Л.И. СЕРБИНА

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

2018

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Л.И. Сербина

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ДИЗАЙН-СТУДИЯ Б

СТАВРОПОЛЬ • 2018

УДК 514.742.2:51.71(075.8)
ББК 22.1я73
С 32

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт».

Рецензенты: Бондарь В.В., кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики («Институт математики и естественных наук» СКФУ);
Тоискин В.С., кандидат т.н., профессор, заведующий кафедрой математики и информатики (СГПИ).

Сербина, Л.И.

Векторная алгебра в примерах и задачах : учебное пособие для студентов педагогического вуза / Л.И. Сербина. — Ставрополь : Изд-во СГПИ ; Дизайн-студия Б, 2018. — 96 с.

SBN 978-5-6042147-5-6

В профессионально ориентированном учебном пособии изложены основы векторной алгебры и некоторые ее применения к решению задач геометрии. В каждом параграфе приводятся в достаточно краткой форме, но с необходимыми обоснованиями основные теоретические сведения векторной алгебры, сопровождающиеся большим количеством задач, приводимых с решениями и для самостоятельной работы. В конце каждой главы помещены задачи повышенной трудности и прикладного характера. Приведены для оценки качества знаний варианты тестовых заданий и проверочной контрольной работы.

УДК 514.742.2:51.71(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-6042147-5-6

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по разделу векторной алгебры в курсе изучения аналитической геометрии в Ставропольском Государственном педагогическом институте. Оно соответствует программе курса “Геометрия” подготовки 44. 03. 05. Педагогическое образование (с двумя профилями) профиль «Математика» и профиль «Информатика».

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения векторной алгебры в форме, позволяющей обучающимся применять их при решении задач. Теоретический материал иллюстрируется решением большого количества примеров. Типовые задачи даются с подробными решениями.

В первой главе вводятся основные понятия, связанные с определением геометрического вектора, рассматриваются различные его виды, отношения между ними и линейные операции над векторами. Дается понятие проекции вектора на ось и ее основные свойства. Во 2-й главе, на основе рассмотренных фундаментальных понятий о линейной зависимости векторов и разложения вектора по базису, вводится координатное представление вектора на плоскости и в пространстве. Формулируются правила выполнения линейных операций над векторами в координатной форме. Приведены формулы для нахождения модуля и направляющих косинусов вектора. В последующих главах рассматриваются нелинейные операции над векторами: скалярное, векторное, смешанное произведение векторов и некоторые их применения к решению задач геометрии.

В данном пособии, в отличие от большинства имеющихся учебных пособий, где основной акцент сделан на изучение формальных операций над векторами, основным является развитие у обучающихся практических навыков на основе решения содержательных задач геометрии. В каждом параграфе приведены необходимые теоретические сведения векторной алгебры и последовательно рассмотрены методы их применения к решению задач геометрического содержания. В нем подробно рассматриваются, в порядке возрастания их сложности, решение типовых задач. Приведен перечень задач для самостоятельного решения, выполнения индивидуальных типовых заданий. Приведены примерные варианты проведения аудиторных контрольных работ.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов педагогического вуза. В силу того, содержание первой и третьей глав соответствует программе материала математики средней школе, оно может быть также использовано и учителями средних общеобразовательных заведений при изучении геометрии в старших классах.

Глава 1. ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1 Скалярные и векторные величины

Величины, с которыми приходится оперировать при изучении различных разделов естествознания и в прикладных науках, разделяются на два вида. Одни из них полностью характеризуются своим численным значением, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице его измерения, называются ***скалярными величинами (или скалярами).*** Примерами скалярных величин, например, являются: длина, площадь, масса, объем, работа, температура и др. Простейшим скаляром является отвлеченное число.

Наряду со скалярными величинами существуют еще и другая категория величин, для полной характеристики которых недостаточно задания одних только числовых значений. Например, для перемещения точки нужно знать не только длину, но и направление перемещения. Для характеристики действия силы мало знать ее величину, необходимо знать направление, в котором она действует. Такие величины, например, как перемещение, сила, скорость, ускорение, напряженность электрического поля, требующие для своего задания не только указания числового значения, но и еще направления в пространстве, называются ***векторными величинами.***

Векторная величина является математическим понятием, которое применятся в физике и в других прикладных науках, позволяющее упростить решение весьма сложных задач. Для наглядного изображения векторная величина представляется геометрически с помощью вектора, то есть прямолинейных отрезков, имеющих не только определенную длину, но и определенное направление. Такой тип векторных величин, широко используемых в классической физике, является простейшим и его принято называть «геометрический вектор».

1.2 Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину, т.е. вектор представляет собой геометрический объект, характеризуемый длиной, направлением и точкой приложения.

Обозначается вектор одной буквой $\vec{a}$ или двумя буквами $\overrightarrow{AB}$, где А – начало вектора, В – конец вектора. Началом вектора называется точка его приложения.

Рисунок 1.

Длиной вектора, которая называется еще иначе ***модулем*** или ***абсолютной величиной***, или ***скаляром вектора*** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, называется длина отрезка, изображающего данный вектор, и обозначается символом: $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым вектором***. Длина нулевого вектора равна нулю, обозначается символом: $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ***ортом вектора*** и обозначается: $\overrightarrow{a^o}$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарность векторов обозначается символом: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Условием коллинеарности является равенство:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}, \text{ где } \lambda \text{ – скаляр.}$$

Коллинеарные векторы могут быть одинаково направленными (сонаправленными) или противоположно направленными.

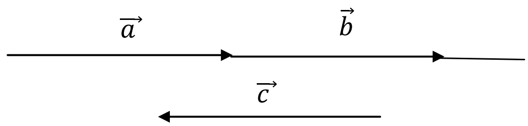


Рисунок 2.

Вектор $\overrightarrow{BA}$, у которого начало в точке B, а конец в точке A называется ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. Вектор противоположный вектору $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ обозначается: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{a}$

Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\vec{b}$ считаются ***равными*** если они удовлетворяют следующим трем условиям: 1) векторы имеют одинаковую длину; 2) векторы коллинеарны; 3) векторы имеют одинаковое направление т.е. векторы сонаправлены.

Если два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равны, то пишут: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$

Замечание. Из определения равенства векторов следует, что равные векторы получаются один из другого параллельным переносом в пространстве. Иными словами, вектор можно параллельно переносить, помещая его начало в любую точку пространства, в частности плоскости.

Этим свойством можно при необходимости воспользоваться, чтобы отнести векторы к общему началу т.е. переместить их, не меняя направления так, чтобы совпали начала всех рассматриваемых векторов.

Векторы, которые можно переносить параллельно его первоначальному положению, т.е. их перемещение в пространстве никак не ограничено, называются ***свободными векторами.***

В дальнейшем, без ограничения общности, будем отождествлять понятие вектора как параллельный перенос (на плоскости или в пространстве) с любым изображающим его направляющим его отрезком.

Так, например, в прямоугольнике (рис. 3), сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$,

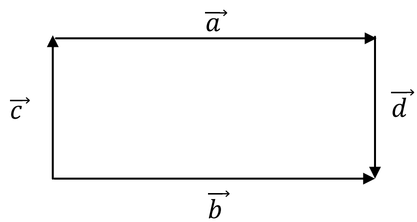


Рисунок 3.

можно отметить справедливость равенства $\vec{a} = \vec{b}$, но при этом векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не равны: $\vec{c} = -\vec{d}$ и $\vec{c} \,||\, \vec{d}$, $\vec{a} \,||\, \vec{b}$.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными,*** если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Замечание. Если среди трех векторов есть хотя бы один нулевой или два любых из них коллинеарны, то такие векторы компланарны.

1.3 Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции: сложения, вычитания и умножения на число (скаляр).

Сумма векторов

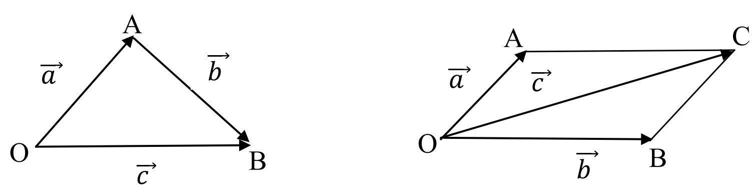
При определении сложения векторов полезно знать некоторые конкретные задачи, связанные с этим действием. Необходимость сложения векторов может, например, возникнуть в связи с нахождением такого одного перемещения точки, которым можно было бы заменить два данных перемещения или при отыскании равнодействующей двух данных сил, действующих на данную точку. Отсюда вытекает для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правило треугольника».

Сложение векторов по правилу треугольников

Возьмем на плоскости произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, а в конце этого вектора построим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$, соединяющий начало первого с концом второго вектора называется вектором ***суммы*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что можно записать как:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \text{ или } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Наряду с правилом треугольников часто пользуются равносильным ему «правилом параллелограмма», которое легко получается, если дополнить треугольник до параллелограмма.



а) правило треугольника б) правило параллелограмма

Рисунок 4.

Сложение векторов по правилу параллелограмма

Приведем два вектора путем параллельного переноса к общему началу, т.е. построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и вектор $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Затем, построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Тогда, большая диагональ OC этого построенного параллелограмма будет являться суммой двух данных двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В случае большего числа слагаемых, обобщая правило треугольников, можно сформулировать следующее, так называемое правило «многоугольник»: для того, чтобы построить сумму любого числа векторов, надо из любой точки построить вектор равный первому слагаемому, из конца первого слагаемого построить второе слагаемое, из конца второго третье и так далее. Вектор соединяющий начало первого с концом последнего, и будет вектором суммы всех векторов т.е. суммой всех данных векторов служит замыкающий вектор той ломанной линии, звеньями которой являются данные слагаемые.

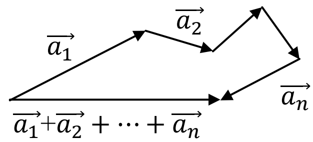


Рисунок 5.

Если при этом окажется, что конец последнего слагаемого совпадет с началом первого, то это будет означать, вектор суммы имеет длину равную нулю. Такой вектор называю нуль вектором. В частности, нулю равна сумма двух векторов, имеющих одинаковую длину, но противоположные направления.

Сложение векторов подчиняется основным законам сложения чисел:

1. переместительному закону: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2. сочетательному закону: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

4. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}$.

