уравнение $|x^2 - 2x| + |x^2 + 2x| = a$.
3. Решить уравнение $|2x^2 - 3x + 2| = -2x^2 - 8x + 2a$.
4. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x-1| = ax + 2$.
5. Решить неравенство $|2x + a| \le x + 2$.

Решения, ответы:

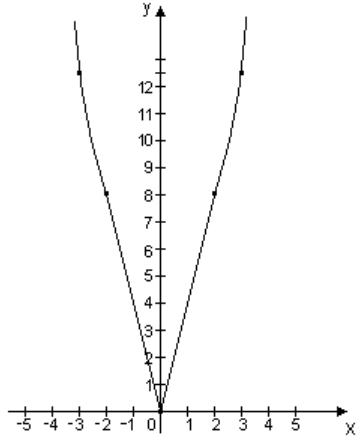
1. Построим график функции $y = |x^2 - 2|x||$. Ясно, что графиком функции $y = a$ является прямая, параллельная оси Ох.



Из рисунка видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет, при $a = 0$ уравнение имеет три корня, при $0 < a < 1$ – шесть корней, при $a = 1$ – четыре корня, при $a > 1$ – два корня.

2. Данное уравнение равносильно уравнению $|x(x-2)| + |x(x+2)| = a$. Строим график функции $y = |x(x - 2)| + |x(x + 2)|$ для $x > 0$ и, заметив, что $D(y) = R$ и функция является четной, затем отображаем его симметрично относительно оси Оу.

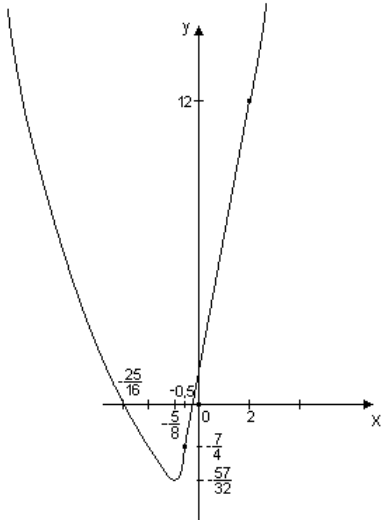
Из рисунка видно, что при $a < 0$ уравнение корней не имеет. При $a = 0$ $x = 0$. При $0 < a \le 8$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнений $-4x = a$ и $4x = a$: $x = \pm 0{,}25a$. При $a > 8$ уравнение имеет корни, являющиеся корнями уравнения $2x^2 = a$: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$.



3. Очевидно, что $a = 0{,}5(|2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x)$.

Если $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$, т. е. $x \leq -0{,}5$ и $x \geq 2$, то $a = \dfrac{4x^2 + 5x - 2}{2}$.

Если $2x^2 - 3x + 2 < 0$, т. е. $-0{,}5 < x < 2$, то $a = 0{,}5(11x + 2)$. Построим график функции $y = 0{,}5(|2x^2 - 3x + 2| + 2x^2 + 8x)$ схематично, указав характеристические точки: $x_в = -\dfrac{5}{8}$, $y_в = -\dfrac{57}{32}$.



При $a < -\dfrac{57}{32}$ уравнение корней не имеет.

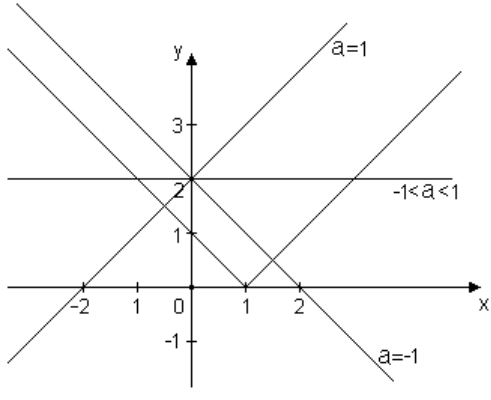
При $a = -\dfrac{57}{32}$ уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{5}{8}$.

При $-\dfrac{57}{32} < a < -\dfrac{7}{4}$ и $a \geq 12$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнения $0{,}5(4x^2 + 5x - 2) = a$: $x_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{57 + 32a}}{8}$.

При $-\dfrac{7}{4} < a < 12$ уравнение имеет два корня: один находится из уравнения $0{,}5(11x + 2) = a$: $x = \dfrac{2a - 2}{11}$, а второй является меньшим

корнем уравнения $4x^2 + 5x - 2(a - 1) = 0$: $x = \dfrac{-5-\sqrt{57+32a}}{8}$.

4. ***I способ.*** Изобразим график функции $y = |x - 1|$ и заметим, что график функции $y = ax + 2$ – это пучок прямых, проходящих через точку (0; 2). При $a = \pm 1$ получаем прямые, параллельные ветвям графика $y = |x - 1|$, a является угловым коэффициентом прямой, поэтому прямые, проходят через точку (2; 0) и наклонены к оси Ох под углами 45^0 и 135^0. При $-1 < a < 1$ любая прямая дважды пересекает график функции $y = |x - 1|$, при других a имеется только одна точка пересечения.



II способ. Из уравнения следует, что $a = \dfrac{|x-1|-2}{x}$. Построим

график функции $f(x) = \dfrac{|x-1|-2}{x} = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{3}{x}, \\ x \ge 1; \end{cases} \\ \begin{cases} -1-\dfrac{1}{x}, \\ x < 1, \\ x \ne 0. \end{cases} \end{array}\right.$

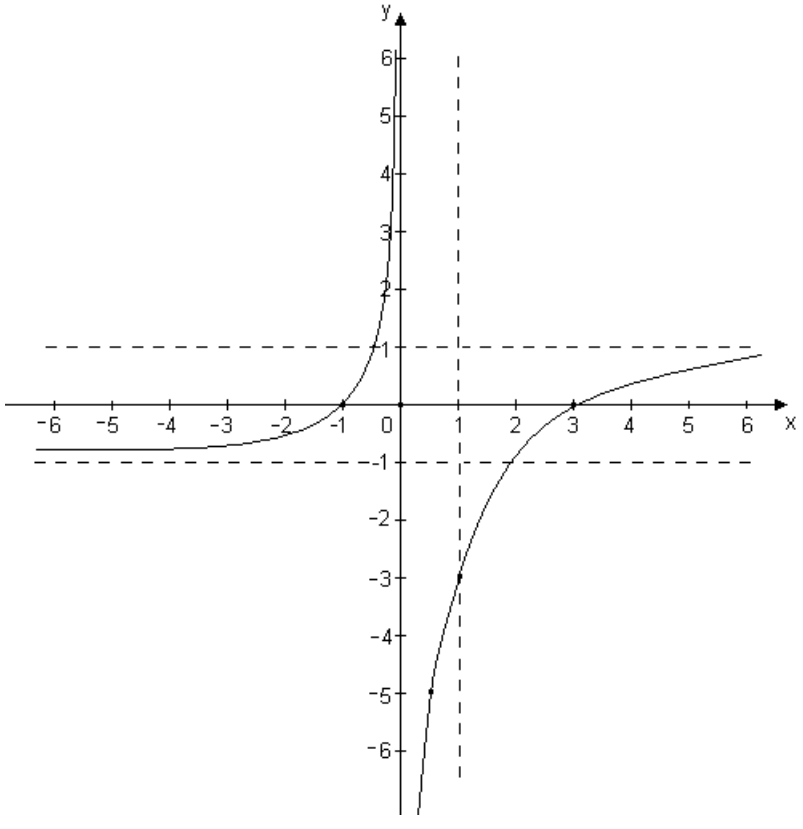
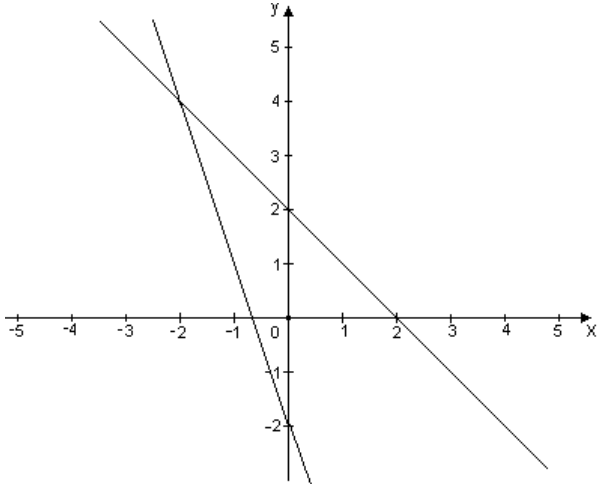


Рисунок наглядно показывает, что при $a \in (-1; 1)$ уравнение имеет два корня, а при остальных значениях a уравнение имеет единственный корень.

5. Неравенство равносильно двойному неравенству

$-x - 2 \le 2x + a \le x + 2$; $-3x - 2 \le a \le 2 - x$. Построим в одной системе координат прямые $y = -3x - 2$ и $y = 2 - x$. Они пересекаются в точке $(-2; 4)$.



Из рисунка видно, что при $a > 4$ неравенство решений не имеет. При $a = 4$ $x = -2$. При $a < 4$ $x_1 < x < x_2$, где x_1 – корень уравнения $-3x - 2 = a$: $x = -\frac{a+2}{3}$; x_2 – корень уравнения $2 - x = a$: $x_2 = 2 - a$.

Ответ: при $a > 4$ решений нет; при $a = 4$ $x = -2$ при $a < 4$ $x \in \left[-\frac{a+2}{3};\ 2-a\right]$.

X. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим теперь решения показательных уравнений и неравенств с параметрами, которые будут зависеть от вида конкретного уравнения и неравенства. Поясним на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $36^x - 2p \cdot 6^x + p^2 - 1 = 0$.

Решение. Положив $6^x = t$, получим уравнение $t^2 - 2pt + p^2 - 1 = 0$, корни которого легко находятся: $t_1 = p - 1$; $t_2 = p + 1$.

Исходное уравнение будет иметь два корня при: $\begin{cases} p-1>0, \\ p+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow p>1$.

Примечание. Применив теорему Виета, получим тот же самый результат: $\begin{cases} t_1+t_2=2p>0, \\ t_1t_2=p^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p>0, \\ p-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow p>1$.

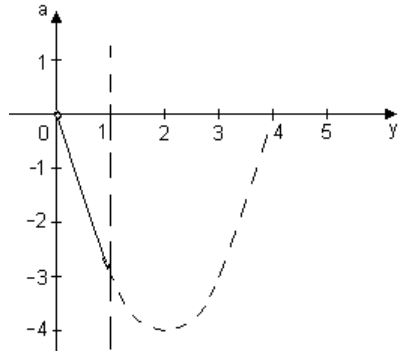
Уравнение будет иметь один корень, если $\begin{cases} p-1\le 0, \\ p+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<p\le 1$, причем $t = p + 1$.

Уравнение не имеет корней, если $\begin{cases} p-1<0, \\ p+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow p\le -1$.

Ответ: при $p \le -1$ корней нет;
при $-1 < p \le 1$ $x = \log_6 (p + 1)$;
при $p > 1$ уравнение имеет корни $x = \log_6 (p - 1)$ и $x = \log_6 (p + 1)$.

Пример 2. Решить уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ при всех значениях a.

Решение. Введем обозначение $y = 3^{-|x-2|}$ и заметим, что $0 < y \le 1$, получаем уравнение $y^2 - 4y - a = 0$, откуда, $a = y^2 - 4y$. В прямоугольной системе координат $(y; a)$ строим на промежутке $(0; 1]$ график функции $f(y) = y^2 - 4y$.



Из рисунка видим, что функция $f(y) = y^2 - 4y$ имеет на этом промежутке только одно пересечение с прямой $y = m$, где $-3 \le m < 0$, поэтому существует единственное значение y, являющееся меньшим корнем уравнения $y^2 - 4y - a = 0$ $y = 2 - \sqrt{4+a}$, где $-3 \le a < 0$.

Итак, $3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4+a}$; $-|x - 2| = \log_3(2 - \sqrt{4+a})$;

$|x - 2| = -\log_3(2 - \sqrt{4+a})$, $-3 \le a < 0$.

Ответ: при $-3 \le a < 0$ $x = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4+a})$; при других действительных a уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{a(2^x - 2)+1} = 1 - 2^x$.

Решение. Пусть $2^x = t$, $t > 0$, выразим a через t, получим

$$\sqrt{a(t-2)+1} = 1 - t; \begin{cases} a(t-2)+1 = 1 - 2t + t^2, \\ t \le 1; \end{cases} \begin{cases} a = t, \\ t \le 1. \end{cases}$$

Ответ: уравнение имеет корни при всех $0 < a \le 1$ $x = \log_2 a$; при остальных действительных a уравнение корней не имеет.

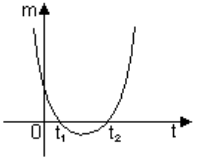
Пример 4. Решить уравнение $4^x - 4m \cdot 2^x + 2m + 2 = 0$.

Решение. Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - 4mt + 2m + 2 = 0$ (*). Полученное уравнение будет иметь один корень при

$0{,}25D = 4m^2 - 2m - 2 = 0$, $m = -0{,}5$ или $m = 1$, но тогда $t = -1$ или $t = 2$. Первое значение не подходит, а второе дает $x = 1$.

Пусть $0{,}25D = 4m^2 - 2m - 2 > 0$; $2m^2 - m - 1 > 0$, откуда $m < -0{,}5$ и $m > 1$.

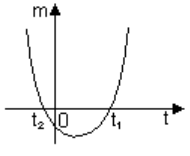
Пусть уравнение (*) имеет два положительных корня, в этом случае для функции $f(t) = t^2 - 4mt + 2m + 2$ имеем $f(0) = 2m + 2 > 0$.



Абсцисса вершины параболы $x_в = 2m > 0$, $m > 0$. Окончательно имеем $m > 1$ и $2^x = 2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$; $x = \log_2(2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2})$.

Пусть уравнение (*) имеет один положительный и один отрицательный корень. Так как $t_1 = 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$;

$t_2 = 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$; $t_1 > t_2$.



В этом случае $D > 0$, $f(0) < 0$, то есть $2m + 2 < 0$, $m < -1$ и с учетом того, что $m < -0{,}5$ или $m > 1$, получаем $m < -1$. Итак, при $m < -1$ $x = \log_2(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$.

Ответ: при $m < -1$ $x = \log_2(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2})$;
при $m = 1$ $x = 1$;
при $m > 1$ $x = \log_2(2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2})$;
при $-1 \le m < 1$ уравнение корней не имеет.

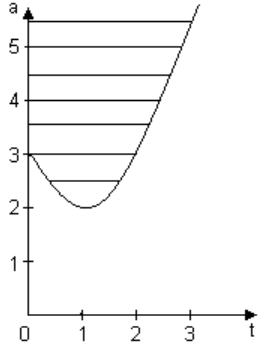
Замечание. Задачу можно решить, выразив m через t: $m(t) = \dfrac{t^2 + 2}{2(2t - 1)}$, $t \ne 0{,}5$ и построив график полученной функции при $t \ne 0{,}5$, однако решение будет более сложным с технической точки зрения.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Положим $2^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - at - a + 3 \le 0$, $a \ge \dfrac{t^2+3}{t+1}$.

Исследуем функцию $a(t) = \dfrac{t^2+3}{t+1}$ и построим ее график. $D(a)$: $(0; +\infty)$;

$a'(t) = \dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$. $a'(t) = 0$ при $t = -3 < 0$ и $t = 1$. На промежутке $[0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает.



На рисунке заштрихована та область, где $a \ge \dfrac{t^3+3}{t+1}$. Ясно, что данное неравенство будет иметь хотя бы одно решение при $a \ge 2$.

Ответ: при $a \ge 2$.

Пример 6. Решить неравенство $4^x - a \cdot 2^x + a \le 0$.

Решение 1. При решении неравенства применим метод интервалов. Обозначим $2^x = t$, $t > 0$. Пусть $f(t) = t^2 - at + a$; $D(f)$: $(0; +\infty)$.

1. Если $D = a^2 - 4a = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = 4$, то $f(t) = 0$ при $t = 0$ или $t = 2$. Имеем соответственно $t^2 \le 0$ (решений нет, поскольку $t > 0$) и $t^2 - 4t + 4 \le 0$ и $t = 2$, $2^x = 2$, и $x = 1$ — решение данного неравенства при $a = 4$.

2. Если $D < 0$, т. е. $a^2 - 4a < 0$, и $a \in (0; 4)$, тогда $t^2 - at + a > 0$ при любом значении t, в том числе и при $t > 0$. Значит, при $0 < a < 4$ решений нет.

3. Если $D > 0$, то $f(t)$ имеет два нуля: $t_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$, причем оба положительные, тогда может быть записана система неравенств:

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_в > 0, \\ f(0) > 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 4; \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4,$$ где $t_в$ – абсцисса вершины параболы.

Поэтому при $a > 4$ получаем $\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \le t \le \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$

и $\log_2 \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \le x \le \log_2 \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Оба корня трехчлена $t^2 - at + a$ не могут быть отрицательными, поскольку $t_1 + t_2 = a < 0$ и $t_1 t_2 = a > 0$, что взаимно исключает друг друга.

Остается рассмотреть ситуацию, когда оба корня разных знаков.

В этом случае $D > 0$, $f(0) < 0$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < 0; \end{array}\right. \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0$. Итак, при $a < 0$ с учетом $t > 0$ получаем $0 < t < \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$; $x < \log_2 \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Ответ: при $a < 0$ $x < \log_2 \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$;

при $0 \le a < 4$ решений нет;

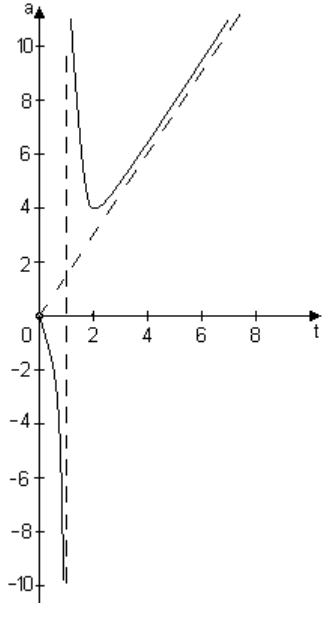
при $a = 4$ $x = 1$;

при $a > 4$ $\log_2 \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \le x \le \log_2 \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Замечание. Приведем еще один вариант решения этого неравенства.

Решение 2. Положим $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $t^2 - at + a \le 0$; $a(t-1) \ge t^2$.

Если $0 < t < 1$, то $a \le \dfrac{t^2}{t-1}$; если $t > 1$, то $a \ge \dfrac{t^2}{t-1}$. Исследуем и построим график функции $a(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$; $D(t)$: $t \ne 1$; кроме того у нас $t > 0$. $a'(t) = \dfrac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$; $a'(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$. $t = 2$ – точка минимума, $a(2) = 4$.



Итак, если $a < 0$, то $0 < t < t_1$, где t_1 – больший корень уравнения $t^2 - at + a = 0$; $0 < t < \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$; $x < \log_2 \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$;

при $0 \le a < 4$ решений нет; при $a = 4$ $x = 1$; при $a > 4$ $t_1 < t < t_2$, где t_1 и t_2 – корни уравнения $t^2 - at + a = 0$;

$$\log_2 \frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2} \le x \le \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}.$$

Решение 3. Положим $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $t^2 - at + a \le 0$. Если $D = 0$, то $a = 0$ или $a = 4$, получаем $x = 2$ – решение данного неравенства. При $0 \le a < 4$ решений нет.

Пусть $a < 0$, тогда $t_1 < 0$, $t_2 > 0$; $(t - t_1)(t - t_2) \le 0$, откуда $t \le t_2$, поскольку $t - t_1 > 0$ и $x < \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

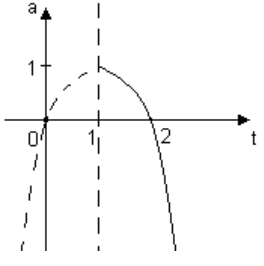
Пусть $a > 4$, тогда явно $t_2 > 0$. Покажем, что $t_1 > 0$: $a-\sqrt{a^2-4a} > 0$; $a > \sqrt{a^2-4a}$; $a^2 > a^2 - 4a$; $4a > 0$, что справедливо при $a > 4$. $t_1 < t < t_2$. Дальнейшие рассуждения мы опускаем.

Упражнения

1. Для каждого значения параметра a решить уравнение $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Решение. $12^{|x|} = t$, $a = 2t - t^2$ (*), $t \ge 1$.

При $t \ge 1$, а значит при $a \le 1$ уравнение (*) имеет один корень, являющийся его большим корнем. Итак, при $a \le 1$ $t = 1+\sqrt{1-a}$ и $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$.



Ответ: при $a \le 1$ $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$;
при $a > 1$ решений нет.

2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ выполняется для всех x.

Решение. $a9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ для всех x. Укажем наиболее простой графический способ решения.

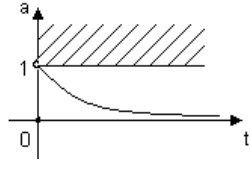
Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда $at^2 + 4at - 4t + a - 1 > 0$;

$a(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1$, $a > \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$, так как $t^2 + 4t + 1 > 0$ при $t > 0$.

В системе tOa строим график функции $a(t) = \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$.

$$a'(t) = \frac{4\left(t^2+4t+1\right) - 2(t+2)(4t+1)}{\left(t^2+4t+1\right)^2} = 2\frac{2t^2+8t+2-4t^2-9t-2}{\left(t^2+4t+1\right)^2} =$$

$= 2\dfrac{(-2t^2-t)}{\left(t^2+4t+1\right)^2} < 0$ при $t > 0$ и функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$; $a(0) = 1$.



Из рисунка видно, что неравенство выполняется для всех t, а значит, и x, если $a \geq 1$.

Ответ: при $a \geq 1$.

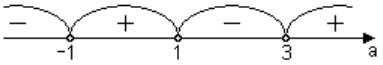
3. Решить уравнение $\sqrt{4^x - 6 \cdot 2^x + 1} = 2^x - a$.

Решение. Пусть $2x = t$, $t > 0$; тогда

$$\sqrt{t^2-6t+1} = t - a; \begin{cases} t^2-6t+1 = t^2-2at+a^2, \\ t \geq a; \end{cases} \begin{cases} 2(a-3)t = a^2-1, \\ t \geq a. \end{cases}$$

При $a = 3$ уравнение системы решения не имеет.

При $a \neq 3$ $\quad t = \dfrac{a^2-1}{2(a-3)}$; $\dfrac{a^2-1}{2(a-3)} > 0$; $(a-1)(a+1)(a-3) > 0$.

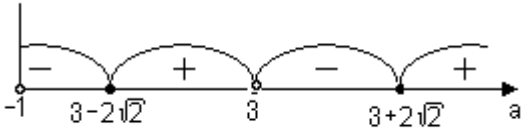


Ясно, что уравнение может иметь корни при $a \in (-1;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$.

Проверим выполнение неравенства системы:

$$\frac{(a-1)(a+1)}{2(a-3)} \geq a;\ \frac{a^2-1}{2(a-3)} - a \geq 0;\ \frac{a^2-1-2a^2+6a}{a-3} \geq 0;$$

$$\frac{a^2-6a+1}{a-3} \leq 0;\ \begin{cases} (a-3+2\sqrt{2})(a-3-2\sqrt{2})(a-3) \leq 0, \\ a \neq 3. \end{cases}$$



Итак, уравнение при $a \in (-1;\ 3-2\sqrt{2}] \cup (3;\ 3+2\sqrt{2}]$ дает $2^x = \dfrac{a^2-1}{2(a-3)}$; $x = \log_2 \dfrac{a^2-1}{2(a-3)}$; при остальных значениях a корни отсутствуют.

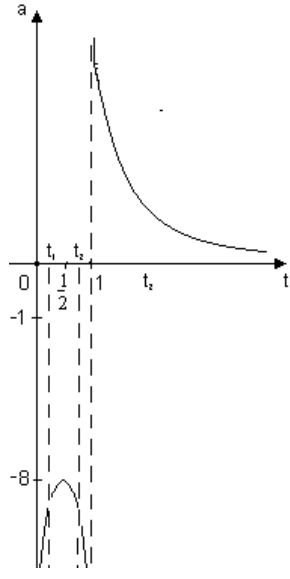
4. Решить неравенство $a9^x - a3^x - 2 \geq 0$.

Решение. Приводим один из возможных вариантов решения.

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда $a(t^2 - t) \geq 2$. При $t^2 - t > 0$ имеем $a \geq \dfrac{2}{t^2-t}$ $(t \in (1;\ +\infty))$. При $t^2 - t < 0$ получаем $a \leq \dfrac{2}{t^2-t}$ $(t \in (0;\ 1))$. Помним, что $t > 0$.

Строим график функции $a = \dfrac{2}{t^2-t}$.

$D(a)$: $t > 0$, $t \neq 1$.



$a'(t) = \dfrac{-2(2t-1)}{\left(t^2-t\right)^2}$; $a'(t) = 0$ при $t = \dfrac{1}{2}$. На промежутке $(-\infty; \dfrac{1}{2})$ функция возрастает, на каждом из промежутков $(\dfrac{1}{2}; 1)$ и $(1; +\infty)$ функция убывает. $t = \dfrac{1}{2}$ точка максимума; $a(\dfrac{1}{2}) = -8$. При $-\infty < a < -8$ $t_1 < t < t_2$, то есть $\log_3 \dfrac{a-\sqrt{a^2+8a}}{2a} < x < \log_3 \dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{2a}$.

Далее, обратившись к нарисованному графику, получим ответы.

Ответ: при $-\infty < a < -8$ $\log_3 \dfrac{a-\sqrt{a^2+8a}}{2a} < x < \log_3 \dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{2a}$;

при $a = -8$ $x = -0{,}5$;

при $-8 < a \le 0$ решений нет;

при $a > 0$ $x > \log_3 \dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{2a}$.

XI. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два корня?

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $9^x - 3^x + 9a^3 = 0$. Полагая $3^x = t$, $t > 0$, получим $t^2 - t + 9a^3 = 0$. Это уравнение должно иметь два положительных корня, поэтому при

$$t_1 + t_2 = 1, \quad t_1 t_2 = 9a^3 \quad \begin{cases} 1 - 36a^3 > 0, \\ 9a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$

Пример 2. При каких значениях a уравнение $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ имеет два корня?

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $4^x + a^3 = 2^{-x}$. В левой части уравнения стоит функция, возрастающая при всех действительных x (от значений параметра a возрастание не зависит), а функция, расположенная в левой части уравнения, при всех x убывает. Уравнение не может иметь более одного корня.

Ответ: ни при каких.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)$ являются решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

Решение. Данное логарифмическое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \neq 0, \\ x^2 - x - 2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq 0, \\ -1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

откуда $-1 \leq x < 0$; $0 < x \leq 2$.

Решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leq 0$ является отрезок $\left[-\dfrac{2a^2}{7}; \dfrac{2a^2}{7}\right]$.

Для нахождения a составим систему неравенств $\begin{cases} -\dfrac{2a^2}{7} \le -1, \\ \dfrac{2a^2}{7} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a^2}{7} \ge 1, \\ \dfrac{2a^2}{7} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a^2}{7} \ge 1 \text{ и } a \in \left(-\infty; -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right)$.

Пример 4. Найти все значения c, для которых неравенство $1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(cx^2 + 4x + c)$ справедливо для всех x.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} cx^2 + 4x + c > 0, \\ (5-c)x^2 - 4x + (5-c) \ge 0 \end{cases}$. Для того чтобы выполнялось каждое неравенство системы для любых x, необходимо, чтобы выполнялось, каждое из неравенств системы

$$\begin{cases} c > 0, \\ 5 - c > 0, \\ 4 - c^2 < 0, \\ 4 - (5-c)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0, \\ 5 - c > 0, \\ (c-2)(c+2) > 0, \\ (c-3)(c-7) \ge 0, \end{cases} \text{ откуда } 2 < c \le 3.$$

Ответ: (2; 3].

Пример 5. Найти все значения a, при которых неравенство $\log_{a(a+1)}(|x| + 4) > 1$ выполняется при любых значениях x.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств: а) $\begin{cases} a(a+1) > 1, \\ |x| + 4 > a^2 + a \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0 < a(a+1) < 1 \\ |x| < a^2 + a - 4 \end{cases}$.

а) Неравенство $|x| > a^2 + a - 4$ будет верным для любого x, если

$a^2 + a - 4 < 0$. Необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} a^2 + a - 1 > 0, \\ a^2 + a - 4 < 0. \end{cases}$

Решение этой системы:

$$a \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right).$$

б) Неравенство $|x| < a^2 + a - 4$ не может выполняться при любых x, т. к. $a^2 + a - 1 < 0$, тем более $a^2 + a - 4 < 0$.

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right)$.

Пример 6. Найти все значения параметра c, при которых неравенство $1 + \log_2(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}) \geq \log_2(cx^2 + c)$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Так как $2x^2 + 2x + \frac{7}{2} > 0$ при $x \in R$ и $cx^2 + c = c(x^2 + 1) > 0$ при $c > 0$, область определения неравенства $x \in R$ при $c > 0$. При этих условиях исходное неравенство равносильно неравенству $(4 - c)x^2 + 4x + 7 - c \geq 0$.

Если $4 - c \geq 0$, то найдется хотя бы одно значение x, при котором неравенство выполняется. Итак, $c \in (0;\ 4]$

Если $4 - c < 0$, то для существования хотя бы одного значения x, при котором неравенство выполняется, необходимо, чтобы дискриминант квадратного неравенства был неотрицательным: $4 - (4 - c)(7 - c) \geq 0$, $c^2 - 11c + 24 \leq 0$, откуда $3 \leq c \leq 8$.

Окончательно получаем $(0;\ 4] \cup [3;\ 8] = (0;\ 8]$.

Ответ: $(0;\ 8]$.

Пример 7. Решить уравнение $\log_{\frac{x^2}{a}} a + \log_a{}^2 x = 2$.

Решение. Область определения уравнения выражается неравенствами $x > 0$; $x \neq \sqrt{a}$.

Уравнение может иметь решения только при выполнении условий: $a > 0$; $a \neq 1$.

При решении уравнения перейдем к основанию a:

$\frac{1}{\log_a \frac{x^2}{a}} + \log_a x = 2$; $\frac{1}{2\log_a x - 1} + \log_a x = 2$. Обозначив $\log_a x = y$,

получим уравнение $\frac{1}{2y-1} + y = 2$; $1 + 2y^2 - y - 4y + 2 = 0$; $2y^2 - 5y + 3 = 0$;

$y = 1$ или $y = \frac{3}{2}$.

$\log_a x = 1$ и $x = a$. Проверим выполнение ограничений $x > 0$; $x \neq \sqrt{a}$. При этом $a > 0$; $a \neq 1$.

$\log_a x = \frac{3}{2}$, $x = a\sqrt{a}$. Проверим выполнение ограничений $x > 0$; $x \neq \sqrt{a}$. При этом $a > 0$; $a \neq 1$.

Ответ: при $a \leq 0$, $a = 1$ уравнение решений не имеет;
при $a > 0$, $a \neq 1$ $x = a$.

Пример 8. Решить уравнение $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a - 1 = 0$.

Решение. Область определения уравнения задается промежутками

$$x \in \left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right), \quad n \in Z.$$

При $a \leq 0$, $a = 1$ уравнение решений не имеет.

При $a > 0$, $a \neq 1$ уравнение может иметь решения. Выполним преобразования, воспользовавшись формулой $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a \neq 1$; $\frac{\log_a 2}{\log_a \sin x} \cdot \frac{1}{\log_a \sin^2 x} - 1 = 0$;

$2\log_a^2 \sin x = \log_a 2$; $\log_a^2 \sin x = 0{,}5 \cdot \log_a 2$;

$\log_a \sin x = \pm\sqrt{0{,}5 \cdot \log_a 2}$; $\sin x = a^{\pm\sqrt{0{,}5\log_a 2}} = 2^{\pm\sqrt{0{,}5\log_2 a}}$.

Для уравнения $\sin x = 2^{\sqrt{0,5\log_2 a}}$ имеем:

при $0 < a < 1$ $\log_2 a < 0$, и уравнение корней не имеет;

при $a > 1$ $2^{\sqrt{0,5\log_2 a}} > 1$, и уравнение $\sin x = 2^{\sqrt{0,5\log_2 a}}$ корней не имеет. Решая уравнение $\sin x = 2^{-\sqrt{0,5\log_2 a}}$, находим,

что $x = (-1)^n \arcsin\left(2^{-\sqrt{0,5\log_2 a}}\right) + \pi n$, $n \in Z$

и $x \in \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2_{\pi}\ k\right)$, $k \in Z$.

Ответ: при $a \le 1$ уравнение решений не имеет;

при $a > 1$ $x = (-1)^n \arcsin\left(2^{-\sqrt{0,5\log_2 a}}\right) + \pi n$, $n \in Z$ и

$$x \in \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2_{\pi}\ k\right),\quad k \in Z.$$

Пример 9. Решить уравнение $\log_a(x + a) = \log_a(x^2 - a^2)$.

Решение. Отметим, что при $a \le 0$, $a = 1$ уравнение решений не имеет.

При $a > 0$, $a \ne 1$ уравнение может иметь решения, при этом область определения уравнения $x > a$. Исходное уравнение равносильно уравнению $x + a = x^2 - a^2$; $(x - a)(x + a) - (x + a) = 0$; $(x + a)(x - a - 1) = 0$; $x = -a$ и $x = a + 1$.

Проверим выполнение всех наложенных ранее условий. Поскольку $x > a$, то $-a > a$, но тогда $a < 0$, что противоречит рассматриваемому варианту $a > 0$, $a \ne 1$. $a + 1 > a$ при любых значениях a и $x = a + 1$.

Ответ: при $a \le 0$, $a = 1$ уравнение решений не имеет;

при $a > 0$, $a \ne 1$ $x = a + 1$.

Пример 10. Решить неравенство $\log_a(3a^x - 5) < x + 1$.

Решение. Отметим, что неравенство может иметь решения при $a > 0$, $a \ne 1$. Область определения неравенства при этом определяется неравенством $3a^x - 5 > 0$ (ограничимся только этим неравенством).

Заменяем исходное неравенство равносильным ему $\log_a \frac{3a^x - 5}{a^{x+1}} < 0$,

которое можно заменить неравенством

$$(a-1)\left(\frac{3a^x - 5}{a^x \cdot a} - 1\right) < 0;\ (a-1)\left(\frac{3a^x - 5 - a \cdot a^x}{a^{x+1}}\right) < 0;$$

$(a - 1)((3 - a)a^x - 5) < 0$.

Пусть $a - 1 > 0$, тогда $a > 1$, $(3 - a)a^x - 5 < 0$; $(3 - a)a^x < 5$. Если $1 < a < 3$, то $a^x < \frac{5}{3-a}$; $\log_a \frac{5}{3} < x < \log_a \frac{5}{3-a}$. При $a > 3$, $a^x > \frac{5}{3-a}$, но $3 - a < 0$, поэтому $a^x > \frac{5}{3-a}$ при любом $x > \log_a \frac{5}{3}$.

Пусть $0 < a < 1$, тогда $a - 1 < 0$ и $(3 - a)a^x - 5 > 0$. При этом $3 - a > 0$ и $a^x > \frac{5}{3-a}$; $x < \log_a \frac{5}{3-a}$. Не забудем, что $3a^x - 5 > 0$; $a^x > \frac{5}{3}$; $x < \log_a \frac{5}{3}$, но $\log_a > \frac{5}{3}$ $\log_a \frac{5}{3-a}$.

При $a = 3$ исходное неравенство принимает вид

$\log_3(3^{x+1} - 5) < \quad < x + 1$, откуда $\log_3(3^{x+1} - 5) < \log_3 3^{x+1}$. Получаем неравенство $3^{x+1} - 5 < 3^{x+1}$, справедливое для всех x из области определения $3^{x+1} - 5 > 0$; $3^{x+1} > 5$; $x + 1 > \log_3 5$; $x > \log_3 \frac{5}{3}$.

При $a > 3$ $\quad x > \log_a \frac{5}{3-a}$, но выражение $\frac{5}{3-a}$ при этом не имеет смысла.

Ответ: при $a \le 0$, $a > 3$ и $a = 1$ неравенство решений не имеет;

при $0 < a < 1$ $\quad x < \log_a \frac{5}{3-a}$;

при $1 < a < 3$ $\quad \log_a \frac{5}{3} < x < \log_a \frac{5}{3-a}$;

при $a = 3$ $\quad x > \log_3 \frac{5}{3}$.

Упражнения

1. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2(4^x + a) = \log_2(3 \cdot 2^x)$ не имеет корней?

2. Решить уравнение $\log_x(x - a) = 2$.

3. Решить уравнение $\log_a(ax + 1) + \log_a(x - 1) = 1$.

4. Определить все значения параметра a такие, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения $2\log_a|x - 1| - \log_a x = 1$ равнялась 34.

5. При каких значениях p функция $f(x) = \lg\left((4-p)x^2 - 5x + \frac{5-5p}{8}\right)$ определена для всех значений x?

Найти все значения параметра a, при которых неравенства выполняются при любых значениях x:

6. $\log_a(a - 1)(|x| + 4) > 1$.

7. $\log_{\frac{a}{a-1}}(x^2 + 2) > 1$.

Ответы:

1. При $a > \frac{9}{4}$.

Рекомендация. Легче всего построить график функции $a = 3t - t^2$, где $t > 0$.

2. При $0 < a \le \frac{1}{4}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$;

   при $a < 0$ $x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$;

   при $a = 0$ и $a > \frac{1}{4}$ уравнение корней не имеет.

3. При $a \le 0$ и $a = 1$ уравнение корней не имеет;

   при $a > 0$ и $a \ne 1$ $x = \frac{a-1+\sqrt{5a^2+2a+1}}{2a}$.

4. 4.

5. $p \in (-\infty;\ -1)$.

6. $a \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

7. $a \in (-\infty;\ -2)$.

Пример 1. При каких значениях a число 2 является точкой минимума функции $f(x) = (2x - a)^6 \cdot (x + a - 1)^4$.

Решение. Покажем стандартное решение.

1. $D(f) = R$.

2. $f'(x) = 6(2x - a)^5 \cdot 2(x + a - 1)^4 + 4(2x - a)^6 \cdot (x + a - 1)^3 =$
$= 4(2x - a)^5 \cdot (x + a - 1)^3 \cdot (5x + 2a - 3)$.

3. $D(f') = R$. Критические точки функции найдем из условия $f'(x) = 0$:

$$x_1 = \frac{a}{2};\ x_2 = 1 - a;\ x_3 = \frac{3-2a}{5}.$$

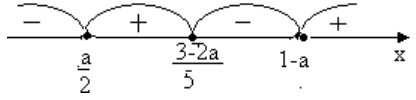
Предположим, что $x_1 = x_2$, тогда $\frac{a}{2} = 1 - a$, $a = \frac{2}{3}$, но тогда

$$x_3 = \frac{3-\frac{4}{3}}{5} = \frac{1}{3} = x_1 = x_2.$$

Далее рассмотрим случаи $a > \frac{2}{3}$ и $a < \frac{2}{3}$.

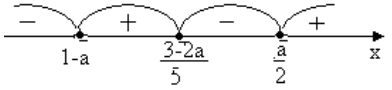
а) $a < \frac{2}{3}$, тогда $x_1 < \frac{1}{3}$; $x_2 > \frac{1}{3}$. Покажем, что $x_3 < x_2$: $\frac{3-2a}{5} < 1 - a$;

$3 - 2a < 5 - 5a$; $a < \frac{2}{3}$. Итак, $x_1 < x_3 < x_2$, то есть $\frac{a}{2} < \frac{3-2a}{5} < 1 - a$.



В этом случае точки минимума $x = \frac{a}{2}$ и $x = 1 - a$, но тогда $\frac{a}{2} = 2$ и $1 - a = 2$, откуда $a = 4$ и $a = -1$.

б) Пусть теперь $a > \frac{2}{3}$. Нетрудно показать, что $1 - a < \frac{3-2a}{5} < \frac{a}{2}$.



Имеем те же самые точки минимума.

Ответ: -1; 4.

Пример 2. При каких $a < -2$ функция

$f(x) = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение. $D(f) = R$.

Если $a < -2$, то для выполнения условия

$f'(x) = 3(a + 2)x^2 - 6ax + 9a \le 0$ при всех $x \in R$ необходимо, чтобы

$\frac{D}{4} \le 0$; $9a^2 - 27a(a + 2) \le 0$. Далее деление неравенства на $3a < 0$ дает

$3a - 9(a + 2) \ge 0$; $a \le -3$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -3]$.

Пример 3. Для каких a ниабольшее значение функции $f(x) = ax^3 + 4x + 1$ достигается на левом конце отрезка [1; 2]?

Решение. Если $a = 0$, то функция $f(x) = 4x + 1$ – возрастающая. Она принимает свое наибольшее значение на правом конце промежутка.

Если $a > 0$, то $f'(x) = 3ax^2 + 4 > 0$, и функция монотонно возрастает и вновь принимает свое наибольшее значение на правом конце промежутка.