Разность векторов

Вычитание векторов вводится как действие, обратное сложению. Действительно, на основании суммы двух векторов имеем соотношение: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$, откуда находим, что вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Разность $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда существует и единственна т.е. каковы бы ни были векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, всегда существует третий вектор $\vec{c}$, такой что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Правило построения вектора разности

Для построения вектора разности $\vec{a} - \vec{b}$, необходимо векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, путем параллельного переноса привести к общему началу. Тогда вектор, соединяющий конец вектора-вычитаемого $\vec{b}$ с концом вектора-уменьшаемого $\vec{a}$, и будет вектором разности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

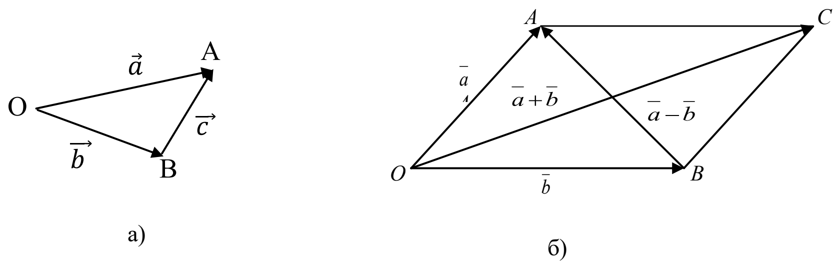


Рисунок 6.

Пользуясь понятием равно-противоположных векторов, имеем:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) \text{ или } \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Таким образом, построение разности векторов равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора обратного «вычитаемому» т.е. для того, чтобы вычесть вектор, достаточно прибавить равно-противоположный его вектор.

Отметим, что в параллелограмме, построенном на двух векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 6) одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая их разностью $\vec{a} - \vec{b}$.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\vec{b}$ равный $\lambda\vec{a}$, если:

1) длина его равна $|\lambda||\vec{a}|$;
2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;
3) вектор $\vec{b}$ направлен как вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположен ему, если $\lambda<0$.

Из определения произведения вектора на число следуют следующие свойства:

Теорема 1. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Из определения следует, что если при некотором значении λ, имеет место равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. Верно и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$, то при некотором значении λ верно равенство: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Теорема 2. Любой вектор $\vec{a}$ равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления т.е. на его орт $\overrightarrow{a^o}$:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\overrightarrow{a^\circ}.$$

Умножение вектора на скаляр подчиняется законам умножения чисел:

1. переместительному закону: $\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$;
2. сочетательному закону: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;
3. распределительному закону: $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
4. $0\vec{a} = \vec{0}$.

Замечание. Все указанные свойства линейных операций над векторами дают возможность при выполнении линейных действий с векторами осуществлять преобразования аналогично тому, как это делается в обычной алгебре: менять слагаемые местами; вводить и раскрывать скобки; группировать и выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

1.4 Проекция вектора на ось

Осью l называется прямая, на которой выбрано положительное направление и единица длины (масштаб).

Проекцией точки M на данную ось l является основание M_l перпендикуляра MM_l, опущенного изданной точки M на данную ось l.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси l (рис. 7а). Если точка M лежит на оси l, то её проекция на ось l совпадает с точкой M (рис. 7б).

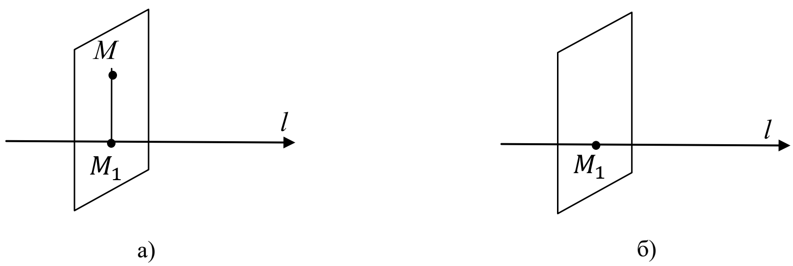


Рисунок 7.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор, а точки A_1 и B_1 – проекции на ось l начала A и конца B данного вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 8).

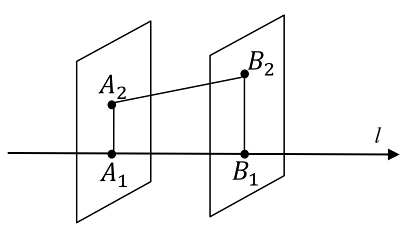


Рисунок 8.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется длина вектора A_1B_1, заключенного между проекциями начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$, причем длина эта берется с положительным знаком, когда вектор A_1B_1 имеет направление орта оси l и с отрицательным знаком, когда вектор A_1B_1 ось l противоположно направлены.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось есть скаляр, который обозначается символом:

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = \pm|\overrightarrow{AB}|.$$

Углом между вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ или равного ему вектора A_1B_1 называется угол φ , на который нужно повернуть кратчайшим образом полуось A_1l до совмещения ее с вектором A_1B_1. (рис. 9).

Отметим, что угол φ принимает значения в интервале: $\mathbf{0 \leq \varphi \leq \pi}$.

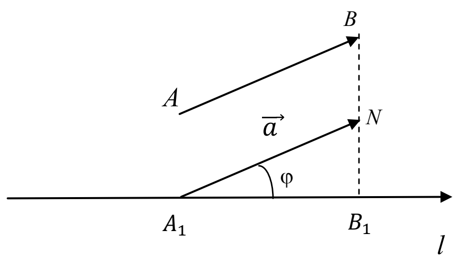


Рисунок 9.

Имеют место следующие основные теоремы о проекциях векторов.

Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ между вектором и осью т.е.

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot cos\varphi$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый угол (тупой угол), и равна нулю, если угол прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну ось равны между собой.

Теорема 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну ось равна сумме их проекций на эту ось.

Например, если $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то тогда проекция $\vec{d}$ на ось l равна:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\vec{d} = \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b} + \text{пр}_l\vec{c}$$

Теорема 3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ, его проекция на ось тоже умножается на это число λ:

$$\text{пр}_l \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}$$

Из свойств проекций вектора на ось следует, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов на произвольную ось.

Пример 1.1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы для них было справедливо соотношение:

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|.$$

Решение. Приведем путем параллельного переноса векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O и построим на них как на сторонах параллелограмм (рис. 6б).

Тогда, в соответствии с правилом суммы векторов, значение модуля суммы этих двух векторов $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ представляет собой длину диагонали OC этого параллелограмма, а модуль их разности $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ – длину диагонали AB. Из элементарной геометрии известно, что диагонали параллелограмма равны только тогда, когда параллелограмм есть прямоугольник.

Следовательно, необходимым и достаточным условием выполнения равенства $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$является перпендикулярность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 1.2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$.

Решение. Приведем данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу (рис. 10).

1. Построим вектор $2\vec{a}$, затем вектор $-\vec{b}$. Строим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Тогда искомый вектор: $2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ есть вектор суммы построенных векторов, т.е. представляет собой диагональ построенного параллелограмма.

2. Искомый вектор $\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}=\vec{b}+(-\frac{\vec{a}}{2})$ построим как вектор суммы двух векторов: вектора $\vec{b}$ и вектора $-\frac{1}{2}\vec{a}$, длина которого в два раза меньше длины вектора $\vec{a}$ и имеет направление противоположное с ним.

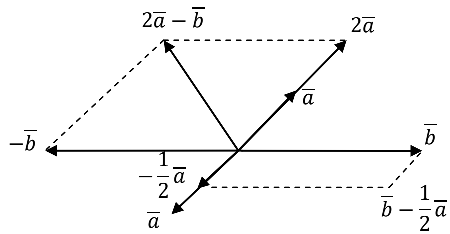


Рисунок 10.

Пример 1.3. В треугольнике *OAB* даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где *M* – середина стороны *AB*.

Решение. Вектор $\overline{AB}$, соединяющий концы двух данных по условию векторов $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, согласно определению разности, представим в виде

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Вектор $\overrightarrow{MB}$ расположен на той же прямой, что и $\overrightarrow{AB}$, направлен в ту же сторону, но длина его в два раза меньше, поэтому

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right).$$

Вектор $\overrightarrow{MA}$, также расположен на той же прямой, что и $\overrightarrow{AB}$, имеет ту же длину, что и $\overrightarrow{MB}$, но направлен в противоположную сторону. Следовательно,

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right).$$

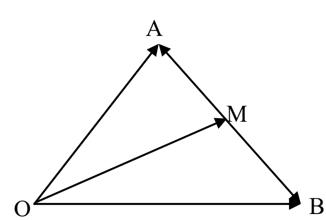


Рисунок 11.

Пример 1.4. В треугольнике *ABC* прямая *AM* является биссектрисой угла *BAC*, причем точка *M* лежит на стороне *BC*. Найти $\overrightarrow{AM}$, если $\overrightarrow{AB} = \vec{b},\ \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $|BM|{:}\,|BC| = \vec{b} : \vec{c},$ т.е. $|BM|{:}\,|BC| = \vec{b} : (\vec{b} - \vec{c})$. Отсюда получаем $\overrightarrow{BM} = \frac{\vec{b}}{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{b} - \vec{c})$. Так как $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, то

$$\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{\vec{b}}{\vec{b} + \vec{c}}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}}{\vec{b} + \vec{c}}.$$

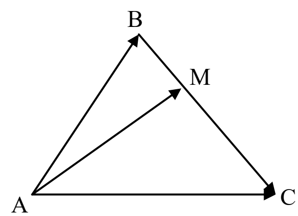


Рисунок 12.

Пример 1.5. В треугольной пирамиде *SABC* (рис. 13) даны векторы: $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SM}$, где точка *M* – центр тяжести основания ABC.

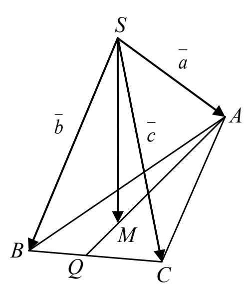


Рисунок 13.

Решение. Искомый вектор $\overrightarrow{SM}$ можно найти из треугольника *SAM*, если будет известен вектор $\overrightarrow{AM}$. Как известно, центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медианы, следовательно, точка *M* делит медиану *AQ* в соотношении 2:1. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Из треугольника *ABQ,* так как *Q* есть середина стороны *BC,* находим:

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

С другой стороны

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = \vec{c} - \vec{b}\ .$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\left[\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)\right] = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Следовательно

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Пример 1.6. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$, и $\vec{c}$ - единичные векторы, составляющие с данной осью *l*, соответственно, углы $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π. Найти проекцию на ось *l* вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

Решение. Согласно свойствам проекций имеем, что:

$$np_l\left(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}\right) = 3np_l\vec{a} + 2np_l\vec{b} + np_l\vec{c}.$$

Зная, что проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью т.е. $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, а также учитывая условие задачи, находим:

$$np_l\vec{a} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad np_l\vec{b} = -\frac{1}{2}, \quad np_l\vec{c} = -1,$$

Тогда искомая величина проекции

$$np_l\left(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}\right) = 3\cdot\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC проведены медианы $[AD], [BE]$ и $[CF]$. Доказать, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{BD} = b$, Выразить через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M есть точка пересечения диагоналей параллелограмма.
3. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы:

   $$1)\ \vec{b} - \vec{a};\quad 2)\ -\vec{a} - \vec{b};\quad 3)\ 2\vec{a};\quad 4)\ -\frac{\vec{b}}{3};\quad 5)\ 2\vec{a} + 3\vec{b};\quad 6)\ \frac{\vec{a}}{2} - 2\vec{b}.$$
4. В треугольнике ABC сторона $[AB]$ разделена точками D и E на три конгруэнтных отрезка: $|AD| = |DE| = |EB|$. Найти векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$, если $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$.
5. В параллелограмме $ABCD$ даны стороны $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$. Выразить через $\overrightarrow{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$, и $\overrightarrow{DB}$.
6. Векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через $\overrightarrow{a}, \vec{b}, \overrightarrow{c}$ векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$, совпадающие с медианами треугольника ABC.
7. В треугольной пирамиде SABC известны векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка O является центром масс треугольника ABC.
8. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$ с началом в середине E ребра $\overrightarrow{OA}$ и концом в точке F пересечения медиан треугольника ABC.
9. Найти проекции вектора на оси координат, если вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, где $A\ (0; 0; -3)$, $B\ (4; -1; 2)$, $C\ (-3; 2; -4)$, $D\ (-5; 4; 1)$.
10. Даны векторы $\vec{a}\{1, -1, 2\}$ и $\vec{b}\{2, -2, 1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.
11. Даны точки $A(-2; 3; -4); B(3; 2; 5); C(1; -1; 2); D(3; 2; -4)$. Найдите $\text{пр.}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Глава 2. БАЗИС ПРОСТРАНСТВА И РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

2.1 Понятие линейной зависимости векторов

Вектор $\vec{a}$, представленный в виде суммы произведений векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_{3_1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$. на произвольные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. т. е. соотношения вида

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$$

называется ***линейной комбинацией*** этих векторов.

Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде линейной комбинации некоторых векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_{3_1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, то говорят также, что вектор $\vec{a}$ ***разложен по векторам*** $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_{3_1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$.

Множество векторов называется ***векторным пространством***, если линейная комбинация любых векторов множества также является вектором этого множества. Например, векторными пространствами, в частности, являются множество коллинеарных векторов и множество компланарных векторов.

Векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_{3_1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$. называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все одновременно равные нулю, что выполняется равенство:

$$\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = 0$$

Если же это равенство выполняется только при всех значениях α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ равных нулю, то векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_{3_1}}, \dots, \overrightarrow{e_\mathrm{n}}$ называются ***линейно независимыми***.

Сформулируем следующие три, удобные для применения на практике, ***свойства линейно зависимых векторов***.

1. Если несколько векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Справедливо и обратное утверждение: если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ представлен в виде линейной комбинации остальных векторов, то все эти векторы линейно зависимы.

2. Если некоторые из векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ линейно зависимы, то и вся эта система векторов линейно зависима.

3. Если среди векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ имеется хотя бы один нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

Наибольшее число линейно независимых векторов пространства называется ***размерностью*** этого пространства.

Так, например, на плоскости существуют два линейно независимых вектора, но любые три являются линейно зависимы. Поэтому плоскость является двумерным пространством. В пространстве существуют три линейно независимых вектора, а любые четыре линейно зависимы. Поэтому размерность пространства равна трем.

2.2 Линейная зависимость векторов на плоскости

Теорема 1. Для того, чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Доказательство.

Необходимость. Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Требуется доказать, что они коллинеарны. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то существуют такие числа λ и μ, не равные одновременно нулю, что имеет место соотношение:

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0.$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда находим, что

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}.$$

Откуда, полагая $k = -\frac{\mu}{\lambda}$, имеем: $\vec{a} = k\vec{b}$. Откуда и следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Докажем, что они линейно зависимы.

Если $\vec{a} = 0$, то имеет место равенство: $1\vec{a} + 0\vec{b} = 0$, а это и означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Если $\vec{a} \neq 0$, то полагаем $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$. Тогда имеем: $-\frac{\mu}{\lambda}\vec{b} + \vec{b} = 0$, а это означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Таким образом, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два коллинеарных вектора, то всегда можно найти такой скаляр λ, который будучи умножен на вектор $\vec{a}$ дает вектор $\vec{b}$, т.е. справедливо следующее соотношение

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}. \qquad (*)$$

Число λ в линейном представлении (*), очевидно, можно назвать отношением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \lambda,$$

Следствие 1. Необходимое и достаточное условие для коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которое выражается равенством (*) может быть представлено в более общем виде, т.е. в виде связывающей их линейной зависимости:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0,$$

Следствие 2. На плоскости любой вектор $\vec{c}$ может быть представлен в виде линейной комбинации двух линейно независимых векторов т.е.:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},$$

где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ любые два неколлинеарных (не параллельных) вектора.

Теорема 2. Для того, чтобы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Доказательство.

Необходимость. Пусть три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы. Докажем их компланарность. По определению линейной зависимости найдутся действительные числа α, β, γ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и что справедливо соотношение: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$.

Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда имеет место соотношение: $\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\alpha}{\gamma}\vec{b}$. Обозначим: $\lambda = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\gamma}, \mu = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\gamma}$, тогда получим: $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Несложно заметить, что если три вектора приведены к общему началу O, то тогда, вектор $\vec{c}$, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}$. Но это и означает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Докажем, что они линейно зависимы.

Если какие-либо два, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$, из указанных векторов коллинеарны, то тогда эти два вектора по теореме 1, линейно зависимы. Так как часть тройки векторов линейно зависима, то все три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ также линейно зависимы.

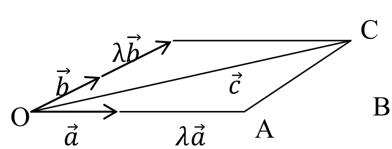


Рисунок 14.

Рассмотрим теперь случай, когда в тройке векторов ни одна пара векторов не коллинеарна. Перенесем три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в одну плоскость, а затем приведем их в ней к общему началу O. Проведем через конец вектора $\vec{c}$ прямые параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим через A точку пересечения прямой параллельной $\vec{b}$ с прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$, а через точку B – точку пересечения прямой параллельной $\vec{a}$ с прямой, на которой лежит вектор $\vec{b}$.

Тогда, очевидно (рис. 14), что вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. При этом, вектор $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{OB} = \mu\vec{a}$.

Поэтому имеет место равенство: $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, которое можно записать в виде: $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = 0$, из которого следует, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

Следствие 1. Всякие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, лежащие в одной плоскости (т.е. компланарные) линейно зависимы.

При этом необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, лежащих на одной плоскости является существование между ними линейной зависимости т. е. векторы связаны соотношением:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0,$$

где коэффициенты α, β, γ – одновременно не равные нулю числа.

Следствие 2. Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они также линейно зависимы.

Следствие 3. Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

2.3 Линейная зависимость векторов в пространстве

Теорема 3. Всякие четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в векторном пространстве зависимы.

Доказательство. В том случае, когда какая-либо тройка векторов из данных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ компланарна, то есть является линейно зависимой, следует, что и все четыре вектора линейно зависимы.

Рассмотрим случай, когда среди четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ни какая тройка векторов не компланарна.

Приведем все векторы к общему началу *O* (рис. 15). Проведем через конец D вектора $\vec{d}$ плоскости, которые параллельны плоскостям, определяемых парами векторов: $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}$ и $\vec{a}\vec{b}$.

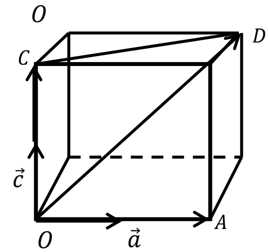


Рисунок 15.

Очевидно, что для вектора $\vec{d}$, как диагонали параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место соотношение:
$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Тогда в силу того, что:

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a},\quad \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{b},\quad \overrightarrow{OC} = \lambda\vec{c}$$

вектор $\vec{d}$ можно записать в следующем виде:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \text{ или } \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + (-1)\vec{d} = 0,$$

из которого и следует, что векторы линейно зависимы.

Следствие 1. Если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они линейно зависимы.

Следствие 2. Для того, чтобы три вектора $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимы необходимо и достаточно, чтобы они не были компланарными.

Следствие 3. Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

2.4 Базис и координаты вектора

Базисом любого векторного пространства называется всякая совокупность линейно независимых векторов, через которые линейно выражается любой вектор пространства называется.

Векторы, составляющие базис пространства называются ***базисными***.

Из определения базиса и теорем о линейной зависимости векторов, справедливы следующие утверждения.

Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, лежащих в этой плоскости.

Теорема 1. Всякий вектор $\vec{a}$ компланарныйс двумя неколлинеарными векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ плоскости может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации двух линейно независимых векторов т.е. может единственным образом разложен по этим векторам.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ любой вектор плоскости, а неколлинеарные векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ образующие базис. Так как на плоскости всякие три вектора линейно зависимы, то тогда произвольный вектор $\vec{a}$ плоскости можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации двух векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$$

Линейное представление вектора называется *разложением вектора по базису*, образованному векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Числа x, yв разложении называют координатами вектора $\vec{a}$ на плоскости.

Замечание. Очевидно, что на прямой L любой вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1},$$

где $\overrightarrow{e_1}$ – произвольный отличный от нуля вектор этой прямой.

Базисом в пространстве называется любая упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Теорема 2. Всякий вектор $\vec{a}$ пространства может быть однозначно разложен по трем некомпланарным векторам $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ т.е. единственным образом может быть представлен в виде следующей линейной комбинации трех линейно независимых векторам $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}$ любой вектор пространства, а три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, образующие базис пространства. В силу того, что четыре вектора всегда линейно зависимы (теорема 3, п. 2.3), то тогда любой вектор $\overrightarrow{a}$ можно представить в виде линейной комбинации трех линейно независимых векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ т.е.