Если $a < 0$, то функция имеет две критические точки: $x_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{-3a}}$ и $x_{\max} = \frac{2}{\sqrt{-3a}}$.

1. Если $x_{\max} \le 1$, то на отрезке [1; 2] производная функции отрицательна. Функция убывает и достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка.

2. Если $x_{\max} \ge 2$, то на отрезке [1; 2] производная функции положительна. Функция возрастает и наибольшего значения достигает в точке $x = 2$.

3. Если точка $x_{\max} \in (1; 2)$, то наибольшее значение функции будет достигнуто только в точке $x_{\max}$.

При $a < 0$ условию задачи удовлетворяют те значения параметра a, при которых $x_{\max} = \frac{2}{\sqrt{-3a}} < 1$, откуда $a \le -\frac{4}{3}$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$.

Пример 4. При каких значениях a наибольшее значение функции $f(x) = 4a\sin x - \cos 2x + 2a^2 - 2a$ на отрезке $[0; \pi]$ будет наименьшим?

Решение. Пусть $\sin x = t$ и, если $x \in [0; \pi]$, то $t \in [0; 1]$.

Тождественное преобразование дает:

$f(x) = 4a\sin x - 1 + 2\sin^2 x + 2a^2 - 2a.$

После замены переменной получим $f(t) = 2t^2 + 4at + 2a^2 - 2a - 1.$

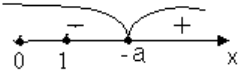
Теперь задачу можно переформулировать так: «При каких a наибольшее значение функции $f(t)$ на отрезке $[0; 1]$ будет наименьшим?».

$f'(t) = 4t + 4a$ и $f'(t) = 0$ при $t = -a$. Получена единственная критическая точка.

Рассмотрим различные случаи возможного расположения $-a$ на отрезке $[0; 1]$.

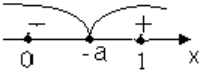
1. При $-a > 1$, т. е. $a < -1$ функция на отрезке $[0; 1]$ убывает и наибольшее значение может принять при $t = 0$, тогда

$f(0) = 2a^2 - 2a - 1 = q(a)$. $q'(a) = 4a - 2$, $a = \frac{1}{2}$.



Это значение не удовлетворяет условию $a < -1$.

2. При $0 \le -a \le 1$, т. е. $-1 \le a \le 0$ в точке $x = -a$ функция имеет локальный минимум, поэтому наибольшее значение функция $f(t)$ может принимать либо при $t = 0$, либо при $t = 1$.

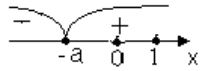


$f(0) = 2a^2 - 2a - 1 = q(a)$. $q'(a) = 4a - 2$, $a = \frac{1}{2}$. Полученное значение a не удовлетворяет неравенству $-1 \le a \le 0$.

$f(1) = 2a^2 + 2a + 1 = q(a)$; $q'(a) = 4a + 2$; $q'(a) = 0$ при $a = -\frac{1}{2}$.

$q(-1) = 1$; $q\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $q(0) = 1$. Ясно, что наименьшее значение $q(a)$ достигается при $a = -\frac{1}{2}$.

3. При $a > 0$ на отрезке $[0; 1]$ функция возрастает.



Наибольшее значение будет получено при $t = 1$, но тогда $q(a) = 2a^2 + 2a + 1$. Это наибольшее значение будет достигнуто при $a = -\frac{1}{2}$, но полученное значение a не удовлетворяет условию $a > 0$.

Ответ: при $a = -\frac{1}{2}$.

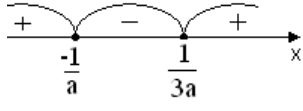
Пример 5. При каких значениях a и b все экстремумы функции $f(x) = a^2x^3 + ax^2 - x + b$ отрицательны и максимум находится в точке $x = -1$.

Решение. $D(f)=R$.

$f'(x)=3a^2x^2 + 2ax - 1$. Если $a = 0$, то $f'(x) = -1 < 0$, и функция убывает.

При $a \neq 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{-a \pm 2a}{3a^2}$; $x_1 = -\frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{1}{3a}$.

Если $a > 0$, то имеем ситуацию, представленную на рисунке.



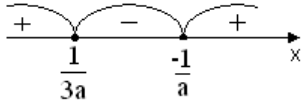
$x = -\frac{1}{a} = -1$; $a = 1$ и $x = \frac{1}{3}$.

Поскольку по условию задачи все экстремумы отрицательны, требуется решить систему неравенств:

$$\begin{cases} -1+1+1+b<0, \\ \frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<-1, \\ b<\frac{5}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \ b < -1.$$

Итак, первый ответ: $a = 1$; $b < -1$.

Аналогичные рассуждения для случая $a < 0$ приводят к ответу: $a = -\frac{1}{3}$ и $b < -\frac{5}{9}$ (см. рис.).



Предлагаем читателям получить ответ самостоятельно.

Ответ: $a = -\frac{1}{3}$ при $b \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{9}\right)$;

$a = 1$ при $b \in (-\infty;\ -1)$.

Упражнения

1. При каких a функция $f(x) = 2e^x - ae^{-x} + (2a + 1)x - 1$ убывает на отрезке [0; 1]?

2. При каких значениях a число 5 является точкой минимума функции $f(x) = (3x - a)^4(x + a - 2)^6$?

3. Найти значения параметра p, при которых функция $f(x) = px^2 + \frac{2p^2 - 81}{2}x - 12$ имеет максимум в точке $x = \frac{9}{4}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция $y(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$ возрастает и не имеет точек максимума и минимума.

Ответы:

1. $(-\infty;\ -1]$.
2. -3; 15.
3. -9 (заметить, что $p < 0$).
4. $(6;\ +\infty)$.

XIII. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

В рассмотрении всех задач будем полагать, что мы уже научились решать уравнения всех основных видов и имеем представление об элементарных способах решения систем уравнений и неравенств (метод подстановки, метод замены переменных, суммирование уравнений и неравенств (когда это возможно)).

Начнем с разбора самых простых задач, например с системы линейных уравнений с n переменными.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases}(m-5)x-2y=m-7,\\(m+1)x+my=3m.\end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим $2y = (m - 5)x - (m - 7)$, $y=\frac{1}{2}(m-5)x-\frac{1}{2}(m-7)$. Подстановка полученного значения y во второе уравнение даст

$$(m + 1)x + \frac{1}{2}m(m - 5)x - \frac{1}{2}m(m - 7) = 3m,$$

$$2mx + 2x + m^2x - 5mx - m^2 + 7m = 6m,$$

$$x(2 - 3m + m^2) = m^2 - m. \qquad (*)$$

Исследуем те значения m, при которых $m^2 - 3m + 2 = 0$, откуда $m = 1$ или $m = 2$.

При $m = 1$ уравнение (*) принимает вид $0 \cdot x = 0$, и x – любое действтельное число, т. е. $x = t$, где $t \in R$, тогда $y = -2t + 3$.

При $m = 2$ уравнение (*) принимает вид $0 \cdot x = 2$. Это говорит о том, что уравнение (*) и исходная система уравнений решений не имеет.

Примечание. Данный случай подробно рассмотрен в разделе I.

При $m \neq 1$ и $m \neq 2$ после несложных преобразований получаем: $x=\frac{m}{m-2}$; $y=\frac{2m-7}{m-2}$.

Ответ: при $m = 1$ $(t; -2t + 3)$, $t \in R$;
при $m = 2$ система решений не имеет;
при $m \neq 1$ и $m \neq 2$ $\left(\frac{m}{m-2}; \frac{2m-7}{m-2}\right)$.

Рассмотрим несколько положений, хорошо известных в линейной алгебре.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – отличные от нуля числа.

1. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений (1) решений не имеет.

2. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений (1) имеет бесконечное множество решений.

3. Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то система (1) имеет единственное решение.

Пример 2. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (a-2)x+27y=4{,}5, \\ 2x+(a+1)y=-1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

Решение. Воспользуемся названными ранее свойствами. Используем соотношения между коэффициентами. Имеем, что уравнения $\frac{a-2}{2}=-\frac{9}{2}$ и $\frac{27}{a+1}=-\frac{9}{2}$ должны иметь один и тот же корень. Легко видеть, что это $a=-7$.

Примечание. Очевидно, что можно воспользоваться и идеей примера 1 этого раздела. О том, какой из приемов имеет преимущество, предлагаем судить читателям!

Пример 3. При каких значениях a для любого b найдется c такое, что система уравнений $\begin{cases} 2x+by=a^2c+c, \\ bx+2y=c-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Опять используем уже упомянутые свойства. Если $\frac{2}{b}=\frac{b}{2}$, т. е. $b = \pm 2$, то исходная система решений не имеет.

При $b \neq \pm 2$ система имеет единственное решение

$$x = \frac{2ac^2+2c-bc+b}{4-b^2};\quad y = \frac{2c-2-abc^2-bc}{4-b^2}.$$

При $b = 2$ исходная система имеет вид $\begin{cases} 2x+2y=a^2c+c, \\ 2x+2y=c-1. \end{cases}$

Для того чтобы последняя система имела решения, необходимо выполнение равенств $ac^2 + c = c - 1$, $ac^2 = -1$ (*). Если $a < 0$, то равенство (*) выполнимо.

При $b = -2$ получаем систему $\begin{cases} 2x-2y=a^2c+c, \\ 2x-2y=1-c. \end{cases}$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо выполнение равенства $ac^2 + c = 1 - c$, $ac^2 + 2c - 1 = 0$. Последнее полученное уравнение является квадратным относительно c. Очевидно, что оно может иметь решения только при неотрицательном дискриминанте, тогда $D = 1 + a \geq 0$, откуда получаем неравенство $a \geq -1$ (**).

Объединяя полученные результаты (*) и (**), получаем, что при $a \in [-1; 0)$ всегда найдутся такие c, что при любом b исходная система имеет хотя бы одно решение.

Ответ: при $a \in [-1; 0)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + 4x - 3a + 7 = 0$ и $x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$ имеют общий корень?

Решение. По сути дела необходимо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+4x-3a+7=0, \\ x^2+7x-5a+15=0. \end{cases}$$

Выразим x через a, для чего из первого уравнения системы вычтем второе: $-3x + 2a - 8 = 0$, $x = \frac{2a-8}{3}$. Заменим в первом уравнении x полученным при этом выражением, получим

$$\frac{4a^2-32a+64}{9}+\frac{8a-32}{3}-3a+7=0.$$

После очевидных преобразований получим квадратное уравнение относительно параметра a: $4a^2 - 35a + 31 = 0$, корнями которого являются $a = 1$ и $a = \frac{31}{4}$.

Система уравнения при $a = 1$ приобретает вид

$$\begin{cases} x^2+4x+4=0, \\ x^2+7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2=0, \\ (x+2)(x+5)=0. \end{cases}$$

Ясно, что $x = -2$ — общий корень двух уравнений.

Аналогичная проверка второго значения параметра a дает тот же результат.

Ответ: 1; $\frac{31}{4}$.

Пример 5. Найти все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2-xy+y^2=a^2+a, \\ 2x^2+xy-y^2=2-4a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Для простоты рассуждений введем обозначения $m = a^2 + a$ и $n = 2 - 4a$. Так как (0; 0) не является решением системы, разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x^2-xy+y^2}{2x^2+xy-y^2}=\frac{m}{n}, \text{ откуда}$$

$x^2(n - 2m) - xy(m + n) + y^2(n + m) = 0.$

После деления обеих частей уравнения на $y^2 \neq 0$ будем иметь

$$(n - 2m)\left(\frac{x}{y}\right)^2 - (m + n)\left(\frac{x}{y}\right) + (n + m) = 0.$$

Рассмотрим полученное квадратное относительно $\left(\frac{x}{y}\right)$ уравнение. Это уравнение будет иметь хотя бы одно решение при $n - 2m = 0$ (в этом случае мы получаем линейное относительно $\left(\frac{x}{y}\right)$ уравнение) и при неотрицательном дискриминанте:
$D = (m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2m) \geq 0$.

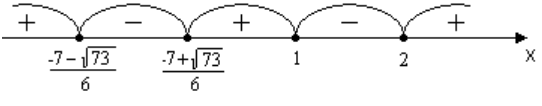
1. Условие $n - 2m = 0$ после возвращения к параметру a дает:

$$2 - 4a - 2a^2 - 2a = 0;\ a^2 + 3a - 1 = 0;\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

2. Рассмотрим неравенство, описывающее дискриминант:
$(m + n)(m + n - 4n + 8m) \geq 0$; $(m + n)(3m - n) \geq 0$. При возвращении к параметру a получим после преобразований
$(a^2 - 3a + 2)(3a^2 + 7a - 2) \geq 0$;

$$(a - 1)(a - 2)\left(a + \frac{7 + \sqrt{73}}{6}\right)\left(a + \frac{7 - \sqrt{73}}{6}\right) \geq 0.$$

Применим метод интервалов для решения неравенства:



и получим $a \in \left(-\infty;\ \frac{-7 - \sqrt{73}}{6}\right] \cup \left[\frac{-7 + \sqrt{73}}{6};\ 1\right] \cup [2;\ +\infty)$, при этом $a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Но при $a = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ система имеет решение, эти значения параметра входят в рассмотренные промежутки.

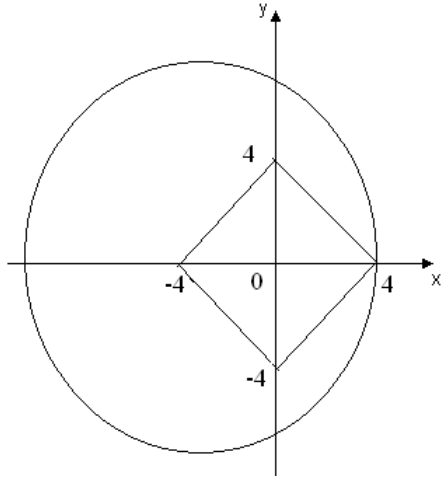
Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{-7 - \sqrt{73}}{6}\right] \cup \left[\frac{-7 + \sqrt{73}}{6};\ 1\right] \cup [2;\ +\infty)$.

Пример 6. При каком наибольшем значении параметра a система уравнений $\begin{cases}(x+4)^2+y^2=a,\\ |x|+|y|=4\end{cases}$ имеет одно решение?

Решение. При $a = 0$ решением системы является пара $(-4; 0)$.

При $a < 0$ система решений не имеет.

При $a > 0$ первое уравнение системы геометрически представляет окружность с центром в точке $(-4; 0)$ радиуса $\sqrt{a}$, а второе уравнение геометрически представляет собой квадрат с вершинами в точках: $(-4; 0)$; $(4; 0)$; $(0; -4)$; $(0; 4)$. Сделаем рисунок:



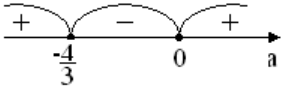
Окружность и квадрат имеют одну общую точку $(4; 0)$, но тогда $\sqrt{a} = 8$ и $a = 64$.

Ответ: 64.

Пример 7. При каких a система уравнений $\begin{cases}a(x-9)=4(3-y),\\ y-\sqrt{x}=0\end{cases}$ имеет два различных решения?

Решение. Так как $y = \sqrt{x}$, первое уравнение системы запишется в виде $a(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)=4(3-\sqrt{x})$, откуда $x = 9$ при любом действитель-

ном a, но тогда $y = 3$. $\sqrt{x} + 3 = -\frac{4}{a}$, $\sqrt{x} = -\frac{4}{a} - 3$. Последнее уравнение будет иметь корень, если $-\frac{4}{a} - 3 \geq 0$; $\frac{4+3a}{a} \leq 0$; $-\frac{4}{3} \leq a < 0$.



Заметим, что для того, чтобы корни не совпадали (иначе система будет иметь одно решение), система будет иметь два решения при $-\frac{4}{a} - 3 \neq 3 \Leftrightarrow -\frac{4}{a} \neq 6 \Leftrightarrow a \neq -\frac{2}{3}$.

Ответ: при $-\frac{4}{3} \leq a < 0$ и $a \neq -\frac{2}{3}$.

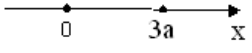
Пример 8. При каких значениях параметров a и b система уравнений $\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y| \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение. Заменив во втором уравнении y его значением из первого уравнения, получим:

$$|x| = b - |a|x - 3a|| \Leftrightarrow |x| = b - |a| \cdot |x - 3a| \Leftrightarrow |x| + |a| \cdot |x - 3a| = b.$$

Если $a = 0$, то множество решений полученного уравнения конечное.

Пусть $a > 0$



1) $\begin{cases} x \leq 0, \\ -x - ax + 3a^2 = b; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x(a+1) = 3a^2 - b. \end{cases}$ Уравнение системы будет иметь бесконечное множество решений при $a = -1$ и $3a^2 - b = 0$. Ясно, что $b = 3$, но $a = -1$ не удовлетворяет условию $a > 0$.

2) $\begin{cases} 0 < x \leq 3a, \\ x - ax + 3a^2 = b; \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 3a, \\ x(a-1) = 3a^2 - b. \end{cases}$

В рассмотренном случае бесконечное множество решений будем иметь при $a = 1$ и $b = 3$. Полученные значения не имеют никаких ограничений.

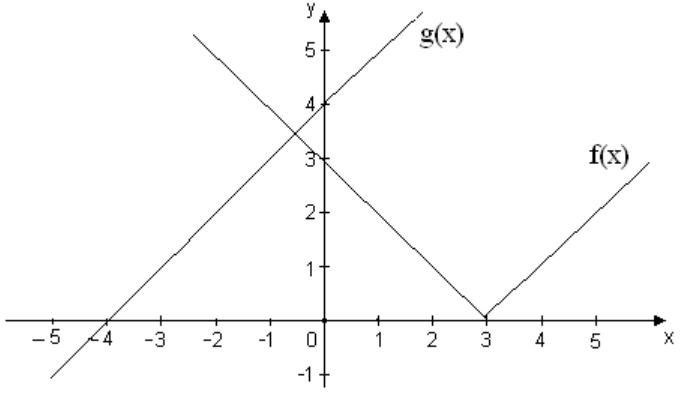
3) $\begin{cases} x > 3a, \\ x + ax - 3a^2 = b; \end{cases} \begin{cases} x > 3a, \\ x(a+1) = 3a^2 + b. \end{cases}$ Как и в случае 1) уравнение системы будет иметь бесконечное множество решений при $a = -1$ и $3a^2 + b = 0$, но $a = -1$ не удовлетворяет условию $a > 0$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $a < 0$, при этом получаем бесконечное множество решений при $a = -1$ и $b = 3$. Обратим внимание на то , что при $a = -1$ и $3a^2 + b \neq 0$ система не может иметь бесконечного множества решений.

Ответ: $(\pm 1;\ 3)$.

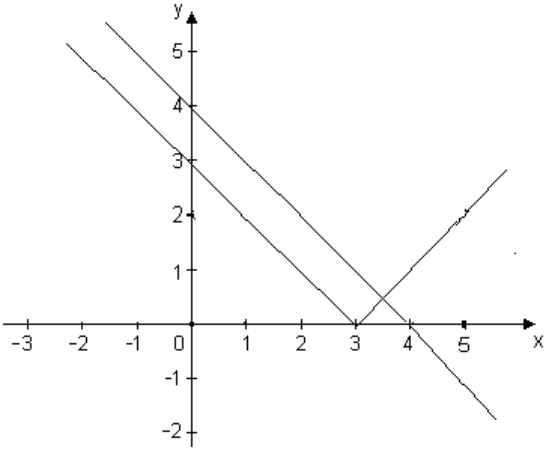
Пример 9. Найти наименьшее положительное значение параметра k, при котором система уравнений $\begin{cases} y = |x - 3|, \\ y = kx + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Построим в прямоугольной системе координат графики функций $f(x) = |x - 3|$ и $g(x) = kx + 4$.



Построенные графики показывают, что система имеет единственное решение при $k > 0$, когда прямые $y = kx + 4$ и $y = x - 3$ параллельны, то есть при $k = 1$.

Возможно и еще одно решение при $k = -1$.



Ответ: $k = \pm 1$.

Примечание. См. подобные графические решения уравнений с модулями с одной переменной, содержащие параметр.

Пример 10. Решить систему уравнений $\begin{cases} tgx + tgy = a, \\ x + y = b. \end{cases}$ (1)

Решение.

Имеем $\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = a, \\ x + y = b \end{cases}$

и далее $\begin{cases} a \cdot \cos x \cdot \cos y = \sin b, \\ x + y = b. \end{cases}$ (2)

Для системы (2) составим следующее разбиение множества значений параметров: $\begin{cases} a = 0, \\ \sin b = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ \sin b \neq 0; \end{cases}$ $a \neq 0$.