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3},$$

где числа *x, y, z* называются ***координатами вектора*** $\overrightarrow{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Доказательство единственности разложения по данному базису проведем методом от противного. Допустим, что существуют два таких разложения

$$d_1 = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3} \quad \text{и} \quad d_2 = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}\,.$$

Тогда, вычитая почленно эти два соотношения получим:

$$(x_1 - x_2)\overrightarrow{e_1} + (y_1 - y_2)\overrightarrow{e_2} + (z_1 - z_2)\overrightarrow{e_3} = 0.$$

В силу линейной независимости базисных векторов $\overrightarrow{e_1}$,$\overrightarrow{e_2}$,$\overrightarrow{e_3}$ следует, что:

$$x_1 - x_2 = 0, \quad y_1 - y_2 = 0, \quad z_1 - z_2 = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что : $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ т.е. коэффициенты совпадают. Таким образом, единственность разложения доказана.

Вывод. Если в трехмерном пространстве фиксирован некоторый базис, то каждому вектору однозначно сопоставляется тройка чисел, называемых его координатами в этом базисе.

И, наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел пространства однозначно сопоставляется вектор, имеющий эту тройку чисел своими координатами.

Основное назначение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами, которые называются координатами вектора в данном базисе.

Базис, состоящий из трех упорядоченных линейно независимых единичных векторов**,** называется ***аффинным базисом***.

Базис трёхмерного пространства, состоящий из трех попарно ортогональных (перпендикулярных) единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.называется ***ортонормированным,*** а составляющие его единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются ортами.

Если в трехмерном пространстве зафиксированы точка O и *ортонормированный базис* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,то говорят, что в пространстве задана декартовая прямоугольная система координат.

2.5 Декартовые прямоугольные координаты вектора

Декартовая прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием единицы масштаба для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке O, принятой *за начало координат*, взаимно пересекающихся перпендикулярных осей, первая из которых называется осью абсцисс (Ox), вторая – осью ординат (Oy), а третья осью аппликат (Oz), на каждой из которых выбрано положительное направление (рис. 16).

Положение координатных осей прямоугольной системы координат полностью определяется заданием базисных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, *направленных соответственно* по координатным осям.

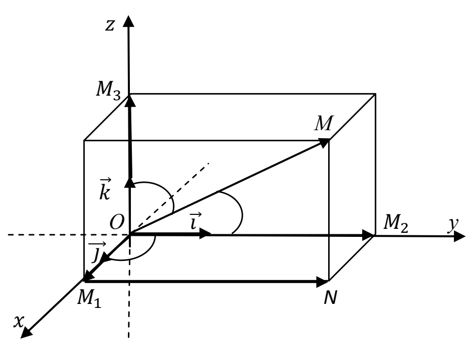


Рисунок 16.

Различают *правую и левую систему координат*. Система координат называется *правой*, если кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy, виден с положительного направления оси Oz совершающимся против хода часовой стрелки, и *левой*, если по часовой. На рисунке 16 приведена правая система координат, которой мы в дальнейшем и будем пользоваться.

Пусть в пространстве дана некоторая точка M. Проектируя ее на ось Ox получим точку M_1. Абсциссой x точки M называется длина вектора $\overrightarrow{OM_1}$, взятой со знаком плюс, если направление этого вектора совпадает с направлением орта $\vec{i}$, и со знаком минус в противоположном.

Аналогично проектируя точку M на координатные оси Oy, Oz определим ее ординату y и аппликату z. Тройка чисел x, y, z взаимно однозначно соответствующая точке M, называется ее координатами.

Положение точки M в пространстве может быть определено одним вектором $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, который называется ***радиусом вектором*** этой точки.

Теорема. Любой вектор $\vec{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат может быть разложен по трем некомпланарным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ т. е. представим в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Коэффициенты a_x, a_y, a_z в разложении вектора $\vec{a}$ по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ общей декартовой системы координат в пространстве являются координатами вектора.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ произвольный вектор в пространстве с началом в очке O. Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Для этого проведем через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями координат Ox, Oy, Oz обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. В результате получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда,

$$\text{пр}_{O_x}\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|, \qquad \text{пр}_{O_y}\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|, \qquad \text{пр}_{O_z}\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|.$$

Согласно правилу суммы нескольких векторов находим, что вектор

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{MN},$$

а так как $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, а $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM_3}$, то тогда:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

где $\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{\imath}$, $\quad \overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{\jmath}$, $\quad \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}$.

Обозначим проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси O_x, O_y, O_z соответственно через $a_x,\ a_y,\ a_z$, то есть: $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$.

Тогда в результате получаем векторное равенство:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\overrightarrow{k} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$$

где коэффициенты a_x, a_y, a_z называются декартовыми ***прямоугольными координатами*** вектора $\vec{a}$.

Полученная формула является основной формулой в векторном исчислении, и называется «разложением вектора по ортам координатных осей» или разложением вектора по единичному базису $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$. Каждое из слагаемых $a_x\vec{\imath},\ a_y\vec{\jmath},\ a_z\overrightarrow{k}$ называется *составляющей* или *компонентой* вектора $\vec{d}$ (вдоль) по соответствующей оси координат.

Компонента вдоль каждой оси определяется не только направлением этой оси, но и направлением остальных осей. Они служат ребрами параллелепипеда, для которого вектор $\vec{a}$ является диагональю.

Коэффициенты a_x, a_y, a_z разложения равны модулям компонентов, взятых с соответствующим знаком т.е. числа $a_x,\ a_y,\ a_z$ они являются проекциями вектора $\vec{d}$ на соответствующие оси координат.

Следствие. Для любой точки M пространства ее координаты равны координатам её радиуса-вектора:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x,\ y,\ z\} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

2.6 Действия над векторами в координатной форме

В декартовой прямоугольной системе координат каждому вектору, в соответствии с однозначностью разложения вектора по трем некомпланарным ортам $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k}$ соответствует единственная тройка координат a_x, a_y, a_z и, обратно, каждая тройка координат a_x, a_y, a_z определяет в пространстве единственный вектор.

Установленное взаимно однозначное соответствие между векторами и их координатами в фиксированном ортонормированном базисе позволяет связать векторный метод решения задач с методом координат и включить векторы в число тех геометрических объектов, операции над которыми могут заменены алгебраическими действиями в системе координат. При этом действия над векторами, разложенными по декартовым координатным осям, выполняются по очень простым формулам.

Из свойств линейных операций над векторами следует, что при их выполнении они сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, т.е. над координатами векторов. Поэтому справедливы следующие правила выполнения линейных операций над векторами, заданных своими координатами.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}.$$

1. Линейные операции над векторами, заданных своими координатами.

Сумма (разность) векторов. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{\imath} + (a_y \pm b_y)\vec{\jmath} + (a_z \pm b_z)\vec{k}.$$

Произведение вектора на число. При умножении вектора на число (скаляр), соответствующие координаты вектора надо умножить на это число (скаляр):

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{\imath} + \lambda a_y\vec{\jmath} + \lambda a_z\vec{k}, \qquad \text{где } \lambda - \text{скаляр};$$

2. Равенство векторов. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если равны их одноименные проекции:

$$a_x = b_x;\ a_y = b_y\ ;\ a_z = b_z$$

3. Коллинеарность векторов. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то их одноименные проекции пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Теорема. Два вектора являются коллинеарными тогда и только тогда, когда проекции (координаты) векторов пропорциональны.

4. Координаты вектора, соединяющего две точки. Пусть заданы две точки $A(x_1,\ y_1, z_1)$ и $B(x_2,\ y_2, z_2)$ начала и конца произвольного вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Построим радиусы – векторы данных точек. Очевидно, что тогда вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий концы двух радиусов-векторов будет являться вектором их разности т.е. имеем: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. Отсюда в силу линейности проекций получаем формулу:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\,\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}\}= \{(x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1)\}.$$

Итак, *для того, чтобы определить координаты некоторого вектора надо из координат его конца B* $(x_2,\ y_2, z_2)$ *вычесть одноименные координаты его начала A* $(x_1,\ y_1, z_1)$.

5. Модуль вектора. Зная координаты $a_x,\ a_y,\ a_z$ вектора $\vec{a}$ можно найти формулу для определения модуля $|\vec{a}|$ вектора. На основании известной из геометрии теоремы о длине диагонали параллелепипеда можно записать:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2 \text{ или } |\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{a_x}|^2 + \left|\overrightarrow{a_y}\right|^2 + |\overrightarrow{a_z}|^2.$$

Откуда следует, что *длина вектора* вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

т.е. *длина (модуль) вектора* равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

6. Направляющие косинусы вектора. Направляющие косинусы вектора — это числа, равные косинусам углов, которые вектор образует с осями координат.

Пусть вектор $\vec{a}$ образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы α, β и γ. Тогда по свойству проекций вектора на ось имеем:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot cos\alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cdot cos\beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cdot cos\gamma.$$

Откуда находим следующие формулы для определения направляющих косинусов вектора $\vec{a}$:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Следует отметить, что направляющие косинусы вектора полностью определяют его *направление*, но ничего не говорят о его длине.

Подставив в формулу для определения модуля вектора выражения для координат $a_x,\ a_y, a_z$ вектора через направляющие косинусы получим соотношение:

$$cos^2\alpha + + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице.

Замечание. Координатами единичного вектора $\vec{\boldsymbol{e}}$ являются *направляющие косинусы* вектора $\vec{a}$ т.е.

$$\vec{e} = \{cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma\}.$$

Итак, зная координаты вектора можно всегда определить модуль (длину) и направление, иными словами – сам вектор.

Пример 2.1. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ координатам: $\vec{a} = (2; -1; 8)$, $\overrightarrow{e_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{e_2} = (1; -1; -2)$, $\overrightarrow{e_3} = (1; -6; 0)$. Убедиться, что тройка $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ образует базис, и найти координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в этом базисе.

Решение. Если векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ образуют базис, то определитель, составленный из координат данных векторов должен быть отличен от нуля. Действительно, вычисляя, находим, что:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -\ 19 \neq\ 0.$$

Таким образом, тройка $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ образует базис векторного трехмерного пространства.

Обозначим координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ через *x, y, z.* Тогда имеем соотношение:

$$\overrightarrow{a} = (x, y, z) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}.$$

Так как по условию:

$$\overrightarrow{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 8\vec{k}, \quad \overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \quad \overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{e_3} = \vec{\imath} - 6\vec{\jmath},$$

то справедливы следующие векторные соотношения:

$$2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 8\vec{k} = \left(x\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath} + 3x\vec{k}\right) + \left(y\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - 2y\vec{k}\right) + (z\vec{\imath} - 6z\vec{\jmath}) =$$

$$= (x + y + z)\vec{\imath} + (2x - y - 6z)\vec{\jmath} + (3x - 2y)\vec{k}.$$

Отсюда, на основании равенства векторов делаем вывод, что вектор в левой части равен вектору в правой части только в случае равенства их соответствующих координат. Следовательно, для нахождения неизвестных *x, y, z* получаем систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$. И тогда искомый вектор имеет координаты: $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = (2, -1, 1)$.

Пример 2.2. В базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ даны три вектора $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$. Найти разложение вектора $\vec{d} = 11\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то всякий вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Запишем это соотношение в координатной форме:

$$\alpha(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}) + \beta(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}) + \gamma(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) = 11\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 5\vec{k},$$

$$(3\alpha - \beta + 2\gamma)\vec{\imath} + (-2\alpha + \beta + \gamma)\vec{\jmath} + (-\alpha - 2\beta - 3\gamma)\vec{k} = 11\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 5\vec{k}.$$

Откуда, на основании определения равенства векторов, приходим к системе:

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11; \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6; \\ -\alpha - 2\beta - 3\gamma = 5. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, находим $\Delta = 8, \Delta_1 = 16, \Delta_2 = -24, \Delta_3 = 8.$ Затем находим: $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1$ и тогда разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}.$$

Пример 2.3. Найти вектор $a = \overrightarrow{AB}$, если $A(1;3;2)$ и $B(5;8;-1)$.

Решение. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат являются разности соответственных координат точек B и A: $a_x = 5 - 1 = 4$, $a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

Пример 2.4. Найти длину вектора $\vec{a} = 20\vec{\imath} + 30\vec{\jmath} - 60\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

Решение. Имеем $\vec{a} = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \cos\alpha = 20/70 = 2/7, \cos\beta = 30/70 = 3/7, \cos\gamma = -60/70 = -6/7.$

Пример 2.5. Вычислить модуль вектора $|\vec{a}|$, если известны его координаты: $\vec{a} = \{6; 3; -2\}$.

Решение. Используя формулу $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$, подставляя известные значения $a_x,\ a_y, a_z$: находим: $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7$.

Пример 2.6. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Решение. По формулам $cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$; $cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$; $cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ получаем

$$cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{8}{9}, \qquad cos\beta = -\frac{4}{9}, \qquad cos\gamma = \frac{1}{9}.$$

Пример 2.7. Найти орт вектора $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$.

Решение. Определим орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$, пользуясь формулой:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Найдем модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7.$$

Затем находим

$$\vec{a}^0 = \frac{\{6;\ -2; -3\}}{7} = \left\{\frac{6}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7}\right\}.$$

Пример 2.8. Даны три вектора $\vec{a} = \{2;\ 4; 0\}, \vec{b} = \{2; 4;\ 0\}, \vec{c} = \{5;\ -1; 2\}$. Найти вектор $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Решение. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Поэтому находим:

$$2\vec{a} = \{4;\ 8; 0\}, -3\vec{b} = \{-4; -8;\ 0\}.$$

При сложении их координаты складываются. Следовательно:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \{4 - 4 + 5;\ 8 - 8 - 1; 0 + 0 + 2\} = \{5;\ -1; 2\}.$$

Пример 2.9. Выяснить при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = (-2{,}3, \beta)$ и $\vec{b} = (\alpha, -6{,}2)$ коллинеарны?

Решение. Из условия коллинеарности векторов составляем соотношение

$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{6} = \frac{\beta}{2}$$. Откуда находим $\alpha = 4, \beta = -1$.

Пример 2.10. Доказать, что точки А (4; 4; 3), В (1; –2; 0) и С (–1; –6; –2) лежат на одной прямой.

Решение. Убедимся в том, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны – это и будет означать принадлежность точек А, В, С одной прямой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \{-3;\ -6;\ -3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-5;\ -10;\ -5\}$. Так как координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ пропорциональны $(-3)/(-5) = (-6)/(-10) = (-3)/(-5)$, то эти векторы коллинеарны.

Пример 2.11. Проверить, что точки A (2; 1; 0), B (0; 4; –3), C (–2; 3; –5) и D (2; –3; 1) являются вершинами трапеции. Найти длины ее оснований.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающих со сторонами четырёхугольника: $\overrightarrow{AB} = \{-2; 3; -3\}, \overrightarrow{BC} = \{-2; -1; -2\}, \overrightarrow{CD} = \{4; -6; 6\}$, $\overrightarrow{AD} = \{0; -4; 1\}$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ пропорциональны (–2)/4 = 3/(–6) = (–3)/6; следовательно, эти векторы коллинеарны, т. е. прямые (AB) и (CD) параллельны. Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не являются коллинеарными, так как их координаты не пропорциональны; поэтому прямые (BC) и (AD) не параллельны. Таким образом, четырехугольник ABCD – трапеция, основаниями которой служат [AB] и [CD]. Используя формулы для нахождения длинны вектора, найдем длины этих сторон:

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

$$|CD| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Выяснить являются ли векторы $\vec{a} = \{2; -1; 3\}, \vec{b} = \{1; 4; -1\}, \vec{c} = \{0; -9; 5\}$ линейно зависимыми.
2. Показать, что векторы $\vec{a} = \{1; 2; 0\}, \vec{b} = \{3; -1; 1\}, \vec{c} = \{0; 1; 1\}$, заданные в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, сами образуют базис.
3. В базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ трехмерного пространства даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \vec{b} = 2\overrightarrow{e_2} + +3\overrightarrow{e_3}, \vec{c} = \overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
4. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\vec{a} = (1, 1, 2), \overrightarrow{e_1} = (2, 2, -1), \overrightarrow{e_2} = (0, 4, 8), \overrightarrow{e_3} = (-1, -1, 3)$. Убедиться, что векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора $\vec{a}$.
5. Даны три вектора $\vec{p}(3; -2; 1), \vec{q}(-1; 1; 2), \vec{r}(2; 1; -3)$. Найдите разложение вектора $\vec{c}(11; -6; 5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Ответ: $(2; -3; 1)$.
6. Даны вектора $\vec{a} = \{-3; 4; -1\}, \vec{b} = \{-1; 2; 3\}, \vec{c} = \{-4; -2; 1\}$. Найти векторы $4\vec{a} + 3\,\vec{b} - 2\vec{c}, -5\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$.

7. Определить длину и направление радиуса – вектора точки М(6; -6; -7).
8. Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(3;\ -4;6)$, $M_2(1;2;3)$.
9. Найти расстояние между точками $M(4;-1;2)$ и $N(1;3;10)$.
10. Показать, что точки $A\ (3;4;1), B\ (1;0;-1), C\ (-2;-6;-4)$ лежат на одной прямой.
11. Даны точки $A(-3;-2;-3), B(-2;-5;-1)$ и $C(-4;\alpha;\beta)$. При каких значениях α и β точка C лежит на прямой (AB)?
12. Найти значение α и β , при которых векторы $\vec{a}=\{-3;\alpha;9\}$ $\vec{b}=\{2;-8;\beta\}$ являются коллинеарными.
13. Вычислить модуль вектора $\vec{a}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}-\left(\frac{1}{5}\right)(4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+3\vec{k})$ и найти его направляющие косинусы.
14. Может ли некоторая ось l составлять с координатными осями углы:
1) $\alpha=60°, \beta=90°, \gamma=120°$; 2) $\alpha=45°, \beta=60°, \gamma=135°$?
15. Известны модуль вектора $|\vec{a}|$=4 и углы, образуемые им с координатными осями: $\alpha=60°, \beta=120°, \gamma=45°$. Найти координаты вектора $\vec{a}$.
16. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол $60°$, а с осью Oz угол $45°$, его длина $r=8$. Найти координаты точки M, если известно, что ее абсцисса отрицательна.
17. На оси Oz взята точка с аппликатой равной -4. Каковы ее координаты на плоскости.
18. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(-1;-5;-2)$, $B(-4{,}0;-2)$ и $C(-7;-4;-3)$ является равнобедренным.
19. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A\ (3;2;-3), B\ (2;4;6)$, $C\ (8;3;4), D\ (9;1;-5)$ является параллелограммом. Найти длинны его сторон.
20. Вершины четырехугольника находятся в точках $A\ (-3;-5;1), B\ (2;-20;9)$, $C\ (-6;1;2), D\ (-9;10;-8)$. Показать, что ABCD есть трапеция и найти длинны ее оснований.

Глава 3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА И ЕГО СВОЙСТВА

3.1 Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр) равный произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними.

Скалярное произведение принято обозначать символом $\overrightarrow{a}\vec{b}$ или $(\vec{a}\vec{b})$. Итак, согласно определению, для вычисления скалярного произведения векторов справедлива формула:

$$\overrightarrow{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi, \tag{1}$$

где под углом между двумя векторами следует понимать угол, удовлетворяющий условию $\mathbf{0 \le \varphi \le \pi}$.

Данной форме записи скалярного произведения, учитывая формулу: $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|Cos\varphi$ проекции вектора на ось, можно придать иной вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\,\overrightarrow{a} \tag{2}$$

Таким образом, скалярное произведение двух ненулевых векторов равно модулю одного из них умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленую с первым вектором.

Отметим, что данная форма записи формулы скалярного произведения достаточно часто применима при решении задач.

3.2 Свойства скалярного произведения

1. При перестановке местами сомножителей скалярное произведение не меняет своего знака т. е.:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения**:**

$$(\lambda\vec{a})\,\overrightarrow{b} = \lambda(\vec{b}\vec{a}).$$

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$$\vec{a}(\vec{c}+\vec{b}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}.$$

4. Скалярный квадрат вектора, равен квадрату модуля вектора:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}|.$$

Отсюда, легко заметить, что модуль вектора равен корню из его скалярного квадрата т.е.

$$\sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = |\vec{a}|$$

Теорема. Два не нулевых вектора взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны (ортогональны), т.е. угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и тогда $cos\varphi = 0$. Следовательно, согласно формуле (1) , скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю.