При условии $\begin{cases} a = 0, \\ \sin b = 0 \end{cases}$ первому уравнению системы (2) удовлетворяют любые пары (x; y), т. е. решения системы (2) совпадают

с решениями уравнения $x + y = b$. Возвращаясь к системе (1), замечаем, что должны выполняться также следующие соотношения:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

При условии $\begin{cases} a = 0, \\ b \neq \pi n \end{cases}$ первое уравнение системы (2) не имеет решений. Значит, не имеет решений и система (2), а с нею и система (1).

При условии $a \neq 0$ система (2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \dfrac{\sin b}{a}, \\ x + y = b \end{cases}$$

и, далее,

$$\begin{cases} \cos(x + y) + \cos(x - y) = \dfrac{2 \sin b}{a}, \\ x + y = b, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \cos(x - y) = c, \\ x + y = b, \end{cases} \tag{3}$$

где $c = \dfrac{2 \sin b}{a} - \cos b$.

Ясно, что система (3), а значит и система (1), имеют решения тогда и только тогда, когда $|c| \leq 1$. В этом случае система (3) равносильна следующей совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \arccos c + 2\pi m, \\ x + y = b; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -\arccos c + 2\pi m, \\ x + y = b. \end{cases} \end{array} \right.$$

Из первой системы этой совокупности находим:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2} \arccos c + \pi m, \\ y_1 = \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2} \arccos c - \pi m,\ m \in Z. \end{cases}$$

Из второй системы находим:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos c + \pi m, \\ y_2 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos c - \pi m, \quad m \in Z. \end{cases}$$

Проверка. Нам надо выяснить, нет ли среди найденных решений посторонних. Область определения системы (1) определяется условиями:

$$\left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad \{k,\ n\} \bigcup Z. \end{array}\right.$$

Проверим, не может ли случиться так, что при некоторых значениях параметров найденные значения x, y совпадут с запрещенными значениями. Нетрудно убедиться, что это произойдет в том случае, когда $b = \pm\arccos\ c = \pi + 2\pi l$. Из этого равенства находим:

$$\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right) = \pi - b + 2\pi l,$$

$$\cos\left[\pm\arccos\left(\frac{2\sin b}{a} - \cos b\right)\right] = \cos\ (\pi - b + 2\pi l),$$

$$\frac{2\sin b}{a} - \cos\ b = -\cos\ b,$$

$$\frac{2\sin b}{a} = 0, \quad b = \pi s,\ s \in Z.$$

Значит, найденные решения являются посторонними в случае $\begin{cases} a \neq 0, \\ b = \pi s. \end{cases}$

Ответ: 1) при $\begin{cases} a = 0, \\ b = \pi m \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x + y = b; \end{cases}$

2) при $\begin{cases} a = 0, \\ b \neq \pi n \end{cases}$ система решений не имеет;

3) при $\begin{cases} a \neq 0, \\ \left| \dfrac{2\sin b}{a} - \cos b \right| > 1 \end{cases}$ система решений не имеет;

4) при $\begin{cases} a \neq 0, \\ b = \pi s \end{cases}$ система решений не имеет;

5) при $\begin{cases} a \neq 0, \\ b \neq \pi s, \\ \left| \dfrac{2\sin b}{a} - \cos b \right| \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos c + \pi m, \\ y_1 = \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos c - \pi m \end{cases}$ и

$\begin{cases} x_2 = \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos c + \pi m, \\ y_2 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos c - \pi m, \end{cases}$ где $a = \arccos\left(\dfrac{2\sin b}{a} - \cos b\right)$,

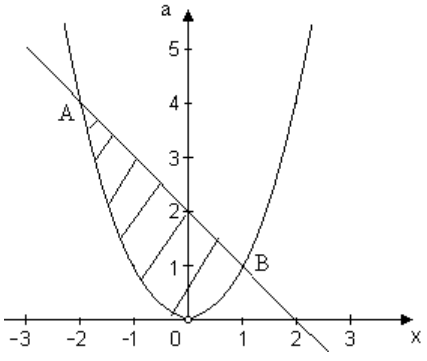
$\{k, m, n, s\} \in Z$.

Пример 11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

Решение. Рассмотрим данное неравенство относительно a (а не x). Отметим, что такой подход возможен тогда и только тогда, когда параметр a может быть выражен через переменную x.

Поскольку $x^2 \leq 1$, $x \in [-1; 1]$. При этих значениях x $x^2 \leq 2 - x$, тогда $x^2 + x - 2 \leq 0$, $-2 \leq x \leq 1$, поэтому $(a - x^2)(a - (2 - x)) < 0$, что справедливо только при выполнении условия $x^2 < a < 2 - x$.

В прямоугольной системе координат аОх построим графики функций $a = x^2$ и $a = 2 - x$:



Решением неравенства $x^2 < a < 2 - x$ являются все числа $(x;\ a)$, являющиеся точками фигуры АОВ без ее границы.

Из рисунка видно, что при $a \le 0$ и $a \ge 4$ данное неравенство не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0] \cup [4;\ +\infty)$.

Рассмотрим ряд задач, которые были предложены на вступительных экзаменах мехмата МГУ в 1994 году.

Пример 12. Найдите все значения параметров a и b, при которых система неравенств $\begin{cases} a + \sin bx \le 1, \\ x^2 + ax + 1 \le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Второе неравенство системы будет иметь единственное решение при равенстве нулю дискриминанта: $D = a^2 - 4 = 0$, т. е. при $a = \pm 2$.

При этом, если $a = 2$, то $x = -1$, и первое неравенство системы принимает вид $2 - \sin b \le 1$, $\sin b \ge 1$. Однако $-1 \le \sin b \le 1$, поэтому $\sin b = 1$ и $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Если $a = -2$, то $x = 1$ и $-2 + \sin b \le 1$. Ясно, что $b \in R$.

Ответ: $\left(2;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $(-2;\ b)$, $b \in R$.

Пример 13. Найти все значения $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x+y+z) - \sin\alpha = 0, \\ (x+1)\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin\dfrac{3}{2}\alpha = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Из условия видно, что $x \geq 0$, но тогда $x \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \geq 0$, $y^2\sqrt{x} \geq 0$, $\alpha^2\sqrt{z} \geq 0$. Поскольку $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, $\dfrac{\alpha}{2} \in [0;\ \pi]$, но тогда $0 \leq \sin\dfrac{\alpha}{2} \leq 1$, а поэтому

$$(x+1)\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin\frac{3\alpha}{2} \geq \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2}.$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2} = -\sin\frac{\alpha}{2}\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 3\right) =$$

$$= -4\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

$$-4\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\right) \leq 0.$$

Поскольку $-\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} - 1\right) \leq 0$, то $\sin\dfrac{\alpha}{2} \geq 1$. С учетом предыдущих рассуждений получим $\sin\dfrac{\alpha}{2} = 1$ или $\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0$. На определенном условием задачи отрезке $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ получаем $\alpha = 0;\ \pi;\ 2\pi$.

При этих значениях первое уравнение, например, имеет решение (0; 0; 0).

Ответ: 0; π; 2π.

Рассмотрим задание, предложенное Федеральной службой по надзору в сфере образования на выпускных экзаменах в классах физико-математического профиля в 2005 году (Вариант № 18–05 А–11 ФМК).

Пример 14. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \le 36 - a^2, \\ (x-2)^2 \le 36, \end{cases}$ равна 18π ?

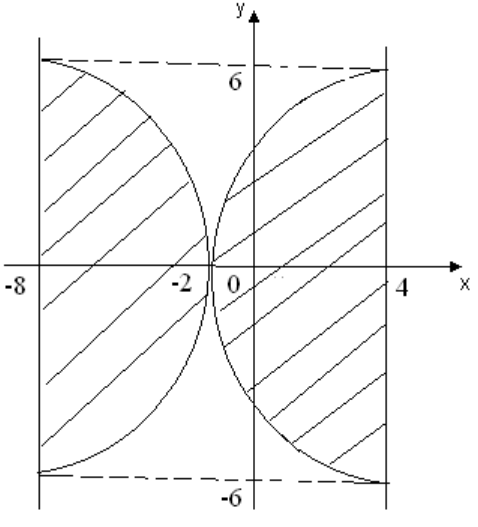
Решение. Исходная система легко преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 \le 36, \\ |x-2| \le 6. \end{cases}$$

Первое неравенство с точки зрения геометрии представляет круг радиуса 6 с его границей и центром в точке (a; 0). Ясно, что площадь этого круга равна 36π.

Второе неравенство описывает вертикальную полосу, описываемую неравенством $-4 \le x \le 8$.

Очевидно, что круг радиуса 6, центр которого находится на оси абсцисс в точке с координатами (a; 0), должен наполовину (см. условие) попадать в вертикальную полосу. Покажем графическое решение задачи:



Наглядное изображение дает два явных ответа: $a = 4$ и $a = -8$.

Ответ: при $a = 4$ и $a = -8$.

Пример 15. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y+1)}{\lg x}=1, \\ (x-a)^2+(y+a-5)(y+a)=0 \end{cases}$ имеет одно решение. Указать его.

Решение. Первое уравнение системы равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x+y+1=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ y=-1. \end{cases}$$

Тогда второе уравнение системы дает

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x^2-2ax+2a^2-7a+6=0. \end{cases}$$

Запишем условие существования одного решения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=-a^2+7a-6=0, \\ x_в=a>0; \end{cases} \\ f(0)=2a^2-7a+6<0; \\ \begin{cases} f(0)=0, \\ x_1=0, \\ x_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=1; \end{array}\right. \\ x_в=a, \\ x\neq 1, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=6 \\ a\in\left(\dfrac{3}{2};\ 2\right) \\ f(0)=0 \end{array}\right.$$

$f(0)=0$ при $a=2$ и $a=\dfrac{3}{2}$.

Проверим точки $a=2$ и $a=\dfrac{3}{2}$ подстановкой в уравнение $x^2-2ax=0$.

$a = \frac{3}{2}$, $x = 0$, $x = 3$ – имеем одно решение;

$a = 2$, $x = 0$, $x = 4$ – имеем одно решение.

Итак, $a \in \left[\frac{3}{2};\ 2\right] \cup \{6\}$.

Проверим уравнение на равенство $x = 1$:
$1 - 2a + 2a^2 - 7a + 6 = 0$ или $2a^2 - 9a + 7 = 0$, откуда $a = 1$ и $a = 3{,}5$.

Корни квадратного уравнения $x_{1,\,2} = a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}$ при $a = 3{,}5$ $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$. Область определения исключает первый корень.

Ответ: $a \in \left[\frac{3}{2};\ 2\right] \cup \{3{,}5;\ 6\};\ (a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6};\ -1)$.

Пример 16. При каких значениях $a > 0$ неравенство $x^3 + ax - a^2 + 1 < 0$ выполняется для всех $x \le 1$?

Решение. Перепишем неравенство в виде $x^3 + ax < a^2 - 1$. Пусть $a^2 - 1 = m$, тогда $x^3 + ax < m$. Функция $f(x) = x^3 + ax$ при $a > 0$ является возрастающей, поскольку $f'(x) = 3x^2 + a$. Она достигает своего наибольшего значения при $x = 1$, $f(1) = 1 + a$, а поэтому $m < 1 + a$, то есть $a^2 - 1 < 1 + a$, $a^2 - a - 2 < 0$. Полученное неравенство хорошо решается методом интервалов. Очевидно, что $a \in (-1;\ 2)$.

Ответ: $(-1;\ 2)$.

Упражнения

1. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ имеет решения?

2. Исследовать (определить, когда система имеет одно решение, бесконечное множество решений и не имеет решений) систему $\begin{cases} (m+3)x - 2y = 5, \\ (m+1)x + y = 7. \end{cases}$

3. Найти все a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax + (a-1)y = 2 + 4a, \\ 3|x| + 2y = a - 5 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Указание. Рассмотреть случаи $x \geq 0$, $x < 0$. Найти решения при этих ограничениях, не забыв решить неравенства $x_1 \geq 0$ и $x_2 < 0$, где x_1 и x_2 — найденные значения при $x \geq 0$ и $x < 0$. Затем приравнять x_1 и x_2 и y_1 и y_2 и учесть найденные ограничения на a.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}(a+5)x+(2a+3)y=3a+2,\\(3a+10)x+(5a+6)y=2a+4.\end{cases}$

5. Найти значения параметра, при которых каждое решение неравенства $4x^2 + 8x + 3 < 0$ содержится среди решений неравенства $2ax^2 - (7a + 4)x - 14 > 0$.

6. Решить систему неравенств $\begin{cases}x^2-5x+4\geq 0,\\x^2-a^2<0.\end{cases}$

7. Решить систему $\begin{cases}\dfrac{x}{a+3}-\dfrac{y}{a+2}+1=0,\\\dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{y-2}=0,\end{cases}$ где $a > 0$.

8. Найти все значения параметра, при которых система имеет два различных решения: $\begin{cases}y=\sqrt{3-2x-x^2},\\x=a\left(y-\sqrt{3}\right).\end{cases}$

9. Найти все значения параметра a, при которых решением системы $\begin{cases}\dfrac{x\ \ +ax-2}{x\ \ -x+1}<2,\\\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3\end{cases}$ является вся числовая прямая.

10. Найти все значения параметра, при которых система имеет решение.

$$\begin{cases}x=\dfrac{|y|-y}{|y|+y}\cdot 3^x,\\3^x+y=a\ \ -4a+1.\end{cases}$$

11. Найти все значения параметра, при которых система имеет решение.

$$\begin{cases} y = 3x^2, \\ \lg(1+x) = \lg\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{y}{a}\right) \end{cases}$$

Ответы:

1. При $a \neq 0$.
2. При $m = -1\frac{2}{3}$ система решений не имеет; при $m \neq -1\frac{2}{3}$ система имеет единственное решение.
3. $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$.
4. При $a = 0$ бесконечное множество решений $\left(\dfrac{2-3t}{5};\ t\right)$, $t \in Z$;

   при $a = 2$ система решений не имеет;

   при $a \neq 0$, $a \neq 2$ $\left(\dfrac{11a-14}{2-a};\ \dfrac{7a+22}{a-2}\right)$.
5. $a \in [4;\ +\infty)$.
6. При $a \in \{0;\ 1;\ -1\}$ решений нет;
   при $a \in (-1;\ 1)$ $x \in (-|a|;\ |a|)$;

   при $a \in [-4;\ -1) \cup (1;\ 4]$ $x \in (-|a|;\ 1]$;

   при $a \in (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$ $x \in (-|a|;\ 1] \cup [4;\ |a|)$.
7. $\{(-a;\ -3;\ 0);\ (a^2 + 3a;\ a^2 + 3a + 2)\}$.
8. $a \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3};\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\sqrt{3};\ +\infty\right)$.
9. $(-1;\ 2)$.
10. $(-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty)$.
11. $(-\infty;\ -9) \cup (0;\ +\infty)$.

XIV. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ В ЗАДАНИЯХ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Во всех разделах, рассмотренных выше, при изложении материала авторы старались придерживаться системы. Последовательность изложения материала выдерживалась при рассмотрении всех разделов. Рассмотрим задания ЕГЭ различных лет, различного уровня сложности.

Рассмотрим в качестве примера задание С-5 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2005 года.

Пример 1. Известно, что уравнение

$(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$

имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}.$$

Одно из решений мы читаем на странице 33 журнала «Математика в школе», №2, 2005 г. Там же имеется рекомендация по оцениванию решения данного задания, ориентированная на приведенное решение.

В журнале №7, 2005 г., на странице 39 приводится не менее интересное решение Т. Ф. Мясниковой. Автор разработала критерии оценки данного задания, ориентированные на ее способ решения.

В этом же номере журнала на странице 37 В. А. Петров предлагает графический способ решения уже указанного задания, не приводя инструкции по оцениванию данного задания.

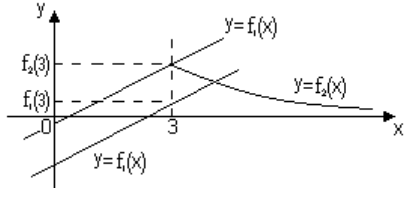
Задача допускает не один вариант решения.

Рассмотрим уравнение $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$. Его правая часть определена при $x \geq 3$, но тогда $2x + 1 \geq 0$. Таким образом, для того, чтобы уравнение имело корни, необходимо выполнение условия $21 - p > 0$.

Левая часть уравнения представляет собой возрастающую линейную функцию $f_1(x)=\frac{2}{21-p}x+\frac{1}{21-p}$, поскольку $21 - p > 0$.

Функция $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ является убывающей на луче [3; +∞), поскольку функция $q(x)=\sqrt{x-3}+3$ возрастает на этом же луче.

Замечание. В убывании функции $f_2(x)$ на луче [3; +∞) можно убедиться, найдя $f_2'(x)$: $f_2'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}+3\right)^2}<0$ при $x>3$. Ясно, что если рассматриваемое уравнение имеет решение, то оно – единственное. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что уравнение имеет корень тогда и только тогда, когда $f_1(3)\le f_2(3)$.

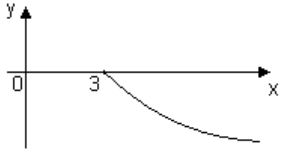


Для определения возможных значений p имеем систему неравенств: $\begin{cases}\dfrac{7}{21-p}\le\dfrac{1}{3},\\ 21-p>0,\end{cases}$ откуда $p\le 0$.

Опуская очевидные рассуждения, когда первое уравнение имеет один корень, получаем, что условию удовлетворяют $p=-1{,}5$ и $p=-1$.

Замечание. В том, что уравнение $\dfrac{2x+1}{21-p}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ имеет один корень при $p\le 0$ можно убедиться, если заменить его на равносильное $p=21-(2x+1)\left(\sqrt{x-3}+3\right)$; ($p<21$).

При $x\ge 3$ функция p убывает, значит свое наибольшее значение, равное 0, она принимает при $x=3$. Это и говорит о том, что при $p\le 0$ рассматриваемое уравнение имеет ровно один корень.



Все рассмотренные выше пояснения однозначно говорят о том, что **все предлагаемые варианты систем оценки являются приближенными, ориентированными только на один из возможных вариантов решений.**

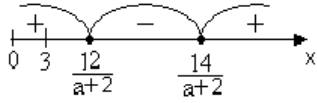
Пример 2. Найти все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка $[-3; 3]$ верно неравенство

$|2x + a|x| - 13| \geq 1$.

Решение. После возведения обеих частей неравенства в квадрат получим равносильное ему неравенство $(2x + a|x| - 14)(2x + a|x| - 12) \geq 0$.

При $0 \leq x \leq 3$ получаем неравенство $((2 + a)x - 14)((2 + a)x - 12) \geq 0$, которое решаем методом интервалов. Очевидно, что при $a > 0$

$a + 2 > 0$ и $\frac{14}{a+2} > \frac{12}{a+2}$.



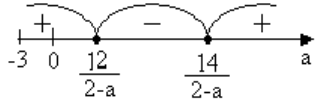
Ясно, что отрезок $[0; 3]$ должен быть расположен на координатной прямой левее числа $\frac{12}{a+2}$; возможно совпадение чисел $\frac{12}{a+2}$ и 3.

Итак, $\frac{12}{a+2} \geq 3$, $\frac{6-3a}{a+2} \geq 0$. Поскольку $a > 0$, $a + 2 > 0$, $6 - 3a \leq 0$, $a \leq 2$. Окончательно с учетом $a > 0$, получаем, что $a \in (0; 2]$.

При $-3 \leq x < 0$ $((2-a)x - 14)((2 - a)x - 12) \geq 0$.

Заметим, что для любого $x \in [-3; 3]$ должно выполняться неравенство $|2x + a|x| - 13| \geq 1$, поэтому полученное неравенство должно выполняться при $a \in (0; 2]$.

При $0 < a < 2$ $\frac{12}{2-a} > 0$ и $\frac{14}{2-a} > 0$, кроме того $\frac{14}{2-a} > \frac{12}{2-a}$.



Как уже было отмечено, $\frac{12}{2-a} > 0$ при $a < 2$.

Ответ: $a \in (0; 2]$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6) \le (a-3)(|x-3|-3)$ содержит число, равное сумме квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Решение. Пусть корнями уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$ являются x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$.

1. При $x \ge 3$ $x(x-6) \le (a+3)(x-6)$; $(x-6)(x-(a+3)) \le 0$;

т. е. либо $x \in [a+3; 6]$, если $a \le 3$, либо $x \in [6; a+3]$, если $a \ge 3$.

2. При $x \le 3$ $x(x-6) \le (a+3)(-x)$; $x(x-6+a+3) \le 0$; $x(x+a-3) \le 0$;

$x \in [0; 3-a]$, если $a \le 3$, или $x \in [3-a; 0]$, если $a \ge 3$.