Достаточность. Пусть скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю т.е. имеет место равенство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi = 0$. Откуда следует, что $cos\varphi = 0$, а следовательно, угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

3.3 Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по ортонормированному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Теорема. Скалярное произведение двух векторов, заданных своими разложениями по ортонормированному базису, равно сумме произведений их одноименных координат, т. е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Доказательство. Перемножим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на основании свойств скалярного произведения, по правилу произведения многочлена на многочлен, сохраняя при этом знак скалярного произведения. В результате получим следующее соотношение:

$$\vec{a}\vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_xb_x(\vec{\imath}\vec{\imath}) + a_xb_y(\vec{\imath}\vec{\jmath}) + a_xb_z\left(\vec{\imath}\vec{k}\right) +$$
$$+a_yb_x(\vec{\jmath}\vec{\imath}) + a_yb_y(\vec{\jmath}\vec{\jmath}) + a_yb_z\left(\vec{\jmath}\vec{k}\right) +$$
$$+a_zb_x\left(\vec{k}\vec{\imath}\right) + a_zb_y\left(\vec{k}\vec{\jmath}\right) + a_zb_z\left(\vec{k}\vec{k}\right).$$

Принимая во внимание, что базис $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – ортонормированный, то есть, учитывая, что скалярные произведения единичных векторов соответственно равны следующим значениям

$$\vec{\imath}\vec{\imath} = \vec{\jmath}\vec{\jmath} = \vec{k}\vec{k} = 1,$$
$$\vec{\imath}\vec{\jmath} = \vec{\imath}\vec{k} = \vec{\jmath}\vec{k} = 0,$$

получим следующую формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z .$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноименных координат.

3.4 Некоторые приложения скалярного произведения

Задача 1. (Об определении угла между векторами)

Решение задачи об определении угла между двумя векторами следует из формулы для определения их скалярного произведения: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$. Тогда косинус угла между двумя векторами $\vec{a} = \{a_xa_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_xb_y, b_z\}$ в том случае, когда их длины не равны нулю, определяется по формуле

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Задача 2. (О нахождении проекции вектора на заданное направление)

Определение проекции вектора $\vec{a} = \{a_xa_y, a_z\}$ на направление, заданное вектором $\vec{b} = \{b_xb_y, b_z\}$ может быть найдено по формуле:

$$\text{пр}\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Задача 3. (Об определении работы постоянной силы)
Механический смысл скалярного произведения:

$$\vec{F} \cdot \vec{S} = A,$$

где А работа силы по перемещению материальной точки вдоль вектора $\vec{S}$.

Пример 3.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$.

Решение. Известно, что квадрат длины вектора $\vec{c}$ равен его скалярному квадрату. Найдем скалярный квадрат вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}|^2 = 4\overrightarrow{a^2} - 12\vec{a}\vec{b} + 9\overrightarrow{b^2} = 4\overline{|a|}^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi + 9|\vec{b}|^2 =$$

$$= 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \cdot 1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 9 \cdot 1^2 = 16 - 12 + 9 = 13.$$

Следовательно, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$.

Пример 3.2. Найти $\vec{c}^{\,2}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $\overline{|\vec{b}|} = 3$, $\varphi = \pi/3$.

Решение. Зная определение и свойства скалярного произведения, находим: $\vec{c}^{\,2} = |\vec{c}||\vec{c}| = |3\vec{a} - 4\vec{b}|\ |3\vec{a} - 4\vec{b}| = (9\vec{a}^2 - 24\,\vec{a}\vec{b} + 16\,\vec{b}^2) = 6\sqrt{3}$.

Пример 3.3. Вектор $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 6$, определить длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Решение. Согласно свойствам скалярного произведения, длина вектора равна корню квадратному из его скалярного квадрата имеем:

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2} = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{|\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^0 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^0} =$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 36 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10.$$

Пример 3.4. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $\vec{a} = 2, \vec{b} = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение. Имеем $\left(5\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 10\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 10\vec{a}^2 - 3\bar{b}^2 = 40 - 27 = 13.$

Пример 3.5. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, поэтому находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Пример 3.6. Даны вектора $\vec{a} = m\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{\imath} + m\vec{\jmath} - 7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

Решение. Находим скалярное произведение этих векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\vec{m} + 3\vec{m} - 28$, так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$ Отсюда $7\vec{m} - 28 = 0$, т.е. $\vec{m} = 4$.

Пример 3.7. Определить угол между векторами $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Решение. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b}\, cos\varphi$, то $cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\overline{ab}}$. Имеем $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3(-2) = 8, \vec{a} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \vec{b} = \sqrt{36 + 16 + 4} = 2\sqrt{14}.$
Следовательно, $cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ и $\varphi = arccos\frac{2}{7}$.

Пример 3.8. Даны вершины треугольника А(3,2,-3), В(5,1,-1) и С(1,-2,1). Определить его внешний угол при вершине А.

Решение. Внешний угол при вершине А, это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}(2, -1{,}2)$, $\overrightarrow{CA}(2{,}4, -4)$. Затем найдем длины этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3, \ \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6.$$

Тогда, в соответствии с формулой для определения угла между векторами, имеем, что

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4)}{3 \cdot 6} = \frac{4 - 4 - 8}{3 \cdot 6} = -\frac{4}{9}.$$

Пример 3.9. Найти угол $\hat{A}$ в треугольнике с вершинами А (1; 2; –2), В (5; 5; 11), С (13; 18; 20).

Решение. Искомый угол – это угол между векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{4; 3; 12\}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{12; 16; 21\}$.

По формуле $cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ имеем:

$$cos\hat{A} = \frac{4 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 21}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}\sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2}} = \frac{358}{13 \cdot 29} = \frac{12}{13}.$$

Таким образом, $\hat{A} = \arccos(12/13) \approx 23°$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, вычислить:

   1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны; $\bar{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

3. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -2; -4\}, \vec{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислить:

   1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; 2) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 3) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

4. Пусть $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 3\sqrt{2}; \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{4}$. При каком значении α имеет место $\left(3\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) \perp \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

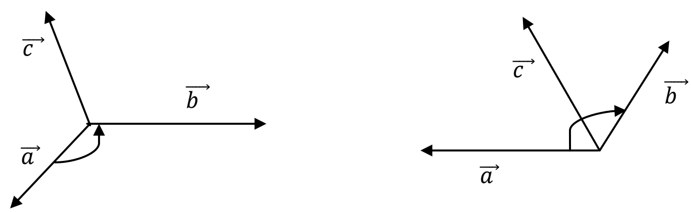
5. Пусть даны значения: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 2; |\vec{c}| = 6; \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = \left(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Найти $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

6. Даны вершины четырехугольника $A\,(-4;-3;2), B\,(2;-2;-3)$, $C\,(-8;-5;1), D\,(4;-3;-1)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.
7. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;1;0\}, \vec{b}=\{0;-1;1\}$.
8. Пусть $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=5$ и $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\frac{2}{3}\pi$. При каком α векторы $2\vec{a}+17\vec{b}$ и $3\vec{a}-\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
9. При каком значении α данные векторы $\vec{a}=\alpha\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?
10. Пусть $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}; \vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}; |\vec{m}|=|\vec{n}|=1; \left(\widehat{\vec{m};\vec{n}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Найти $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.
11. Определить угол между векторами $\vec{a}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-3\vec{k}$.
12. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{5;4;-6\}$ на вектор $\vec{b}=\{2;-1;-1\}$.
13. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-6;2\}, \vec{b}=\{-2;-1;2\}$. Найти проекции вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
14. Даны вершины треугольника: $A\,(1;-2;3), B\,(-1;-1;-2)$, $C\,(3;0;-2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$.
15. Даны два вектора $\vec{a}(3;\ -1;5)$ и $\vec{b}(1;\ 2;-3)$. Найдите $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси OZ и удовлетворяет условиям: $\vec{x}\vec{a}=9;\ \vec{x}\vec{b}=-4$.

Глава 4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

4.1 Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взятые в указанном порядке, образуют ***правую тройку***, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки, и ***левую тройку***, если поворот совершается почасовой стрелки.



а) Правая тройка векторов б) Левая тройка векторов

Рисунок 17.

Пусть даны два не коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.Приведем данные векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ к общему началу. Построим вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, перпендикулярный одновременно и $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Очевидно, что при построении вектора $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ мы можем поступить двояко, задав ему либо одно направление, либо противоположное. В зависимости от направления вектора $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ может быть правой или левой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, который:

1. перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2. имеет длину, которая определяется по формуле: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$,где $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$;

3. направлен так, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}\vec{b}]$

4.2 Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет свой знак:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Таким образом, векторное произведение двух векторов не обладает *переместительным свойством*. Это свойство следует из определения векторного произведения.

2. Векторное произведение обладает *сочетательным свойством*, относительно скалярного множителя, т.е.

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$$

3. Векторное произведение обладает *распределительным свойством*:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Из этих трех свойств следует, что векторное произведение векторов подчиняется обычным правилам умножения многочлена на многочлен.

Теорема. (необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов)

Два не нулевых вектора коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

4.3 Геометрический смысл векторного произведения

Теорема. Модуль вектора $\vec{c}$ векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах т. е.

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| sin\varphi.$$

Отсюда следует вывод, что векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является такой вектор $\vec{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, который перпендикулярен к плоскости этого параллелограмма и направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки.

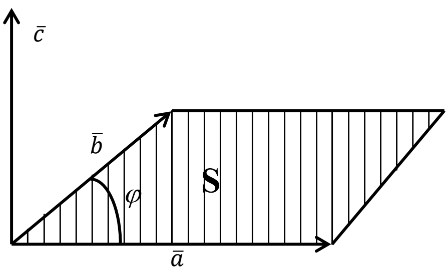


Рисунок 18.

4.4 Векторное произведение в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями по ортонормированному базису $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = \{a_x a_y, a_z\} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\ , \qquad \vec{b} = \{b_x b_y, b_z\} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$$

Для выражения векторного произведения двух векторов через их координаты воспользуемся значениями векторных произведений ортогональных единичных векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, которые равны соответственно:

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath},$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}.$$

Перемножим данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в силу свойств векторного произведения векторов, по известным правилам умножения многочлена на многочлен, сохраняя знак векторного произведения. В результате получим:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) \times \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= a_x b_x(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + a_x b_y(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) + a_x b_z\left(\vec{\imath} \times \vec{k}\right) +$$

$$+ a_y b_x(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) + a_y b_y(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) + a_y b_z\left(\vec{\jmath} \times \vec{k}\right) +$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k}).$$

Учитывая данные таблицы, получим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}+a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+\vec{0}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}+\vec{0}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Заметим, что

$$\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}=a_yb_z-a_zb_y;\ \begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}=-(a_xb_z-a_zb_x);\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=(a_xb_z-a_zb_x)$$

Тогда получим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Полученную формулу векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать более компактно. Так нетрудно заметить, что правая часть полученного равенства соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Поэтому можно векторное произведение двух векторов представить с помощью определителя третьего порядка, у которого первая строка состоит из базисных векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, а вторая и третья строки из координат перемножаемых векторов т.е. по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

4.5 Некоторые приложения векторного произведения

Задача 1. (Об установлении коллинеарности двух векторов)

Если $\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ и тогда справедливо соотношение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\Longrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

Таким образом, задача об установлении параллельности двух векторов сводится к определению пропорциональности их координат.

Задача 2. (О нахождение площади параллелограмма)

Площадь параллелограмма на основании геометрического смысла модуля векторного произведения определяется формулой:

$$S_{\text{парал.}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \vec{a}\,\vec{b}.$$

т.е. площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения двух векторов построенного на них.

Задача 3. (О нахождении площади треугольника).

Площадь треугольника находится по формуле:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \sin \vec{a}\,\vec{b}.$$

Пример 4.1. Даны $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Решение. Зная формулу для скалярного произведения двух векторов и учитывая, что согласно условию: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ находим значение:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{10 \cdot 2} = \frac{3}{5}\text{, а затем находим } sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Тогда искомое значение модуля векторного произведения равно:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\, sin\varphi = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Пример 4.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Решение. Находим векторное произведение a на b:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Пример 4.3. Найти орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; 3; 1\}$ и $\vec{b} = \{2; -2; -1\}$.

Решение. Искомый орт параллелен вектору $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. По формуле векторного произведения находим

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Отсюда $|\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-12)^2} = \sqrt{1 + 25 + 144} = \sqrt{170}$. Таким образом,

$$\vec{e} = \pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{170}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{170}}\vec{j} - \frac{12}{\sqrt{170}}\vec{k}\right).$$

Пример 4.4. Найти координаты вектора векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}$ = {1; 2; -1}, $\vec{b}$ = {3; -1; 2}.

Решение. Используя координатную форму записи векторного произведения, а затем раскрывая определитель по элементам первой строки определителя, находим:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$= 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = \vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$ = {3; -5; -7}.

Пример 4.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить модуль векторного произведения $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Решение. Используя формулу для определения модуля векторного произведения, находим: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \vec{a}\,\vec{b} = 3, 2\, sin\frac{\pi}{6} = 3$

Пример 4.6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 30^\circ$.

Решение. Имеем

$$\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$$

$$= 3 \cdot 0 + \vec{a} \times \vec{b} - 9\vec{a} \times \vec{b} + 3 \cdot 0 = -8\vec{a} \times \vec{b},$$

(поскольку $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0, \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$). Итак,

$$S = 8\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot sin30^\circ = 4\ (\text{кв. ед}).$$

Пример 4.7. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (4-1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24}\ (\text{кв. ед}).$$

Пример 4.8. Даны три вершины треугольника: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить длину высоты h, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение. Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}|\,h$.

Откуда следует, что: $\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}|\,h$, и тогда $H = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$.

В соответствии с полученной формулой, находим:

1. координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = \{2; -2; 3\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4; 0; 6\}$;

2. координаты вектора векторного произведения векторов:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = -12\vec{i} - 0\vec{j} + 8\vec{k} =$$

$\{-12;\ 0;\ 8\}$;

3. модуль вектора векторного произведения:

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \vec{d} = \sqrt{-12^2+0^2+8^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13};$$

4. модуль вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{54}= 2\sqrt{13};$$

5. подставляем численные значения в формулу и находим искомую величину: Н = $\frac{4\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$ = 2.

Пример 4.9. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}$(2,-3,1) и $\vec{b}$(1,-2,3) и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-7\vec{k})$=10.

Решение. Найдем вектор:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

Вектор $\vec{x}$, коллинеарен вектору $\vec{c}$, следовательно, его координаты $(-7\lambda, -5\lambda, -\lambda)$, тогда $-7\lambda - 10\lambda + 7\lambda = 10$, а $\lambda = 1$. Следовательно, искомый вектор имеет координаты $\vec{x}(7,5,1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислить $|[\vec{a}\vec{b}]|$.
2. Дано $\vec{a}\vec{b} = 12; |\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 10.$ Найти $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
3. Пусть $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3;\ |\vec{a}| = 1;\ |\vec{b}| = 5.$ Вычислите $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.
4. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}; |\vec{a}| = 5;\ |\vec{b}| = 2.$ Вычислите: $|(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$.
5. Доказать, что $[\vec{a}\vec{b}]^2 \le \vec{a}^2\vec{b}^2$, в каком случае здесь будет знак равенства?
6. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ для следующих векторов: 1). $\vec{a} = \{2; 3; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 1\}$; 2). $\vec{a} = \{5; -4; \}, \vec{b} = \{1; 1; -2\}$;3)$\vec{a} = \{-1; 2; 4\}, \vec{b} = \{2; -1; -4\}$.
7. Вычислить площадь треугольника с вершинами: $A\ (-3; -2; -4), B\ (-1; -4; -7),\ C\ (1; -2; 2)$.

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{3; -2; 6\}, \vec{b} = \{6; 3; -2\}$.
9. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}; \vec{q} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 3; (\widehat{\vec{m}; \vec{n}}) = 135°$.
10. Найти длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + \bar{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1; \left(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
11. Дан треугольник с вершинами $A(9; -9; 13); B(7; -13; 17); C(17; -3; 17)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C. (Ответ: 10)
12. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$, при условии $\vec{a}\vec{b} = 3$.

Глава 5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

5.1 Определение смешанного произведения

Смешанным произведением трех векторов называется такое произведение, при котором первые два вектора перемножаются векторно, а их результат умножается скалярно на третий вектор.

Смешанное произведение, называемое также векторно-скалярным, представляет собой некоторое число и определяется формулой:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

Замечание. Смешанным произведением трех векторов называется произведение вида $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Так как последним выполняется скалярное произведение, то смешанное произведение есть скаляр (число).

5.2 Геометрический смысл смешанного произведения

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения т.е. когда имеет место равенство:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} =0.$$

Иными словами, смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они расположены в одной плоскости.

Теорема 2. Смешанное произведение трех векторов по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на данных трех векторах.

Пусть даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, которые приведены к общему началу. Построим параллелепипед, ребрами которого являются эти векторы.

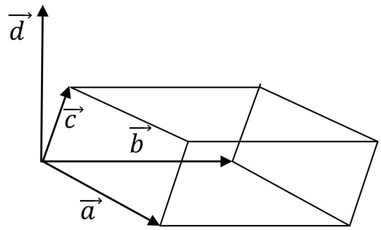


Рисунок 19.

Смешанное произведение трех некомпланарных векторов, согласно данному определению, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти вектора образуют *правую тройку* векторов, и со знаком «-», если образуют левую тройку векторов т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V,$$

где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

5.3 Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a},$$

так как при такой перестановке не меняется ни объем параллелепипеда, ни смысл тройки векторов сомножителей.

2. Смешанное произведение не меняются при перемене местами знаков векторного и скалярного произведения

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}, \qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}, \qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{a}\vec{b}$$

5.4 Смешанное произведение векторов в координатной форме

Пусть векторы $\overline{a}, \vec{b}$ и $\vec{c},$ и разложены по ортонормированному базису $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}, \quad \vec{c} = c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k}$$

Смешанное произведение векторов в координатной форме, в силу формул векторного и скалярного произведений, определяется следующим образом:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \left[\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}\right] =$$

$$= c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k} = c_x\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - c_y(a_x b_z - a_z b_x) + c_z\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Заметим, что

$$a_y b_z - a_z b_y = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, a_x b_z - a_z b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что последнее соотношение представляет собой разложение определителя 3-го порядка по 1-й строке определителя.

Таким образом, справедливо следующее *правило*: смешанное произведение $\overline{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, трех векторов, заданных своими координатами численно равно значению определителя третьего порядка, элементами строк которого являются координаты перемножаемых векторов:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

5.5 Некоторые приложения смешанного произведения

Задача 1. (Об определении взаимной ориентации векторов в пространстве)

Решение задачи об определении взаимной ориентации трех векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ в пространстве основано на следующих знаниях:

– если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

– если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

Задача 2. (Об установлении компланарности векторов)

В основе решения задач этого типа лежит проверка выполнения условия теоремы о необходимом и достаточном условии равенства нулю смешанного произведения трех векторов $\overrightarrow{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Так, если смешанное произведение трех векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то эти векторы компланарны, в противном случае они не компланарны.

Задача 3. (Об определении объема параллелепипеда)

В основе решения задач этого типа лежит понятие о геометрическом смысле смешанного произведения, из которого следует, что объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен модулю их смешанного произведения, т.е. вычисляется по формуле:

$$\mathrm{V} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Задача 4. (Об определении объема треугольной пирамиды)

Объем треугольной пирамиды. построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как 1/6 объема параллелепипеда и вычисляется по формуле

$$v_{\text{пар}} = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Пример 5.1. Показать, что векторы:

$\vec{a} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\bar{c} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ компланарны.

Решение. Находим смешанное произведение данных векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 7 = 0,$$

так как их смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то заданные векторы компланарны.

Пример 5.2. Доказать компланарность векторов $\vec{a} = \{1; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{0; 2; -1\}, \vec{c} = \{1; -1; 4\}$.

Решение. Находим, пользуясь формулой смешанного произведения в координатной форме, произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0$$

(определитель вычислен путем его разложения по элементам первого столбца).

Так как смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю, то эти векторы компланарны.

Пример 5.3. Доказать, что точки A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3) лежат в одной плоскости.

Решение. Определим координаты векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и определим их координаты: $\overrightarrow{AB}(-1,-1{,}6)$, $\overrightarrow{AC}(-2{,}0{,}2)$, $\overrightarrow{AD}(1,-1{,}4)$. Выясним компланарны ли данные векторы. Для этого найдем их смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как смешанное произведение векторов равно нулю, то векторы, а следовательно, и точки их составляющие лежат в одной плоскости.

Пример 5.4. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A\ (2;2;2), B\ (4;3;3), C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{AD}$ совпадающие с ребрами пирамиды, выходящими из одной вершины A:

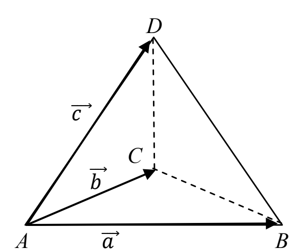


Рисунок 20.

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AD} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}.$$

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Так как объем пирамиды равен $1/6$ части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC},$ и $\overrightarrow{AD},$ то $\mathrm{V} = 7/6$ (куб.ед.).

Пример 5.5. Найти объем параллелепипеда с вершинами в точках: A (–1; 1; 0), B (2; –2; 1), C (3; 1; –1), D (1; 0; –2).