Множество решений неравенства содержит число 14, если $a + 3 \ge 14$, то есть $a \ge 11$.

Ответ: $[11; +\infty)$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4^x - a2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Представим уравнение в виде $4^x - 2a2^x - 3a^2 + 4a = 0$. Положив $2^x = t$, где $t > 0$, получаем $t^2 - 2at - 3a^2 + 4a = 0$ (*).

Это уравнение имеет один корень, если $a^2 + 3a^2 - 4a = 0$, $4a^2 - 4a = 0$, $4a(a-1) = 0$, откуда $a = 0$; $a = 1$. Если $a = 0$, то $t = 0$, что противоречит неравенству $t > 0$. При $a = 1$ $t = 1$, исходное уравнение имеет корень $x = 0$.

Уравнение (*) будет иметь корни разных знаков при $4a - 3a^2 \le 0$, откуда $a < 0$ $(a \ne 0)$ и $a \ge \frac{4}{3}$ (один из корней может быть равен нулю).

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Пример 5. При каком значении a функция $y = -5^{ax^2+6x-7}$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$?

Решение.

1. Область определения данной функции $D(y) = R$.

2. $y' = -5^{ax^2+6x-7} \cdot \ln 5 \cdot (ax^2 + 6x - 7)' = -(2ax + 6)5^{ax^2+6x-7} \cdot \ln 5$.

Критические точки находим из уравнения $y' = 0$, т. к. $D(y') = R$.

Ясно, что $2ax + 6 = 0$, $x = -\frac{3}{a}$ (при $a = 0$ критических точек нет).

Функция в точке $x = -\frac{3}{a}$ будет иметь минимум, если $-2a > 0$,

т. е. $a < 0$, тогда $-\frac{3}{a} = -2$, откуда $a = 1{,}5$, что противоречит условию $a < 0$.

Ответ: ни при каких.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x - 2) \le (a + 1)(|x - 1| - 1)$ содержит все члены убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

Решение. Поскольку $x = 1{,}7$ является решением данного неравенства, то $1{,}7 - (-3) \le (a + 1)(-0{,}3)$, откуда $a + 1 \le 1{,}7$ и $a \le 0{,}7$.

Выполняем преобразования, не нарушающие равносильности: $|x - 1|^2 - 1 \le (a + 1)(|x - 1| - 1)$; $(|x-1|-1)(|x-1|-a) \le 0$ (*).

Если $a \le 0$, то $|x - 1| - a \ge 0$ при всех x, поэтому $|x - 1| - 1 \le 0$, откуда $-1 \le x - 1 \le 1$ и $0 \le x \le 2$. При $0 < q < 1$ любой член геометрической прогрессии принадлежит этому отрезку.

Если $0 < a \le 0{,}7$, то, применяя метод интервалов для решения неравенства (*), получим $a \le |x - 1| \le 1$. Множество решений последнего неравенства $[0; 1 - a] \cup [1 + a; 2]$. Замечаем, что $1 + a \le 1{,}7$, тогда отрезок $[1 + a; 2]$ содержит число 1,7.

Число q можно выбрать так, что все члены геометрической прогрессии, начиная со второго, будут лежать на отрезке $[0; 1 - a]$, т. е. $1{,}7q \le 1 - a$. В качестве q можно взять 0,1.

Ответ: $(-\infty; 0{,}7]$.

Пример 7. Найти все значения a, при которых область определения функции $y = \sqrt{a^{x+0,5} - a^x\sqrt{x} + a^3\sqrt{x} - a^{3,5}} \cdot \sqrt[3]{\left(x^2 - x\right)^{-1}}$ служит ровно одно целое число.

Решение. Данная функция определена при всех тех значениях x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1, \\ a^{x+0,5} - a^x\sqrt{x} + a^3\sqrt{x} - a^{3,5} \ge 0. \end{cases}$$

Выполним тождественные преобразования в левой части последнего неравенства:

$a^x(\sqrt{a} - \sqrt{x}) - a^3(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \ge 0$; $(a^x - a^3)(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \le 0$.

При $a = 1$ неравенство выполняется при $x > 0$, поэтому в данном случае неравенство выполняется более чем при одном целом числе.

При $a > 1$ $a^3 > a$, для функции $q(x) = (a^x - a^3)(\sqrt{x} - \sqrt{a})$ применим метод интервалов (при $1 \le a \le 3$).

Ясно, что $x \in [a; 3]$, и область определения будет состоять из одного целого числа, если $a \in (2; 3)$.

При $a > 3$ имеем

Здесь $x \in [3; a]$, область определения будет состоять из одного числа, если $a \in (3; 4)$.

Предлагаем самостоятельно убедиться, что при $0 < a < 1$ не существует таких a, при которых область определения функции содержит ровно одно целое число.

Ответ: $(2; 3) \cup (3; 4)$.

Пример 8. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором функция $f(x) = ax^2 - x^3 - 3ax - 1$ убывает на множестве всех действительных чисел.

Решение. Функция будет убывать на множестве R, если для любого действительного x будет выполняться неравенство $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3a < 0$ или $3x^2 - 2ax + 3a > 0$. Последнее неравенство будет выполняться, если $D = a^2 - 9a < 0$, откуда $0 < a < 9$. Было бы ошибочным считать, что $a = 8$ наибольшее целое значение. Дело в том, что требование $f'(x) < 0$ является достаточным условием убывания функции. Обратим внимание на то, что первая производная может в конечном числе точек рассматриваемого промежутка обращаться в нуль, или не существовать.

При $a = 9$ имеем $f'(x) = -3(x - 3)^2 < 0$. Последнее неравенство является верным как при $x < 3$, так и при $x > 3$. Ввиду того, что функция непрерывна, делаем вывод об убывании функции на всей числовой прямой.

Ответ: $a = 9$.

Пример 9. Найти все значения параметра a, при которых область определения функции $y=\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^9\right)^{0,5}$ содержит два или три целых числа.

Решение. Очевидно, что $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $x\neq 1$. Прежде всего, преобразуем функцию, используя свойства логарифмов и степеней:

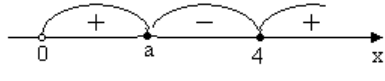
$$\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^9\right)^{0,5}=$$

$$=\left(a^x\sqrt{a}+a^4\sqrt{x}-\sqrt{x}a^x-a^4\sqrt{a}\right)^{0,5}=$$

$$=\left(\left(a^x\sqrt{a}-a^x\sqrt{x}\right)-\left(a^4\sqrt{a}-a^4\sqrt{x}\right)\right)^{0,5}=\left(\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^4\right)\right)^{0,5}.$$

Найдем область определения этой функции для различных значений параметра a. Область определения данной функции задается неравенством $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^4\right)\geq 0$. Решим это неравенство, используя обобщенный метод интервалов. Выражение $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^4\right)$ обращается в нуль при $x=a$ и $x=4$. Для построения диаграммы знаков этого выражения важно взаимное расположение точек a и 4 на координатной ось, а также монотонность показательной функции a^x (функция $\sqrt{x}$ возрастает на всей области определения). Поэтому надо рассмотреть следующие случаи:

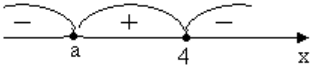
а) Если $a\in(0;\ 1)$, то точка a расположена левее точки 4, функция a^x – убывающая. Тогда легко построить диаграмму знаков выражения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^4\right)$. Видно, что в этом случае область определения данной функции $D(y)$: $(0;\ a]\cup[4;\ +\infty)$. Очевидно, что в промежуток $[4;\ +\infty)$ попадает бесконечное множество целых чисел. Следовательно, условия задачи не выполнены.



б) Если $a\in(1;\ +\infty)$, то функция a^x – возрастающая. В зависимости от взаимного расположения точек a и 4 возникают различные случаи:

1. Если $a\in(1;\ 4)$, то точка a находится левее точки 4. Покажем

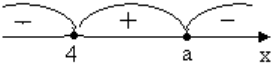
знаки данного выражения. Видно, что в этом случае область определения $D(y)$: $[a;\ 4]$.



В этот промежуток попадают два или три целых числа, если $a \in (1;\ 3]$. Тогда условия задачи выполнены.

2. Если $a = 4$, то точки a и 4 совпадают. Покажем знаки выражения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x - a^4\right)$. В этом случае область определения функции $D(x)$: 4 – единственная точка. То есть условие задачи не выполнено.

3. Если $a \in (4;\ +\infty)$, то точка a находится правее точки 4. Покажем знаки данного выражения. В этом случае область определения данной функции $D(y)$: $[4;\ a]$.



В этот промежуток попадают два или три целых числа, если $a \in [5;\ 7)$. Тогда условие задачи выполняется.

Итак, объединив случаи 1 и 3, находим, что при $a \in (1;\ 3] \cup [5;\ 7)$ область определения данной функции содержит два или три целых числа.

Ответ: $(1;\ 3] \cup [5;\ 7)$.

Пример 10. Найдите наибольшее значение параметра k, при котором система

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y \le 2k-2, \\ x+y+z=k \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. I способ. Пусть k – искомое значение параметра. Тогда при этом значении параметра должна существовать пара чисел $(x;\ z)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y \le 2k-2, \\ x+y+z=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(k-x-z)^2+z^2-2(k-x-z) \le 2k-2, \\ y=k-x-z. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство, входящее в систему. Запишем его в виде

$$x^2+(x+(z-k))^2+z^2-4k+2x+2z+2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x(z-k+1)+\left((z-k)^2+z^2-4k+2z+2\right) \le 0\ .$$

Так как по условию задачи это неравенство имеет хотя бы одно решение при искомом значении параметра, то дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, должен быть неотрицательным:

$$\frac{D(z,k)}{4}=(z-k+1)^2-2\left((z-k)^2+z^2-4k+2z+2\right)=$$

$$=z^2-2z(k-1)+(k-1)^2-2\left(2z^2-2z(k-1)+k^2-4k+2\right)=$$

$$=-3z^2+2z(k-1)+\left(-k^2+6k-3\right).$$

По условию задачи должно существовать хотя бы одно значение z, при котором неравенство $-3z^2+2z(k-1)+\left(-k^2+6k-3\right)\geq 0$ имеет решение при искомом значении параметра. Но тогда дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, должен быть неотрицательным. Получим

$$\frac{D(k)}{4}=(k-1)^2+3\left(-k^2+6k-3\right)=-2k^2+16k-8.$$

Решим неравенство.

$$-2k^2+16k-8\geq 0 \Leftrightarrow k^2-8k+4\leq 0 \Leftrightarrow 4-2\sqrt{3}\leq k\leq 4+2\sqrt{3}.$$

Таким образом, наибольшее значение параметра, при котором исходная система имеет хотя бы одно решение, равно $4+2\sqrt{3}$.

Ответ: $4+2\sqrt{3}$.

Рассмотрим еще один способ решения, связанный с векторами.

II способ.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y\leq 2k-2, \\ x+y+z=k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-2z+1\leq 2k-2x-2z-2y-2-6, \\ x+y+z=k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2\leq 2(k-(x+y+z)+4, \\ x+y+z=k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2\leq 4, \\ (x-1)+(y-2)+(z-1)=k-4. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор $\vec{a}(x-1;\, y-2;\, z-1)$. Тогда первое неравенство может быть записано в виде $|\vec{a}| \le 4$. Второе равенство можно представить как произведение вектора $\vec{a}(x-1;\, y-2;\, z-1)$ на вектор $\vec{b}(1;\, 1;\, 1)$. Учитывая, что $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, получим, что $-2\sqrt{3} \le k-4 \le 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 4-2\sqrt{3} \le k \le 4 \le 2\sqrt{3}$.

Следовательно, наибольшее значение параметра, при котором существуют векторы $\vec{a}(x-1;\, y-2;\, z-1)$ и $\vec{b}(1;\, 1;\, 1)$, удовлетворяющие условиям задачи, равно $4 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

Пример 11. Найти, при каком наибольшем отрицательном значении параметра a функция $y = \sin\left(24x + \frac{a\pi}{100}\right)$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$.

Решение. Если данная функция имеет максимум, то выполняется условие $24x + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$. Подставим в это равенство точку максимума $x_0 = \pi$ и получим: $24\pi + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $a = 200n - 2350$. По условию $a < 0$, тогда $200n - 2350 < 0$, откуда $n < \frac{2350}{200}$ или $n < \frac{47}{4}$. Следовательно, n может принимать значения 11, 10, 9, ...

Наибольшее отрицательное значение a получается при $n = 11$ и равно: $a = 200 \cdot 11 - 2350 = 2200 - 2350 = -150$.

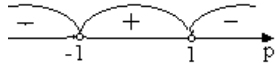
Ответ: -150.

Пример 12. Найти все действительные значения параметра p, при которых уравнение $px^2 + (1 + p)x + 1 = 0$ имеет не больше различных корней, чем уравнение $\frac{\pi^x}{1-p} = \frac{p+1}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Если в первом уравнении $p = 0$, то первое уравнение имеет корнем $x = -1$. При этом значении p второе уравнение принимает вид $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Левая часть получившегося уравнения – функция, возрастающая при всех действительных x, а правая часть уравнения – функция убывающая на промежутке $(-1;\ +\infty)$; уравнение имеет не более одного корня. Легко видеть, что $x = 0$. Итак, при $p = 0$ оба уравнения имеют по одному корню.

При $p \neq 0$ первое уравнение имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{1}{p}$.

Поскольку $\pi^x > 0$ и $\sqrt{x+1} > 0$, то $(1 - p)(1 + p) > 0$.



$p \in (-1;\ 1)$.

При этих значениях p второе уравнение может иметь корни, при этом левая часть уравнения – функция возрастающая на R, правая – убывающая на промежутке $(-1;\ +\infty)$. Уравнение имеет не более одного корня. Значит, только $p = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пример 13. Укажите наименьший корень уравнения

$x^3 - 3ax^2 - (a - 1)2x + 3a(a - 1)^2 = 0.$

Решение. Выполним преобразования уравнения:

$x^2(x - 3a) - (a - 1)^2(x - 3a) = 0 \Leftrightarrow (x - 3a)(x^2 - (a - 1)^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3a, \\ x = a - 1, \\ x = 1 - a. \end{array}\right.$$

1. Пусть $3a$ – наименьший корень, тогда $\begin{cases} 3a < a - 1, \\ 3a < 1 - a; \end{cases}$ $\begin{cases} 2a < -1, \\ 4a < 1, \end{cases}$

откуда $a < -\frac{1}{2}$.

2. Пусть $a - 1$ — наименьший корень, тогда

$$\begin{cases} a-1 \le 3a, \\ a-1 < 1-a; \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -\dfrac{1}{2}, \\ a < 1; \end{cases} \quad -\dfrac{1}{2} \le a < 1.$$

3. Пусть $1 - a$ — наименьший корень, тогда $\begin{cases} 1-a \le 3a, \\ a-1 \ge 1-a; \end{cases} \begin{cases} a \ge \dfrac{1}{4}, \\ a \ge 1, \end{cases}$

откуда $a \ge 1$.

Ответ: $3a$ при $a < -\dfrac{1}{2}$;

$a - 1$ при $-\dfrac{1}{2} \le a < 1$;

$1 - a$ при $a \ge 1$.

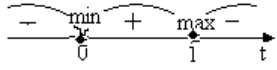
Пример 14. При каких значениях параметра p уравнение $3 - 2\cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень?

Решение. Используя формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, получаем

$3 - 2\cos x = \dfrac{p}{\cos^2 x}$; $3\cos^2 x - 2\cos^3 x = p$ (очевидно, $\cos x \ne 0$).

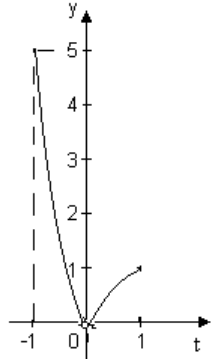
Это уравнение имеет хотя бы один корень, если значение параметра p принадлежит множеству значений функции, стоящей в левой части уравнения.

Введем обозначение $t = \cos x$, где $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Рассмотрим функцию $y(t) = -2t^3 + 3t^2$ и найдем множество ее значений на рассматриваемых промежутках. Производная функции $y'(t) = -2 \cdot 3t^2 + 3 \cdot 2t = -6t^2 + 6t = 6t(1 - t)$. Покажем знаки этой производной.



В точке $t = 0$ знак производной меняется с минуса на плюс, поэтому функция $y(t)$ имеет в этой точке минимум $y_{\min} = y(0) = 0$.

Однако эта точка не лежит в рассматриваемых промежутках. В точке $t = 1$ знак производной меняется с плюса на минус, поэтому функция $y(t)$ имеет в этой точке максимум $y_{max} = y(1) = -2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 1$. Найдем значение $y(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = 5$. Построим эскиз графика функции $y(t)$ на рассматриваемых промежутках.



На этих промежутках функция $y(t)$ является непрерывной. Поэтому множество значений функции: $E(y)$: (0; 5]. Уравнение $-2t^3 + 3t^2 = p$ (а также исходное уравнение) имеет хотя бы один корень, если значение p принадлежит $E(y)$, т. е. при $p \in$ (0; 5].

Ответ: (0; 5].

Пример 15. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $\frac{9-(a+6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2}\left(\frac{3}{x}-2\right)-1$ содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длиной 4 каждый.

Решение. 1. Из условия $x \neq 0$ следует, что обе части неравенства можно умножить на x^4 ($x^4 > 0$). Получим равносильное неравенство, в котором сгруппируем все члены в левой части:

$9x^2 - (a + 6)x^3 < 9ax - 6ax^2 - x^4$; $x(x^3 - (a + 6)x^2 + (6a + 9)x - 9a) < 0$.

2. $x^3 - (a + 6)x^2 + (6a + 9)x - 9a = x^2(x - a) - 6x(x - a) + 9(x - a) =$
$= (x^2 - 6x + 9)(x - a) = (x - 3)^2(x - a)$.

Получаем неравенство $x(x-3)^2(x-a)<0$. Решим его методом интервалов.

3. При $0 \le a \le 3$ получаем интервал $(0; a)$, не содержащий числа 4. При $a<0$ получаем интервал $(a; 0)$, также не содержащий числа 4.

4. При $a>3$ получаем объединение $(0; 3)\cup(3; a)$ двух интервалов.

Непересекающиеся отрезки длиной 4 могут располагаться только в интервале $(3; a)$. Это возможно только в том случае, когда длина интервала $(3; a)$ больше 8, т. е. если $a>11$. При таких a выполнено и другое условие: $4 \in (3; a)$.

Ответ: $(11; +\infty)$.

Пример 16. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\frac{8a^2}{x}-x(x-2a-8)>16a+a^2$ **нельзя** расположить два отрезка длиной 2 и 5, которые **не имеют** общих точек.

Решение. 1. Поскольку $x \ne 0$, домножим обе части неравенства на x^2 ($x^2>0$). Получим равносильное неравенство, в котором сгруппируем все члены в правой части: $0>x(x^3-(2a+8)x^2+(a^2+16a)(x-8a^2)$.

2. $x^3-(2a+8)x^2+16ax+a^2(x-8)=x^2(x-8)-2ax(x-8)+$ $+a^2(x-8)=(x-8)(x^2-2ax+a^2)=(x-8)(x-a)^2$.

Получаем неравенство $x(x-8)(x-a)^2<0$. Решим его методом интервалов.

3. Если $a \le 0$ или $a \ge 8$, то решением будет интервал $(0; 8)$ длиной 8. В нем есть отрезки длиной 2 и 5 без общих точек, т. е. такие значения a нам не подходят.

4. Если $0<a<8$, то множество решений $-$ $(0; a)\cup(a; 8)$.

Если $0<a<1$, то длина интервала $(a; 8)$ больше 7, и в нем есть два таких отрезка.

Если $1 \le a \le 2$, то отрезок длиной 5 можно расположить в $(a; 8)$, но тогда отрезок длиной 2 уже нельзя расположить ни в $(0; a)$, ни в $(a; 8)$.

Если $2<a<3$, то в $(0; a)$ есть отрезок длиной 2, а в $(a; 8)$ $-$ длиной 5.

Если $3 \le a \le 4$, то оба интервала: $(0; a)$ и $(a; 8)$ $-$ длиной меньше 5, и в них нет нужных отрезков.

Для $4 \le a \le 8$ $-$ симметричный перебор.

Ответ: $[1; 2]\cup[3; 5]\cup[6; 7]$.

Пример 17. Найти все значения параметра a, при которых область определения функции $y = \log_2(\log_2(a - x)) \cdot \log_2 x$ содержит пять целых чисел.

Решение. Поскольку определен логарифм только для положительных чисел, $\begin{cases} x > 0, \\ \log_2(a - x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ a - x > 0, \\ a - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a - 1.$

Чтобы область определения содержала 5 целых чисел, необходимо и достаточно выполнение неравенства $5 < a - 1 \le 6$, т. е. $a \in (6; 7]$.

Ответ: (6; 7].

Пример 18. Найти все значения a, при которых область определения функции $y = \dfrac{1}{a \cdot 2^{2x} - 2^x + 1}$ есть вся числовая прямая.

Решение. Очевидно, что $a2^{2x} - 2^x + 1 \neq 0$. Если $a = 0$, то $-2^x + 1 \neq 0$, $2^x \neq 1$ и $x \neq 0$.

Положив $2^x = t$, где $t > 0$, получим $at^2 - t + 1 \neq 0$. $D = 1 - 4a < 0$, т. е. $a > \dfrac{1}{4}$; тогда квадратный трехчлен корней не имеет. Пусть $1 - 4a > 0$, тогда уравнение $at^2 - t + 1 = 0$ имеет корни, причем при $0 < a < \dfrac{1}{4}$ оба корня положительны, а при $a < 0$ один из них положителен (этот результат дают формулы теоремы Виета). Итак, только при $a > \dfrac{1}{4}$ областью определения данной функции является вся числовая прямая.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

Пример 19. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sqrt{x} = |x + p|$ имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что $x \geq 0$, и поскольку обе части уравнения являются неотрицательными выражениями, то

$$\sqrt{x} = |x + p| \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x+p)^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ x^2 + x(2p - 1) + p^2 = 0.$$

Уравнение имеет единственный корень, если

$$D = 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 = 1 - 4p = 0, \ p = \frac{1}{4}.$$

При этом $x = \dfrac{1-2p}{2} = \dfrac{1}{4}$ – положительный корень.

Другая возможность здесь не выполняется!

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

XV. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ

Авторы уже неоднократно обращались к задачам для абитуриентов, оговаривая, каким из вузов предлагалась данная задача. При этом задачи подбирались по разделам, рассматриваемым в той или иной части работы. В настоящем разделе будут рассматриваться задачи, относящиеся ко всем ранее разобранным разделам. Они будут представлять набор тренировочных задач, данных неупорядоченно. При таком подходе не происходит отработки навыков решения задач какого-то определенного типа, читателю приходится самому проводить классификацию задач и выбор способа решения.

Пример 1. (СПбГУ, 1996 г.)

При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\sin x + a} = a + 1$ имеет решение?

Решение. $\sqrt{\sin x + a} = a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + a = (a+1)^2, \\ a + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a^2 + a + 1, \\ a \geq -1. \end{cases}$

Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то $|a^2 + a + 1| \leq 1$, откуда $a^2 + a \leq 0$ и $a \in [-1;\ 0]$.

Ответ: $[-1;\ 0]$.

Пример 2. (МГУ, 1999 г.)

Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\dfrac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $(x^2 - 6|x| - a + 6)^2 = \cos\dfrac{18\pi}{a} - 1$, которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} |x|^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ 1 - \cos\dfrac{18\pi}{a} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Первое уравнение представляет собой квадратное уравнение относительно $|x|$, $|x| \geq 0$. Если дискриминант $D = a + 3 \geq 0$, то квадратное уравнение имеет корни относительно $|x|$. Для того чтобы уравнение относительно x имело два корня, необходимо, чтобы уравнение относительно $|x|$ имело один корень (напомним, что $|x| \geq 0$).

а. При равенстве дискриминанта нулю (при $a = -3$) квадратное уравнение имеет один корень, т. е. $|x| = 3$. При этом первое уравнение системы имеет два корня, отличающиеся знаками: $x = \pm 3$. Если $a = -3$, второе уравнение системы (*) обращается в верное равенство.

б. При положительном дискриминанте первое уравнение системы имеет корни $|x|_1 = 3 + \sqrt{3+a}$ и $|x|_2 = 3 - \sqrt{3+a}$. Для того чтобы исходное уравнение имело два корня, необходимо, чтобы один из корней (это $|x|_2$) был отрицателен. Получаем систему неравенств $\begin{cases} 3+\sqrt{3+a} > 0, \\ 3-\sqrt{3+a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+a} > -3, \\ 3 < \sqrt{3+a}. \end{cases}$ Первое неравенство системы всегда выполняется. Решение второго неравенства дает $a > 6$. Решение второго уравнения системы (*) возможно при $\frac{18\pi}{a} = 2\pi n$, т. е. при выполнения условий $\begin{cases} a = \frac{9}{n}, \\ a > 6, \\ n \in Z. \end{cases}$ Решая систему в целых числах, получаем $a = 9$.

Ответ: -3; 9.

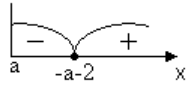
Примечание. Задача допускает и графическое решение.

Пример 3. (МГУ, 1993 г.)

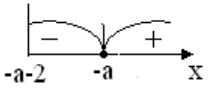
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| \geq a^2$ справедливо для всех действительных x.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - a^2 + 2|x-a| \geq 0$, которое в свою очередь равносильно совокупности систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq a, \\ (x-a)(x+a+2) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ (x-a)(x+a-2) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Решаем методом интервалов второе неравенство первой системы: $x = a$, $x = -a - 2$. Если $-a - 2 > a$; $a < -1$. При $a = -1$ имеем верное неравенство $(x + 1)^2 \geq 0$. Итак, если $a \leq -1$, то $x \in [-a - 2;\ +\infty)$.



Если же $-a - 2 < a$, т. е. $a > -1$, то $x \in (a;\ +\infty)$ (*).



Решаем методом интервалов второе неравенство второй системы: $x = a$; $x = 2 - a$. Если $2 - a > a$, т. е. $a < 1$, то $x \in (-\infty; a)$ (**). Случай, при котором $2 - a < a$, предлагаем разобрать самостоятельно. Заметим, что при $a = \pm 1$ неравенство выполняется при всех x, поэтому из (*) и (**) и сделанного замечания приходим к выводу, что исходное неравенство выполняется для всех x при $-1 \leq a \leq 1$.

Ответ: $[-1;\ 1]$.

Пример 4. (МГТУ, 2001 г.)

Сколько корней больше -1 в зависимости от значения a имеет уравнение $x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$?

Решение. По утверждению 1 (стр. 38) имеем

$f(-1) = 1 - 2a - 6 + 4a + 12 \leq 0$ и $a \leq -3{,}5$.

Уравнение имеет один корень, когда $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 4(a+3) = (a+3)(a-1).$$

Если $a = -3$, то $x = 0$ удовлетворяет условию задачи. Если $a = 1$, то $x^2 + 8x + 16 = 0$, $x = -4$ не удовлетворяет условию задачи.

Уравнение имеет одно решение, удовлетворяющее условию задачи, при $a \in \left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right] \cup \{-3\}$.

Рассмотрим условие существования двух корней при $x > -1$:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{p}{2} = -(a+3) > -1, \\ f(-1) = 2a + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1; \end{array}\right. \\ a < -2, \\ a > -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\frac{7}{2};\ -3\right).$$

Ответ: при $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{7}{2}\right] \cup \{-3\}$ – один корень;

при $a \in \left(-\dfrac{7}{2};\ -3\right)$ – два корня;

при других a корней нет.

Пример 5. (МГУ, 2005 г.)

Найти все значения a, при которых уравнение

$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Пусть $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$, тогда функция $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$ убывает при $x \le 1$ (поскольку при любом раскрытии модулей коэффициент при x равен $9 - 4 \pm 3 \pm 1 < 0$) и возрастает при $x \ge 1$ (коэффициент при x равен $-9 - 4 \pm 3 \pm 1 > 0$), откуда $E(f) : [f(1);\ +\infty)$.

Уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда

$$f(1) \le 0 \Leftrightarrow -4 + \left|3 - |1 + a|\right| \le 0 \Leftrightarrow -4 \le 3 - |1 + a| \le 4 \Leftrightarrow -1 \le |1 + a| \le 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7 \le 1 + a \le 7 \Leftrightarrow -8 \le a \le 6$$

Ответ: $-8 \le x \le 6$.

Пример 6. (МГУ, 2005 г.)

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

Решение. Пусть x_0 – решение данного уравнения при некотором значении a. Тогда $x_0 \ne \dfrac{1}{3}$, а число $x_1 = \dfrac{x_0 + 1}{3x_0 - 1}$ также является ре-

шением этого уравнения, поскольку $x_1 \neq \frac{1}{3}$ и $x_0 = \frac{x_1+1}{3x_1-1}$, так что

$|x_0| + \left|\frac{x_0+1}{3x_0-1}\right| = \left|\frac{x_1+1}{3x_1-1}\right| + |x_1|$. Следовательно, для того, чтобы исходное уравнение имело ровно три решения, необходимо, чтобы число решений было нечетным, а значит, чтобы одно из них являлось корнем уравнения $x = \frac{x+1}{3x-1} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Этим значениям x соответствуют числа $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. Непосредственная проверка показывает, что требованию задачи удовлетворяет только значение $a = 2$, для чего достаточно обычными приемами решить два уравнения.

Примечание. Проведем некоторые пояснения (возможен и такой подход).

Действительно, функция $f(x) = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = |x| + \left|\frac{1}{3} + \frac{4}{9\left(x - \frac{1}{3}\right)}\right|$ убывает от ∞ до 1 на промежутке $(-\infty; -1]$, возрастает от 1 до ∞ на промежутке $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. При $x > \frac{1}{3}$ имеем $f(x) = x + \frac{x+1}{3x-1} = \frac{3x^2+1}{3x-1}$,

причем неравенство $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2+1}{3x-1} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ выполнено и обращается в равенство ровно при одном значении $x = 1$.

При $-1 < x < 0$ имеем $f(x) = -x - \frac{x+1}{3x-1} = \frac{3x^2+1}{1-3x}$, причем верны неравенства $f(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2+1}{1-3x} < 1 \Leftrightarrow x(x-1) < 0$;

$f(x) \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2+1}{1-3x} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$, последнее из которых обращается в равенство ровно при одном значении $x = -\frac{1}{3}$. Таким образом, при $a = 2$ уравнение имеет ровно три решения, а при $a = \frac{2}{3}$ – одно.

Ответ: 2.

Пример 7. (МАТИ, 2003 г.)

Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2 + a \leq 0$ удовлетворяет неравенству $(x+2a)\sqrt{3-x} \leq 0$.

Решение. Укажем два способа решения этого задания. Очевидно, что неравенство $x^2 + a \leq 0$ не имеет решений при $a > 0$. При $a \leq 0$ его решением будет двойное неравенство $-\sqrt{-a} \leq x \leq \sqrt{-a}$.

Второе же неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2a \leq 0, \\ x < 3; \end{cases} \\ x = 3, \end{array}\right.$ откуда получаем $x \leq -2a$ при $-\frac{3}{2} < a \leq 0$ $x < 3$ при $a \leq -\frac{3}{2}$; $x = 3$ при $a \in R$.

По условию каждое решение первого неравенства должно удовлетворять второму, но тогда $\begin{cases} \sqrt{-a} \leq -2a, \\ \sqrt{-a} \leq 3, \\ a \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a \leq -\frac{1}{4}; \end{array}\right. \\ a \geq -9, \end{cases}$ откуда $a = 0$ и $-9 \leq a \leq -\frac{1}{4}$.

Ответ: $\{0\} \cup \left[-9;\ \frac{1}{4}\right)$.

Решение вторым способом основано на изображении в плоскости xOa параболы $a = -x^2$, тогда решением первого неравенства $a \le -x^2$ будет внутренняя часть параболы вместе с границей. Решением же второго неравенства является прямая $x = 3$ и часть плоскости, лежащая левее этой прямой и не выше прямой $a = -\frac{x}{2}$. Точка (0; 0) принадлежит обоим множествам. Предлагаем читателям убедиться в том, что любой отрезок, дающий решение неравенства $x^2 + a \le 0$, лежит целиком во множестве решений второго неравенства при выполнении условия $-9 \le a \le -\frac{1}{4}$.

Пример 8. (МГУ, 2005 г.)

При каких целых a неравенство $2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$ верно для любого целого значения x?

Решение.

$2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x\log_2 a + (2\log_2 a + 3) > 0.$

Последнее неравенство выполняется для любого значения x тогда и только тогда, когда

$$\log_2^2 a - 2\log_2 a - 3 < 0 \Leftrightarrow (\log_2 a - 3)(\log_2 a + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < \log_2 a < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 8.$$

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Пример 9. (СПбГУ, 2001 г.)

Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\log_2(a + 10) = \log_2(a - x) + \log_2(x + 6)$ имеет два различных корня.

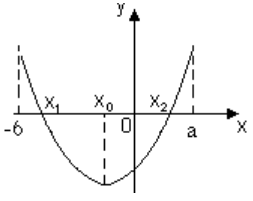
Решение.

Область определения уравнения задается системой

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -6; \end{cases} \quad x \in (-6;\ a).$$

Потенцируя исходное уравнение, получаем $x^2 + (7 - a)x + (10 - 6a) = 0$. Далее необходимо определить те значения a, при которых оба корня

уравнения принадлежат промежутку (−6; a). Ясно, что должны выполняться следующие условия: $\begin{cases} D > 0, \\ -6 < x_0 < a, \\ f(-6) > 0, \\ f(a) > 0. \end{cases}$



Решение системы не представляет труда, поэтому мы его опускаем.
Ответ: при $a > -1$.

Пример 10. (МГУ, 2005 г.)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = \dfrac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$ принимает все значения из отрезка [0; 1].

Решение. Поскольку множество значений функции sin x совпадает с отрезком [−1; 1], задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого $y \in [0; 1]$ найдется такое $t \in [-1; 1]$, что $y = \dfrac{4t + a}{4a - 2t}$.

Последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4t + a = y(4a - 2t), \\ 4a - 2t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a\dfrac{4y - 1}{2(y+2)}, \\ t \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a\left(2 - \dfrac{9}{2(y+2)}\right), \\ t \neq 2a. \end{cases}$$

Заметим, что $a = 0$ не удовлетворяет условия задачи, а при $a \neq 0$ система равносильна своему первому уравнению, так как $2 - \dfrac{9}{2(y+2)} \neq 2$.

Рассмотрим функцию $t(y) = a\left(2 - \dfrac{9}{2(y+2)}\right)$. При $a \neq 0$ она монотонна

на отрезке [0; 1] и переводит этот промежуток в отрезок с концами $f(0) = -\frac{a}{4}$ и $f(1) = \frac{a}{2}$, который целиком содержится в отрезке

$[-1;\ 1]$ лишь при $\begin{cases} \left|-\frac{a}{4}\right| \le 1, \\ \left|\frac{a}{2}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow |a| \le 2$.

Ответ: $-2 \le a < 0$; $0 < a \le 2$.

Примечание. Достаточно часто на вступительных экзаменах в различные вузы появляются задачи, в которых из заданного семейства функций требуется выделить те, чьи множества значений удовлетворяют определенным условиям. Подробная классификация задач подобного типа дана в [4].

Пример 11. (МГТУ, 2003 г.)

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(x - a)^2 + 2a - 24 = \sqrt{\frac{|x| - x}{x - 8}}$ имеет одно решение. Указать это решение при каждом a.

Решение. При $x < 0$ уравнение не имеет решения, поскольку $\frac{-x-x}{x-8} < 0$. При $x \ge 0$, $x \ne 8$ $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 24 = 0$. Полученное уравнение будет иметь одно решение при выполнении условий:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ x_2 = a > 0; \end{cases} \\ f(0) < 0; \\ \begin{cases} f(0) = 0, \\ x_1 < 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2a + 24 = 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 12; \\ a^2 + 2a - 24 < 0 \Leftrightarrow a \in (-6;\ 4); \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 4, \\ a = -6; \end{array}\right. \\ x_1 < 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Если $f(0) = 0$, то $x(x - 2a) = 0$, $x = 0$, $x = 2a$;

при $a = -6$ $x = 0$, $x = -12$ – решением является только правый корень;

при $a = 4$ $x = 0$, $x = 8$ – решением является только левый корень.

Итак, имеем одно решение при любом $a \in [-6;\ 4] \cup \{12\}$.

Найдем a, если $x = 8$. Тогда $64 - 16a + a^2 + 2a - 24 = 0$; $a^2 - 14a + 40 = 0$. Решение квадратного уравнения дает $a_1 = 10$, $a_2 = 4$.

С $a = 4$ все ясно. Корни уравнения: $x_{1,\,2} = a \pm \sqrt{-2a+24}$.

При $a = 10$ $x_1 = 12$, $x_2 = 8$. Мы получили два корня, но решение только одно, поскольку $x \neq 8$.

Ответ: при любом $a \in [-6;\ 4) \cup \{10;\ 12\}$ $x = a + \sqrt{-2a+24}$;
при $a = 4$ $x = 0$.

Пример 12. (МАДИ, 2005 г.)

Найти количество целых значений параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y = (x - 19a)^2 - a^2 - 8a - 15$ отрицательна, а ордината – положительна.

Решение. Если уравнение параболы приведено к виду $y = (x-n)^2 + m$, то абсцисса $x_в$ вершины параболы равна n, а ее ордината равна m. В нашем случае $x_в = 19a$, $y_в = -a^2 - 8a - 15$. По условию задачи

$$\begin{cases} 19a < 0, \\ -a^2 - 8a - 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ (a+3)(a+5) < 0 \end{cases} \Rightarrow -5 < a < -3.$$ Этому интервалу принадлежит единственное целое значение a.

Ответ: 1.

Пример 13. (МВТУ, 2002 г.)

Найти все значения $a \neq 0$, для которых неравенство

$a^2\left|a + \dfrac{x}{a^2}\right| + |1 + x| \leq 1 - a^3$ имеет не менее четырех различных решений, являющиеся целыми числами.

Решение. Левая часть неравенства неотрицательна при любых значениях a и x; следовательно, неравенство может иметь решение только тогда, когда его правая часть неотрицательна, т. е. при $a^3 \leq 1$.

Поскольку $a^2\left|a+\frac{x}{a^2}\right|=\left|a^3+x\right|$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\left|a^3+x\right|+\left|1+x\right|\le 1-a^3$. Последнее неравенство можно решить формально, раскрыв знаки модуля.

Приведем другое решение. Для этого перепишем его в виде $\left|x-\left(-a^3\right)\right|+\left|x-(-1)\right|\le 1-a^3$. Согласно геометрической интерпретации модуля решить неравенство – значит найти на координатной прямой все точки x такие, что сумма расстояний от каждой из них до точки с координатой $-a^3$ и до точки с координатой -1 не больше, чем $1-a^3$, т. е. не больше отрезка $[-1;\ -a^3]$.

Для того чтобы отрезок $[-1;\ -a^3]$ содержал не менее четырех целых чисел, он должен содержать числа -1, 0, 1, 2, тогда должно выполняться неравенство $2\le -a^3$. Из этого неравенства следует, что только при $a\in\left(-\infty;\ -\sqrt[3]{2}\right]$ исходное неравенство имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt[3]{2}\right]$.

Пример 14. (МПГУ, 2005 г.)

Найдите все значения параметра a, при котором для любого x выполняется неравенство $4^x+(a-1)\cdot 2^x+(7-2a)>0$.

Решение. Обозначим $y=2^x$. Требуется найти все значения параметра a, при которых квадратный трехчлен $y^2+(a-1)\cdot y+(7-2a)$ не имеет положительных корней, что выполняется, если $D<0$ или $\begin{cases}x_в\le 0,\\ f(0)\ge 0,\end{cases}$ где $D=(a-1)^2-4\cdot(7-2a)=a^2+6a-27$ – дискриминант, а $x_в=\frac{1-a}{2}$ – абсцисса вершины параболы. Задача сводится к поиску объединения решений неравенства $a^2+6a-27<0$ и системы $\begin{cases}1-a\le 0,\\ 7-2a\ge 0.\end{cases}$

Ответ: $\left(-9;\ \frac{7}{2}\right]$.

Пример 15. (МГТУ, 2003 г.)

Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-16}, \\ 3y+5x=a \end{cases}$ имеет решение.

Решение. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y \ge 0, \\ y^2 = x^2 - 16, \\ x = \dfrac{a}{5} - \dfrac{3y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0, \\ 16y^2 + 6ay - a^2 + 400 = 0, \\ x = \dfrac{a}{5} - \dfrac{3y}{5}. \end{cases}$$

Найдем значение a, при котором $D \ge 0$:

$D = 25a^2 - 16 \cdot 400 \ge 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ -16] \cup [16;\ +\infty)$. Из этих значений a исключим те, при которых уравнение имеет отрицательные корни.

Условие отрицательности корней:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ y_1 + y_2 = -\dfrac{6a}{16} < 0, \\ y_1 \cdot y_2 = \dfrac{400 - a^2}{16} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty;\ -16] \cup [16;\ +\infty), \\ a > 0, \\ a \in (-20;\ 20) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [16;\ 20).$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ -16) \cup [20;\ +\infty)$.

Пример 16. (МГПУ, 2005 г.)

Найдите все значения параметра a, при которых для всех x, принадлежащих промежутку (1; 2), выполняется неравенство $x^2 + ax + a^2 - a - 10 < 0$.

Решение. Введем функцию $f(x) = x^2 + ax + a^2 - a - 10$. Тогда условия задачи можно записать в виде системы $\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 9 \le 0, \\ a^2 + a - 6 \le 0. \end{cases}$

Ответ: $[-3;\ 2]$.

Пример 17. (МГТУ, 2002 г.)

Указать все значения параметра p, при которых система уравнений $\begin{cases} x+\sqrt{y(2|y|-y)}=0, \\ 2(x-p)^2+x+y=2p+4 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найти это решение при каждом p.

Решение. При $y < 0$ первое уравнение, а значит, и система не имеет смысла, поскольку получаем выражение $\sqrt{-3y^2}$.

При $y \geq 0$ $x + y = 0$, $x = -y$, и после подстановки во второе уравнение получаем систему $\begin{cases} y \geq 0, \\ y^2+2py+p^2-p-2=0, \end{cases}$ которая имеет одно решение при условии:

$$\left[\begin{array}{l} D=0, \\ y_в \geq 0, \\ f(0)=0, \\ y_1<0, \\ y_2=0, \\ f(0)<0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} D=p+2=0, \\ y_в=-p>0, \\ f(0)=p^2-p-2<0, \\ f(0)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=2, \\ p=-1; \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p=-2, \\ p \in (1;\ 2) \end{array}\right..$$

$y_в = -p$, при $p = -2$ $y_в = 2$, $2 \geq 0$;
при $p = -1$ $y = 0$, $y = 2$, т. е. два решения;
при $p = 2$ $y = 0$, $y = -4$, т. е. одно решение.
Объединяя все полученные решения, получим ответ.

Ответ: при $p \in \{-2\} \cup (-1;\ 2]$ $x = p - \sqrt{p+2}$, $y = -p + \sqrt{p+2}$.

Пример 18. (МГПУ, 2004 г.)

Найдите все значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2 - 6kx + 2 - 2k + 9k^2 = 0$ больше 3.

Решение. Обозначив $x^2 - 6kx + 2 - 2k + 9k^2 = f(x)$, получаем

$$\begin{cases} f(3) > 0, \\ 3k > 3, \\ 9k^2 - 2 + 2k - 9k^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k < 1, \\ k > \dfrac{11}{9}; \end{array}\right. \\ k > 1, \\ k \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow k > \frac{11}{9}.$$

Ответ: $k > \dfrac{11}{9}$.

Пример 19. (МГТУ, 2004 г.)

Для всех значений a решить неравенство $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}} < a - 1$.

Решение. Найдем область определения данного неравенства. Имеем: $\dfrac{3x+a}{x-a} \geq 0$. Решение неравенства методом интервалов дает: $x \in (-\infty; -\dfrac{a}{3}] \cup (a; +\infty)$.

Проведем равносильные преобразования неравенства, возведя обе его части в квадрат с учетом положительности правой части (в левой части стоит арифметический квадратный корень):

$$\begin{cases} \dfrac{3x+a}{x-a} < (a-1)^2, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\left(2+2a-a^2\right)+a\left(a^2-2a+2\right)}{x-a} < 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x \leq -\dfrac{a}{3}, \\ x\left(2+2a-a^2\right)+a\left(a^2-2a+2\right) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ x > a, \\ x\left(2+2a-a^2\right)+a\left(a^2-2a+2\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1, \\ x \le -\dfrac{a}{3}, \\ x\left(a^2-2a-2\right) < a\left(a^2-2a+2\right); \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ x>a, \\ x\left(a^2-2a-2\right) > a\left(a^2-2a+2\right). \end{cases} \end{array}\right.$$

Поскольку $a^2 - 2a - 2 = (a - (1+\sqrt{3}))(a-(1-\sqrt{3}))$, то

$a^2 - 2a - 2 < 0$ при $1-\sqrt{3} < a < 1+\sqrt{3}$;

$a^2 - 2a - 2 = 0$ при $a_1 = 1-\sqrt{3}$, $a_2 = 1+\sqrt{3}$;

$a^2 - 2a - 2 > 0$ при $a \in (-\infty;\ 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3};\ +\infty)$.

При $a = 1+\sqrt{3}$ вторая система совокупности решений не имеет, а первой системе этой совокупности удовлетворяют все значения x из промежутка $\left(-\infty;\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{3}\right]$.

При $1 < a < 1+\sqrt{3}$ совокупность обеих систем равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<a<1+\sqrt{3}, \\ x \le -\dfrac{a}{3}, \\ x > \dfrac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1<a<1+\sqrt{3}, \\ x>a, \\ x < \dfrac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<a<1+\sqrt{3}, \\ \dfrac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2} < -\dfrac{a}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1<a<1+\sqrt{3}, \\ \dfrac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2} > a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решениями первой системы последней совокупности являются все значения x из промежутка $\left(\frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2};\ -\frac{a}{3}\right]$, а вторая система решений не имеет.

При $a > 1+\sqrt{3}$ предыдущая совокупность систем равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1+\sqrt{3},\\ x\le -\frac{a}{3},\\ x<\frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2};\end{cases}\\ \begin{cases}a>1+\sqrt{3},\\ x>a,\\ x>\frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<a<1+\sqrt{3},\\ \frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2}>-\frac{a}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}1<a<1+\sqrt{3},\\ \frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2}>a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решениями первой системы последней совокупности являются все значения x из промежутка $\left(-\infty;\ -\frac{a}{3}\right]$, а решением второй системы – все значения x из промежутка $\left(\frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2};\ +\infty\right]$.

Ответ: при $1 < a < 1+\sqrt{3}$ $\left(\frac{a\left(a^2-2a+2\right)}{a^2-2a-2};\ -\frac{a}{3}\right]$;

при $a = 1+\sqrt{3}$ $\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3}\right]$;

при $a > 1 + \sqrt{3}$ $\left(-\infty; -\frac{a}{3}\right] \cup \left(\frac{a\left(a^2 - 2a + 2\right)}{a^2 - 2a - 2}; +\infty\right]$;

при $a \le 1 + \sqrt{3}$ решений нет.

Пример 20. (МСХА, 2004 г.)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{(a+2)x^2 + (a+7)x + 5}{x-1} = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Данное уравнение имеет единственное решение, если уравнение $(a + 2)x^2 + (a + 7)x + 5 = 0$ имеет одно решение, отличное от единицы.

1. Уравнение $(a + 2)x^2 + (a + 7)x + 5 = 0$ является линейным, что возможно при $a = -2$. В этом случае решением уравнения является $x = -1$, $x \ne 1$.

2. Уравнение $(a + 2)x^2 + (a + 7)x + 5 = 0$ является квадратным и имеет единственное решение $x \ne 1$, что возможно при выполнении условий $\begin{cases} a \ne -2, \\ (a+7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (a+2) = 0, \\ -\frac{a+7}{2(a+2)} \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ne -2, \\ (a-3)^2 = 0, \\ a \ne \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$

3. Уравнение $(a + 2)x^2 + (a + 7)x + 5 = 0$ является квадратным и имеет два решения, одно из которых равно единице. Этот случай возможен при выполнении условий

$$\begin{cases} a \ne -2, \\ (a+7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (a+2) > 0, \\ (a+2) \cdot 1^2 + (a+7) \cdot 1 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ne -2, \\ (a-3)^2 > 0, \\ a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7.$$

Ответ: -7; -2; 3.

Пример 21. (МГТУ, 2002 г.)

При каких значениях параметра b уравнение $b\sin x + \sqrt{12}\cos x = b^2$ не имеет решений?

Решение. Используя метод введения вспомогательного угла, разделим обе части уравнения на $\sqrt{b^2+12}$ и получим уравнение $\frac{b}{\sqrt{b^2+12}}\sin x+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{b^2+12}}\cos x=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}$, где $\frac{b}{\sqrt{b^2+12}}=\cos x$, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{b^2+12}}=\sin x$. Тогда $\sin(x+\varphi)=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}$. Это уравнение не будет иметь решений, если $\left|\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}\right|>1$ или

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}>1\Leftrightarrow b^2>\sqrt{b^2+12}\Leftrightarrow b^4>b^2+12\Leftrightarrow b^4-b^2-12>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2<-3,\\ b^2>4.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности решения не имеет, а второе неравенство дает $|b|>2$.

Ответ: $b\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

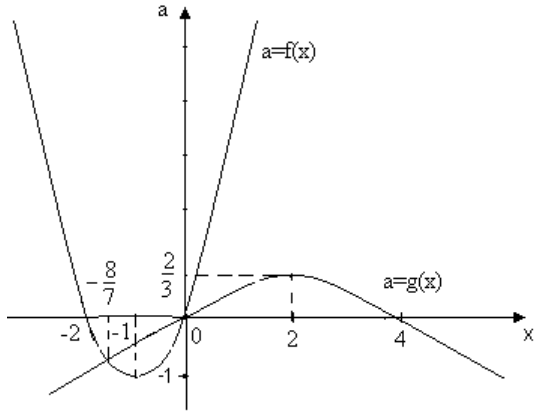
Пример 22. (МФТИ, 2004 г.)

Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases}x^2+2x-a\le 0,\\ x^2-4x+6a\le 0\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Исходная система неравенств равносильна следующей:

$\begin{cases}x^2+2x\le a,\\ \frac{4x-x^2}{6}\ge a\end{cases}$ (*). Построим графики функций $a=x^2+2x=f(x)$ и $a=\frac{4x-x^2}{6}=g(x)$.

Эти графики пересекаются в точках с абсциссами $-\frac{8}{7}$ и 0, $f(x)\ge -1$ и $g(x)\le\frac{2}{3}$ при $x\in R$.



При $a < -1$ первое неравенство системы (*) не имеет решений, а при $a > \frac{2}{3}$ второе неравенство системы (*) не имеет решений.

При каждом значении $a = a_0$, где $a_0 \geq -1$, множество E_1 решений первого неравенства системы (*) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a = f(x)$, которые лежат ниже прямой $a = a_0$ и на этой прямой.

Аналогично, при каждом $a = a_0$, где $a_0 \leq \frac{2}{3}$, множество E_2 решений второго неравенства системы (*) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a = g(x)$, которые лежат выше прямой $a = a_0$ и на этой прямой.

Если $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$, то множества E_1 и E_2 – отрезки (при $a_0 = \frac{2}{3}$ множество E_2 – точка $x = 2$), не имеющие общих точек (E_1 и E_2 лежат по разные стороны от точки $x = 0$). В этом случае система (*) не имеет решений.

Если $a_0 = 0$, то множества E_1 и E_2 имеют единственную общую точку $x = 0$, т. е. при $a = 0$ система (*) имеет единственное решение.

Если $-1 < a < 0$, то пересечение E множеств E_1 и E_2 – отрезок. В этом случае система (*) имеет бесконечное множество решений (каждая точка $x \in E$ – решение системы (*).

Наконец, при $a = -1$ система имеет единственное решение $x = -1$.
Ответ: $a = -1$ и $a = 0$.

Пример 23. (МГТУ, 2003 г.)

При каждом значении параметра a указать, для каких x выполняется неравенство $a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x a > 0$.

Решение. Если $a = 0$, то исходное неравенство имеет вид $-9^{x+1} > 0$ и не выполняется ни при каких x.

Пусть a – некоторое фиксированное, отличное от нуля число. Обозначив $t = 3^x$, исходное неравенство можно переписать так: $9t^2 + 8at - a^2 < 0$ (*).

Найдем корни трехчлена: $t_{1,\,2} = \dfrac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 9a^2}}{9}$;

$t_1 = \dfrac{-4a - 5|a|}{9}$, $t_2 = \dfrac{-4a + 5|a|}{9}$.

Видно, что при всех $a \neq 0$ $t_1 < t_2$, и решениями неравенства (*) будут $t \in (t_1, t_2)$, т. е. $t_1 < t < t_2$.

При $a > 0$ $\dfrac{-4a - 5a}{9} < 3^x < \dfrac{-4a + 5a}{9} \Rightarrow -a < 3^x < \dfrac{1}{9}a \Rightarrow x < \log_3 a - 2.$

При $a < 0$

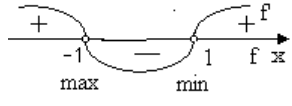
$\dfrac{-4a + 5a}{9} < 3^x < \dfrac{-4a - 5a}{9} \Rightarrow \dfrac{1}{9}a < 3^x < -a \Rightarrow 3^x < -a \Rightarrow x < \log_3(-a).$

Ответ: при $a < 0$ $x < \log_3(-a)$;
при $a = 0$ решений нет;
при $a > 0$ $x < \log_3 a - 2$.

Пример 24. (МГТУ, 2005 г.)

Найти количество решений уравнения $x^3 - 3x = a$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x$.



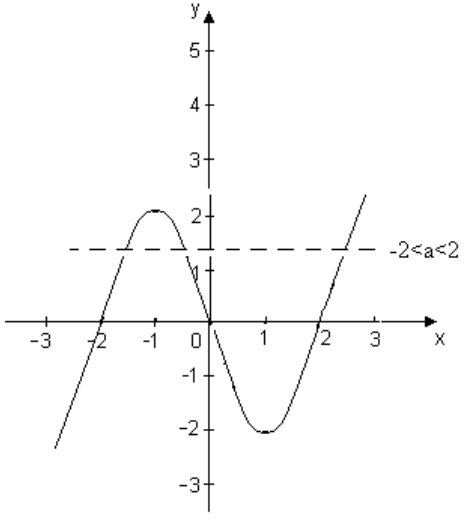
Найдем ее область определения, промежутки монотонности, точки экстремума, пределы в точках разрыва и на бесконечности и изобразим эскиз графика функции.

$D(f) = R$; $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0$: $x = \pm 1$.

$f(-1) = -1 + 3 = 2$; $f(1) = 1 - 3 = -2$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x) = +\infty.$$



Теперь (мысленно) будем проводить горизонтальные прямые $y = a$ и отслеживать количество их пересечений с графиком.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ – 1 решение;
при $a \in \{\pm 2\}$ – 2 решения;
при $a \in (-2; 2)$ – 3 решения.

Пример 25. (МГТУ, 2004 г.)

Найти количество решений уравнения $2\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-6} = ax + 2$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Изобразим эскизно график левой $f(x) = 2\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-6}$ и правой $g(x) = ax + 2$ частей уравнения, после чего найдем количество пересечений в зависимости от a.

$f(x) = 2\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-6}$;

$D(f)$: $[2; +\infty)$; $f(2) = 2$;

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{3}{2\sqrt{3x-6}};\ f'(x) > 0 \text{ при } x > 2;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}-\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2(3x-6)\sqrt{3x-6}};\ f''(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ при } x > 2.$$

Поясним полученный выводы словесно: график функции $f(x)$ «начинается» в точке (2; 2), далее возрастает в своей области определений, обращен выпуклостью вверх.

График функции $g(x) = ax + 2$ представляет собой семейство прямых, проходящих через точку (0; 2) с переменным в зависимости от параметра угловым коэффициентом (семейство прямых, «вращающихся» вокруг точки (0; 2)).

«Граничных» значений a два: $a = 0$ и $a = a_0$, соответствующие случаям касания.

Если мы найдем a_0, то сможем дать ответ в задаче.

Уравнение касательной:

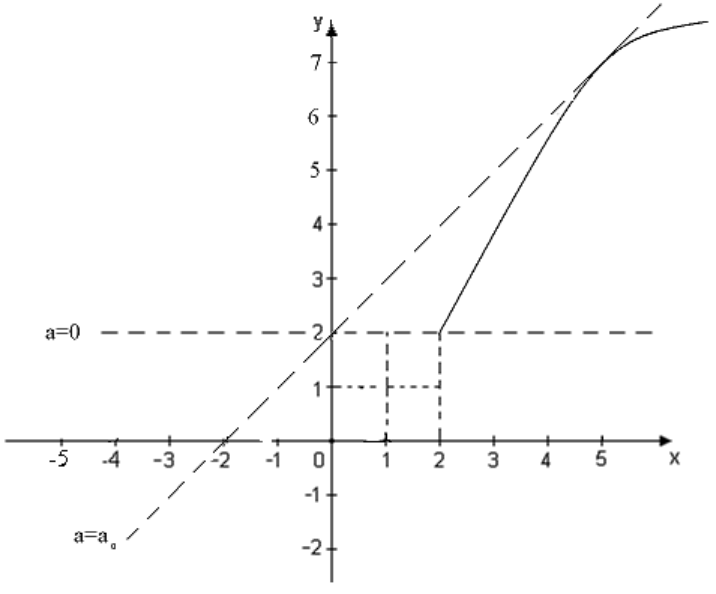
$$y = 2\sqrt{x_0-1}+\sqrt{3x_0-6}+\left(\frac{1}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3}{2\sqrt{3x_0-6}}\right)(x-x_0);$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3}{2\sqrt{3x_0-6}}\right)x+\frac{2(x_0-1)-x_0}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{2(3x_0-6)-3x_0}{2\sqrt{3x_0-6}};$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3}{2\sqrt{3x_0-6}}\right)x+\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}}.$$

Касательная должна совпасть с прямой $y = ax + 2$, т. е. x_0 должно быть найдено из условия $\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}} = 2$. Подробное

решение данного уравнения представляет собой довольно сложную задачу, однако нас выручит одно обстоятельство, очевидное для внимательных.



Если проанализировать данный выше график, то можно заметить, что точка касания единственна, т. е. если мы каким-то чудом угадаем эту точку, то мы узнаем **единственное** решение уравнения $\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}}=2.$

Можно также с помощью производной доказать монотонность функции $t(x_0)=\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}}$, а затем сослаться на следующее **утверждение**:

Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x) = C$ $(C \in R)$ имеет не более одного решения на X.

Теперь дело за малым – угадать решение уравнения

$\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}}=2$. Понадеемся на то, что авторы задания выбрали «хороший корень», предположим, что все квадратные корни уравнения извлекаются. Тогда для начала проверим, не содержится ли корень x_0 среди чисел, дающих полные квадраты в подкоренном выражении $x_0-1=4$; 9; 16; Убеждаемся, что число 5 – корень!

$$\frac{5-2}{\sqrt{5-1}}+\frac{15-12}{2\sqrt{15-6}}=\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{3}{2\sqrt{9}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Итак $x_0=5$. Возвращаемся к уравнению касательной и находим a_0:

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{5-1}}+\frac{3}{2\sqrt{15-6}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Смотрим на график, мысленно вращаем прямую вокруг точки (0; 2), начиная от вертикального положения, соответствующего пределу a $(-\infty)$, и заканчивая другим вертикальным положением a $(+\infty)$.

Ответ: при $a\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$ – нет решений;
при $a\in\{0;\ 1\}$ – 1 решение;
при $a\in(0;\ 1)$ – 2 решения.

Пример 27. (МГТУ, 2004 г.)

Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x+2(a-1)\sqrt{x}+3-a=0$ имеет решения.

Решение.

I способ (теорема Виета).

Первый шаг очевиден: вводим новую переменную $t=\sqrt{x}$, $t\geq 0$. Исходное уравнение имеет решения в точности тогда, когда уравнение $t^2+2(a-1)t+3-a=0$ (1) имеет хотя бы одно неотрицательное решение. Заметим, что коэффициент при t^2 не зависит от параметра, т. е. уравнение (1) является квадратным при любом значении параметра.

Проще ответить не на поставленный в задаче вопрос, а на противоположный: «При каких значениях параметра a уравнение (1) не имеет неотрицательных корней (т. е. либо не имеет корней вообще, либо имеет, но все они отрицательны)?» Если знать ответ

на такой вопрос, то ответ на вопрос задачи получается вычитанием полученного множества значений параметра из R.

При каких же значениях a уравнение (1) не имеет неотрицательных корней?

1. $D < 0$ (корней нет вообще).

$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3 + a = (a-1)^2 + (a-1) - 2 < 0$; $(a-1) \in (-2; 1)$;

$a \in (-1; 2)$.

2. $(D \geq 0)$, $t_1 < 0$, $t_2 < 0$.

(Почему условие $D \geq 0$ стоит в скобках? Потому что при $D < 0$ неотрицательных корней тоже нет!)

Замечание. Корень 2-й кратности при постановке условия на знаки можно считать парой совпадающих корней.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 < 0, \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-a) < 0, \\ 3 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1;\ 3).$$

(Сумма отрицательна, произведение положительно.)

$$\left[\begin{array}{l} a \in (-1;\ 2) \\ a \in (1; 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (-1; 3) - \text{ нет отрицательных корней.}$$

Тогда при $a \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty)$ неотрицательные корни есть!

Ответ: $a \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty)$.

П с п о с о б (теоремы о расположении корней квадратного трехчлена).

Начало решения повторяем: замена переменной.

$t^2 + 2(a-1)t + 3 - a = 0$; $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$.

Графиком квадратичной функции $y = t^2 + 2(a-1)t + 3 - a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Для этой функции $\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3 + a = a^2 - a - 2$, $t_0 = 1 - a$, $y(0) = 3 - a$. Есть неотрицательные корни (все возможные варианты расположения парабол для случая, когда квадратное уравнение имеет хотя бы один корень, см. в разделе V).

$$\begin{cases} y(0) \geq 0, \\ t_0 \geq 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a \geq 0, \\ 1 - a \geq 0, \\ a^2 - a - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3, \\ a \leq 1, \\ a \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ -1];$$

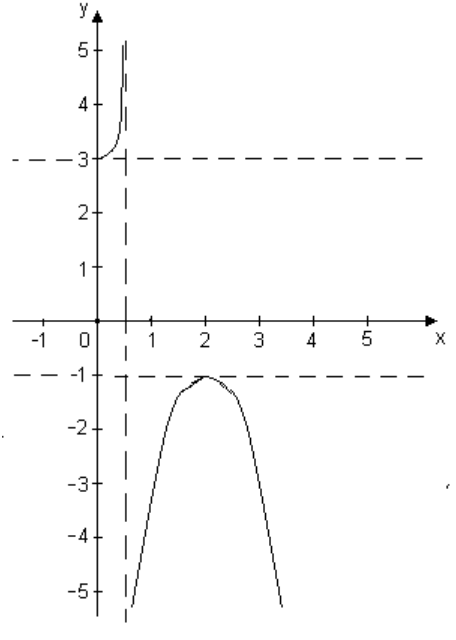
$y(0) \le 0$; $3 - a \le 0$; $a \ge 3$.

Объединяя два случая, получим ранее полученный результат.

III способ (выражаем параметр и исследуем функцию; такой способ хорош при линейном вхождении в задачу параметра).

Сгруппируем выражение (1) по другому, выделив a: $a(2t - 1) = -t^2 + 2t - 3$. Заметим, что $t = -0{,}5$ не является решением уравнения ни при каких значениях a.

Тогда можно, разделив на $2t - 1$ обе части полученного уравнения, выразить параметр: $a = \dfrac{t^2 - 2t + 3}{1 - 2t}$. Далее исследуем функцию $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 3}{1 - 2t}$; $t \ge 0$, строим эскиз графика функции $y = f(t)$ и отслеживаем количество пересечений его прямой $y = a$ в зависимости от a.



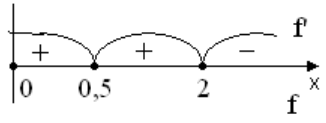
D_f : $(-\infty;\ -1]\ \cup\ [3;\ +\infty)$,

$$f'(t)=\ \frac{(2t-2)(1-2t)+2\left(t^2-2t+3\right)}{(1-2t)^2}=\frac{-2t^2+2t+4}{(1-2t)^2}=\frac{-2(t+1)(t-2)}{(1-2t)^2}.$$

$D_f = D_{f'}$; $f'(t) = 0$; $t = 2$; $(-1 \in D_f)$.

$f(0) = 3$; $f(2) = -1$; $\lim\limits_{t\to 0{,}5-0} f(t)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to 0{,}5+0} f(t)=-\infty$;

$\lim\limits_{t\to -x} f(t)=-\infty$.



Заметим, что для ответа на вопрос данной задачи наличие или отсутствие наклонных асимптот, а также характер выпуклости не имеют никакого значения.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$.

Пример 28. (МГТУ, 2004 г.)

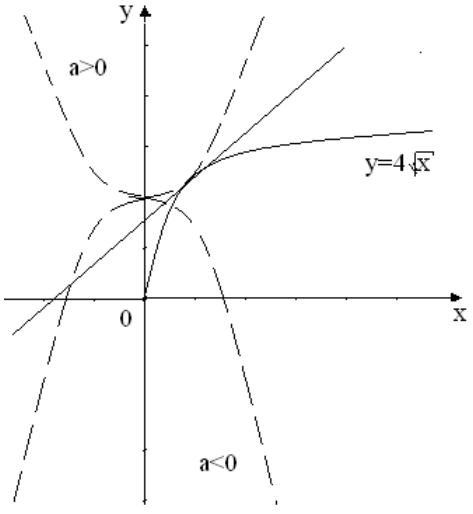
При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y=1+\dfrac{x^2}{a^3}, \\ y=4\sqrt{x} \end{cases}$ имеет одно решение?

Решение.

I способ (анализируем без дополнительных преобразований данные функции).

$y=1+\dfrac{x^2}{a^3}$ – парабола. При $a < 0$ ветви направлены вниз, при $a > 0$ – вверх (при $a = 0$ система не имеет смысла).

$y=4\sqrt{x}$ – ветвь параболы. Сделаем чертеж и найдем условие, при котором точка пересечения единственная.



Анализируем: при $a < 0$ решение единственное всегда; при $a > 0$ решение единственное только в случае касания (в отличие от задачи о нахождении просто общей касательной к двум кривым, здесь не только должна быть общая касательная, но и точки касания должны совпадать!).

Записываем уравнение касательной к обеим кривым в некоторой точке с абсциссой b.

$$y = 1 + \frac{x^2}{a^3};\ \ y' = \frac{2x}{a^3};\ \ y = 1 + \frac{b^2}{a^3} + \frac{2b}{a^3}(x - b);\ \ y = \frac{2b}{a^3}x - \frac{b^2}{a^3} + 1.$$

$$y = 4\sqrt{x};\ \ y' = \frac{2}{\sqrt{x}};\ \ y = 4\sqrt{b} + \frac{2}{\sqrt{b}}(x - b);\ \ y = \frac{2}{\sqrt{b}}x + 2\sqrt{b}.$$

Условие совпадения касательных:

$$\begin{cases} \dfrac{2b}{a^3} = \dfrac{2}{\sqrt{b}}, \\ -\dfrac{b^2}{a^3} + 1 = 2\sqrt{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\sqrt{b} = a^3, \\ b^2 + 2a^3\sqrt{b} = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b}, \\ 3a^4 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow a^3(3a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Замечание. Тот же способ можно применить, предварительно проведя замену $t=\sqrt{x}$; $t \geq 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} y = 1 + \dfrac{t^4}{a^3}, \\ y = 4t. \end{cases}$$

В этом случае одно из уравнений системы задает прямую, и уравнение касательной нужно писать не два раза, а один.

II способ.

Сделаем указанную выше замену переменной:

$$\begin{cases} y = 1 + \dfrac{t^4}{a^3}, \\ y = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^4}{a^3} = 4t - 1, \\ y = 4t. \end{cases}$$ Каждому неотрицательному значению t соответствует ровно одно решение исходной системы (x; y).

Отметим, что $t=\dfrac{1}{4}$ не дает решения системы. Выразим a^3: $a^3 = \dfrac{t^4}{4t-1}$.

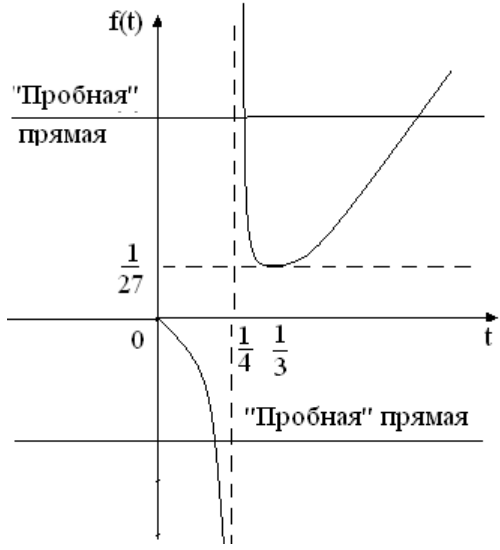
Далее исследуем функцию $f(t) = \dfrac{t^4}{4t-1}$; $t \geq 0$:

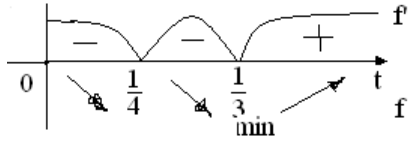
$$D_f = [0;\ 0{,}25) \cup (0{,}25;\ \infty);$$

$$f'(t) = \frac{4t^3(4t-1) - 4t^4}{(4t-1)^2} = \frac{4t^3(3t-1)}{(4t-1)^2};$$

$$D_{f'} = D_f;\ f'(t) = 0;\ t = \frac{1}{3};\ t = 0.\ f(0) = 0;\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81\left(\left(\frac{4}{3}\right) - 1\right)} = \frac{1}{27}.$$

$$\lim_{t \to \frac{1}{4} - 0} f(t) = -\infty;\quad \lim_{t \to \frac{1}{4} + 0} f(t) = +\infty;\quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty.$$





Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 29. (МГТУ, 2004 г.)

При каких значениях параметра a неравенство $\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} \geq a$ верно при всех действительных x?

Решение.

I способ (достаточно аккуратно применить навыки решения задач по математическому анализу).

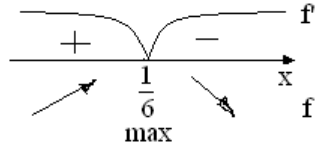
Пусть $f(x) = \dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}$.

D_f: $9x^2 - 3x + 1 \neq 0$; $D = 9 - 4 \cdot 9 < 0$; $D_f = R$.

Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность с момощью производной, найдем пределы на бесконечности и значения в точках экстремума.

Чтобы задача имела решение, нужно, чтобы множество значений $f(x)$ являлось ограниченным снизу. Пусть точная нижняя грань E_f – число a_0. Тогда решением задачи будет промежуток $(-\infty; a_0]$. Найдем E_f:

$$f'(x) = \frac{(12x-2)(9x^2-3x+1)-(18x-3)(6x^2-2x+1)}{(9x^2-3x+1)^2} = \frac{-(6x-1)}{(9x^2-3x+1)^2}.$$



Критические точки: $6x - 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{6}$.

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{10}{9};\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};\ E_f: \left(\frac{2}{3}; \frac{10}{9}\right].$$

Ответ: неравенство верно для всех действительных x при $a \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$.

II способ (рассуждения те же, но для нахождения E_f можно не прибегать к понятию производной: ограничимся элементарными средствами).

$$f(x) = \frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} = \frac{(9x^2-3x+1)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{9x^2-3x+1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9x^2-3x+1}.$$

Рассмотрим

$$g(x) = 9x^2 - 3x + 1 = 9\left(x^2 - x \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) - \frac{9}{36} + 1 = 9\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

(или найдем координату вершины параболы $y = g(x)$).

$$E_g : \left[\frac{3}{4}; \infty\right); \; E_{\frac{1}{g}} : \left(0; \frac{4}{3}\right]; \; E_{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{g}} = \left(0; \frac{4}{9}\right];$$

$$E_f = E_{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{g}} : \left(\frac{2}{3}; \frac{10}{9}\right].$$

Очевидно, что и этот способ решения приводит к уже полученному ответу.

Ответ: неравенство верно для всех действительных x при $a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

III способ (методы 8–9 классов).

Заметим, что знаменатель дроби всегда положителен. Домножим на него обе части неравенства, получив равносильное неравенство, и переформулируем задачу (логический момент!).

$$\frac{6x^2 - 2x + 1}{9x^2 - 3x + 1} \geq a; \; 6x^2 - 2x + 1 \geq a(9x^2 - 3x + 1);$$

$$x^2(9a - 6) + x(2 - 3a) + a - 1 \leq 0.$$

Поставим вопрос: «При каких значениях параметра a выполняется последнее неравенство для всех действительных x?». Определяем тип неравенства: при $a = \frac{2}{3}$ – линейное; при $a \neq \frac{2}{3}$ – квадратичное.

1. $a = \frac{2}{3}$: $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - \frac{1}{3} \leq 0$ – верно.

2. $a \neq \frac{2}{3}$: неравенство квадратичное; графиком функции $h(x) = x^2(9a - 6) + x(2 - 3a) + a - 1$ является парабола. Чтобы вся парабола находилась в нижней полуплоскости (включая, быть может, границу), необходимо и достаточно, чтобы ветви параболы были направлены вниз, т. е. коэффициент при x^2 был отрицательным, а количество корней не превышало 1, т. е. $D \leq 0$.

$$\begin{cases} 9a-6<0, \\ D=(2-3a)^2+4(a-1)(6-9a)\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<\dfrac{2}{3}, \\ (2-3a)(2-3a+12a-12)\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\dfrac{2}{3}<0, \\ \left(a-\dfrac{2}{3}\right)\left(a-\dfrac{10}{9}\right)\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<\dfrac{2}{3}, \\ a\le\dfrac{10}{9}; \end{cases} \quad a<\dfrac{2}{3}.$$

Совокупность первого и второго случаев дает ответ.

Ответ: неравенство верно для всех действительных x при $a\in\left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Внимательный читатель уже обратил внимание на то, что задачи с параметрами, особенно задачи нестандартные, могут допускать более десятка способов решений. Одному больше нравятся способы аналитические, другого больше привлекают задачи, решаемые при помощи графических построений. В заключение авторы предлагают задачу, решенную несколькими способами.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

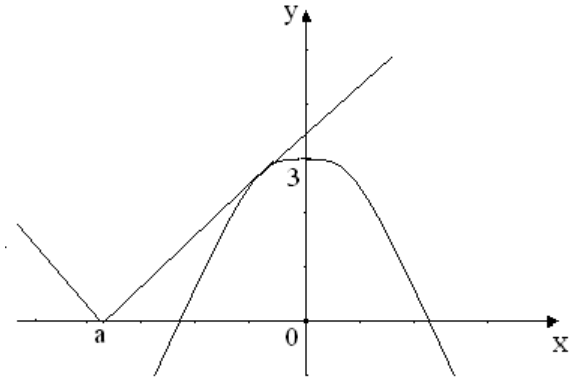
Решение. I способ.

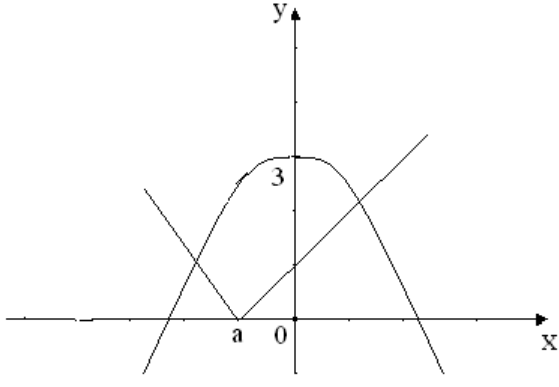
Исходное неравенство преобразуем к виду $3 - x^2 > |x - a|$ (1) и введем функции $f(x) = 3 - x^2$ и $g(x) = |x - a|$. График функции $f(x) = 3 - x^2$ есть парабола с вершиной в точке (0; 3), а графиком функции $g(x) = |x - a|$ являются прямые, образующие между собой прямой угол с вершиной в точке (a; 0) с биссектрисой, параллельной оси ординат.

График функции $g(x)$ может касаться параболы $f(x)$ своей правой ветвью, может пересекать этот график и может, наконец, своей левой ветвью пройти через вершину параболы (0; 3).

В первом случае прямая $y = x - a$ является касательной к параболе. Поскольку угловой коэффициент касательной равен единице, абсцисса точки касания находится из уравнения $-2x_0 = 1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$. Подставляя x_0 и y_0 в равенство $y = x - a$, находим $a = -3{,}25$.

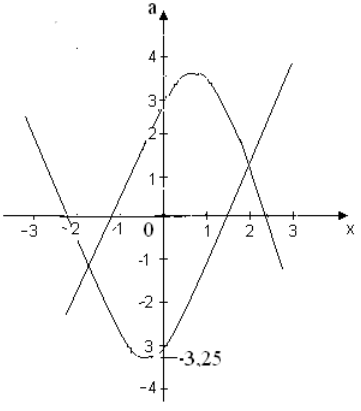
График функции $g(x) = |x - a|$ будет пересекать параболу, если $a > -3{,}25$, и неравенство будет иметь отрицательное решение, если $a < a_0$, где a_0 — ордината точки пересечения прямой $y = -x + a$, проходящей через точку (0; 3), с осью Оу. Очевидно, что $a_0 = 3$. Итак, исходное неравенство будет иметь хотя бы одно отрицательное решение при $-3{,}25 < a < 3$.


y
3
a
0
x


y
3
a
0
x

II способ. Исходное неравенство равносильно неравенству $|x - a| < 3 - x^2$, откуда $x^2 - 3 < x - a < 3 - x^2$,
$x^2 + x - 3 < a < -x^2 + x + 3$.

В системе координат (xOa) строим графики парабол $a = x^2 + x - 3$ и $a = -x^2 + x + 3$.



Из рисунка видно, что данное неравенство будет иметь хотя бы одно отрицательное решение при $-3{,}25 < a < 3$.

III способ. Неравенство $|x - a| < 3 - x^2$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x^2 - x + a - 3 < 0, \\ x^2 + x - a - 3 < 0. \end{cases}$ Очевидно, что система имеет решения при существовании корней трехчленов, стоящих в левых частях неравенств. Для этого дискриминанты трехчленов должны быть положительны: $\begin{cases} 13 - 4a > 0, \\ 13 + 4a > 0. \end{cases}$ откуда $-3{,}25 < a < 3{,}25$.

Далее меньший корень трехчлена $x^2 - x + a - 3$ должен быть меньше нуля (этот корень меньше большего корня трехчлена $x^2 + x - a - 3$, в чем не трудно убедиться: $\frac{1-\sqrt{13-4a}}{2} < \frac{-1+\sqrt{13-4a}}{2}$;

$2 < \sqrt{13-4a} + \sqrt{13+4a}$; $4 < 26 + 2\sqrt{169-16a^2}$, что очевидно при $-3{,}25 < a < 3{,}25$).

Так как сумма корней трехчлена $x^2 - x + a - 3$ равна единице, то $a - 3 < 0$, $a < 3$ и с учетом того, что $-3{,}25 < a < 3{,}25$, получаем результат.

Ответ: $a \in (-3{,}25;\ 3)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами : справочное пособие по математике. – Мн. : Асар, 1996. – 464 с.
2. Андреева Е. Г. Математика : сборник задач для поступающих в вузы. – М. : Ориентир, 2004. – 270 с.
3. Вступительные экзамены в вузы / Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; под ред Е. А. Григорьева // Математика в школе. – № 1. – 2006. – С. 37–75.
4. Голубев В., Мосевич К. Школа решения нестандартных задач: Семейства функций в задачах с параметрами // Математика. Прилож. к газете «Первое сентября». – 2006. – № 4. – С. 26–30.
5. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – 3-е. изд., дополненное и переработанное. – М. : Илекса ; Харьков : Гимназия, 1998. – 336 с.
6. Единый государственный экзамен: Математика 2004–2005 : контрольные измерительные материалы / Л. О. Денищева, Г. К. Безрукова, Е. М. Бойченко и др. – М. : Просвещение, 2005. – 80 с.
7. Единый государственный экзамен: Математика : тренировочные задания / Т. А. Корешкова, В. В. Мирошин, Н. В. Шевелева. – М. : Просвещение ; Эксмо, 2005. – 80 с.
8. Лаппо Л. Д., Попов М. А. Математика. Типовые тестовые задания : учебно-практическое пособие. – М. : Экзамен, 2004. – 48 с.
9. Родионов Е. М., Филимонов Л. А. Уравнения, неравенства. Параметры. Тригонометрия. Логарифмы. – М. : Ориентир, 2004. – 512 с.
10. Руруркин А. Н. Единый государственный экзамен. Математика. Подробный разбор заданий вариантов за 2002–2004 : пособие для подготовки. – М. : «ВАКО», 2004. – 304 с.
11. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Готовимся к экзаменам по математике : материалы для подготовки к выпускным экзаменам. – М. : Илекса ; Ставрополь : Сервисшкола, 2003. – 144 с.
12. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Тригонометрические уравнения и неравенства и методика их решения : учебное пособие. – М. : Илекса ; Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2004. – 128 с.
13. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения : учебно-методическое пособие. – М. : Илекса ; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2005. – 112 с. – (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики».)
14. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства : учебно-методическое пособие. – М. : Илекса ; Народное образование; Ставрополь : Сервисшкола, 2006. – 184 с. – (Серия «Изучение сложных тем школьного курса математики»).