Решение. Рассмотрим векторы

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{3;\ -3; 1\}, \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{4; 0;\ -1\}, \vec{c} = \overrightarrow{AD} = \{2;\ -1;\ -2\}.$

Известно, что искомый объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов. Таким образом:

$$V_{\text{тетр}} = \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \left[-4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right] = 25.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти смешанное произведение $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$, если:
   1) $\overrightarrow{a} = \{1; 1; 2\}, \overrightarrow{b} = \{1; -2; 3\}, \vec{c} = \{2; 1; 1\}$;
   2) $\overrightarrow{a} = \{5; -2; -1\}, \overrightarrow{b} = \{1; -2; 1\}, \vec{c} = \{1; 2; -2\}$;
   3) $\overrightarrow{a} = \{1; 1; 4\}, \overrightarrow{b} = \{2; -1; 1\}, \vec{c} = \{1; 3; -1\}$.
2. Показать, что векторы $\overrightarrow{a} = \{1; 2; 2\},\ \vec{b} = \{2; 5; 7\}, \vec{c} = \{1; 1; -1\}$ компланарны.
3. Даны векторы $\vec{a}(1; 2;\ 2); \vec{b}(1; 2;\ -3); \vec{c}(5; -10;\ 7);$ и $\vec{d}(1; -3; 0)$. Проверить, будут ли компланарны векторы $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}\,; \overrightarrow{b}\,; \vec{c} - 2\vec{d}$. (Ответ: да.)
4. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = \{3; 2; 1\}, \vec{b} = \{1; 0; -1\},\ \vec{c} = \{1; -2; 1\}$.

5. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 0;\ -1\}; \vec{b} = \{1; 2;\ -4\}$ и $\vec{c} = \{0; 3; 0\}$. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $3\vec{a}; \vec{a} + \vec{b}$ и $2(\vec{a} - \vec{c})$.
6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A\ (-4; -4; -3), B\ (-2; -1; 1),\ C\ (2; -2; -1), D\ (-1; 3; -2)$.
7. В пирамиде с вершинами $S(-3; -3; -3); A(2; -1; -3); B(-1; 2; -3)$ и $C(-2; -1; 1)$ найти длину высоты, проведенной из грани ABC. (Ответ: $6\sqrt{3}$.)
8. Даны вершины пирамиды $A(2; 3;\ 1); B(4; 1;\ -2);$ С $(6; 3;\ 7); D(-5; -4;\ 8)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины D. (Ответ: 11).
9. Объем пирамиды равен 5. При его вершины находятся в точках $A(2; 1;\ -1);$ $\mathrm{B}(3; 0;\ 1); \mathrm{C}(2; -1;\ 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.
10. В тетраэдре с вершинами $A\ (3; 1; 1), B\ (1; 4; 1),\ C\ (1; 1; 6), D\ (3; 4; 9)$ найти площадь грани ABC и длину высоты, проведенной к этой грани.

Смешанные задачи векторной алгебры

Задание 1. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу $\overrightarrow{AB}$ опущен перпендикуляр $\overrightarrow{CH}$. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ и длины катетов $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a, \left|\overrightarrow{CA}\right| = b$.

Ответ: $\overrightarrow{CH} = \left(a^2\left|\overrightarrow{CA}\right| + b^2\overrightarrow{CB}\right)/(a^2 + b^2)$.

Задание 2. Стороны ромба лежат на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выходящих из общей вершины. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Задание 3. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$, отложенные от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, отложенный от той же точки и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы.

Ответ: $\vec{d} = \pm\left(|\vec{a}|\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \left|\vec{b}\right|(\vec{c} \times \vec{a}) + |\vec{c}|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right)$

Задание 4. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длины медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

Ответ: $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 6, \left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Задание 5. Даны три вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \vec{x} \cdot \vec{c} = 20$.

Ответ: $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Задание 6. Даны четыре вектора $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -2, 1), \vec{c} = (4, 0, 3), \vec{d} = (16, 10, 18)$. Найти вектор $\vec{x}$, являющийся проекцией вектора $\vec{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при направлении на проектирования, параллельному вектору $\vec{c}$.

Ответ: $\vec{x} = (-4, 10, 3)$.

Задание 7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\vec{a} = (8, -15, 3)$, образуют острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти координаты x.

Ответ: $\vec{x} = (45, 24, 0)$.

Задание 8. Векторы $\vec{a} = (-3, 0, 4)$ и $\vec{b} = (-5, -2, -14)$ отложены из одной точки. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ: $\vec{e} = \left(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6},\right)$

Задание 9. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Ответ: $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$.

Задание 10. Даны два вектора $\vec{a} = (8, 4, 1), \vec{b} = (2, -2, 1)$. Найти вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\vec{b}$ тупой угол.

Ответ: $\vec{c} = \left(-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2},\right)$

Задание 11. Убедившись, что векторы $\vec{a} = 7\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 9\vec{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.

Ответ: $\left(\pm 6\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$

Задание 12. Даны три вектора $\vec{a} = (8, 4, 1), \vec{b} = (2, -2, 1), \vec{c} = (4, 0, 3)$. Найти единичный вектор $\vec{d}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

Ответ: $\vec{d} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c_1}$и $\overrightarrow{c_2}$ построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b} = \{3, 0, -1\}, \overrightarrow{c_1} = 2\vec{a} + 4\vec{b}, \overrightarrow{c_2} = 3\vec{b} - \vec{a}.$

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$A(1, -2, 3), B(0, -1, 2), C(3, -4, 5).$

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q};$ где $\overline{|p|} = 1, \overline{|q|} = 2, \widehat{(pq)} = \frac{\pi}{6}.$

Задача 4. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?

$\vec{a} = \{2, 3, 1\}, \vec{b} = \{-1, 0, -1\}, \vec{c} = \{2, 2, 2\}.$

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1, A_2, A_3.

$A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3).$

Вариант №2

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c_1}$и $\overrightarrow{c_2}$ построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a} = \{1, 0, 1\}, \vec{b} = \{-2, 3, 5\}, \overrightarrow{c_1} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{c_2} = 3\vec{a} - \vec{b}.$

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-9, -3, -6).$

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

$\vec{a} = \overrightarrow{3p} + \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - \overrightarrow{2q};$ где $\overline{|p|} = 4, \ \overline{|q|} = 1, \widehat{(pq)} = \frac{\pi}{4}.$

Задача 4. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?

$\vec{a} = \{3, 2, 1\}, \vec{b} = \{2, 3, 4\}, \vec{c} = \{3, 1, -1\}.$

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4на грань

$A_1, A_2, A_3. A_1(-4, 2, 6), A_2(2, -3, 0), A_3(-10, 5, 8), A_4(-5, 2, -4).$

Вариант №3

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c_1}$ и $\overrightarrow{c_2}$ построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a} = \{-2, 4, 1\}, \vec{b} = \{1, -2, 7\}, \overrightarrow{c_1} = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \overrightarrow{c_2} = 2\vec{a} - \vec{b}.$

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1).$

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах :

$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$ где $\overline{|p|} = \frac{1}{5}, \overline{|q|} = 1, \widehat{(pq)} = \frac{\pi}{2}.$

Задача 4. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?

$\vec{a} = \{1, 5, 2\}, \vec{b} = \{-1, 1, -1\}, \vec{c} = \{1, 1, 1\}.$

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4на грань A_1, A_2, A_3.

$A_1(7, 2, 4), A_2(7, -1, -2), A_3(3, 3, 1), A_4(-4, 2,1).$

Вариант №4

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c_1}$ и $\overrightarrow{c_2}$ построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a} = \{1, 2, -3\}, \vec{b} = \{2, -1, -1\}, \overrightarrow{c_1} = 4\vec{a} + 3\vec{b}, \overrightarrow{c_2} = 8\vec{a} - \vec{b}.$

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$A(-1, 2, -3), B(3, 4, -6), C(1, 1, -1).$

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

$\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$ где $\overline{|p|} = 4, \overline{|q|} = \frac{1}{2}, \widehat{(pq)} = \frac{5\pi}{6}.$

Задача 4. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?

$\vec{a} = \{1, -1, -3\}, \vec{b} = \{3, 2, 1\}, \vec{c} = \{2, 3, 4\}.$

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4на грань A_1, A_2, A_3.

$A_1(2, 1, 4), A_2(-1, 5, -2), A_3(-7, -3, 2), A_4(-6, -3,6).$

Тестовые задания для проверки знаний по разделу: «Основы векторной алгебры»

Вариант № 1

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует равные тупые углы с базисными ортами $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) –1 2) $-\sqrt{2}$ 3) $-\sqrt{3}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 5) $-2\sqrt{3}$
А2. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 8\vec{k}, \vec{b} = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 12\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$ на ось вектора $\vec{c}$ равна	1) –2 2)–3 3) $\frac{2}{13}$ 4) 2 5) 3
А3. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$– единичные векторы, и $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{3}$, то скалярное произведение $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ равно	1) –1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1 5) 2
А4. Если $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}, \|\vec{b}\| = 1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60 °, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$, равна	1) 4(кв.ед) 2) 4,5(кв.ед.) 3) 5(кв.ед) 4) 5,5(кв.ед) 5) 6(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 3, \|\vec{c}\| = 2$, то смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равно	1) 8 2) 24 3) 28 4) 18 5) 16
А6. Объем тетраэдра с вершинами А (2; 3; 1), В (4; 1; –2), С (6; 3; 7) и D (–4; –3; 7) равен	1) 40 2) 42 3) 44 4) 46 5)48

Вариант № 2

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{\imath}$ угол 30°,а с базисными ортами $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1)$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ 5) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{\imath}-\vec{\jmath}+4\vec{k}, \vec{b}=\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+8\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-2\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на ось вектора $\vec{a}-\vec{c}$ равна	1) $\frac{12}{11}$ 2) $\frac{13}{11}$ 3) $\frac{14}{11}$ 4) $\frac{15}{11}$ 5) $\frac{16}{11}$
А3. Если $\lvert\vec{a}\rvert=2, \lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$, и $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=3$, то скалярное произведение $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ равно	1) –2 2) –1 3) 1 4) 2 5) 3
А4. Если $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, равна	1)1,5(кв.ед) 2) 2(кв.ед.) 3) 2,5(кв.ед) 4) 3(кв.ед) 5) 3,5(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=5, \lvert\vec{c}\rvert=3$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 50 2) 55 3) 45 4) 60 5) 30
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (4; 3; 0), B (–1; 2;1), C (3; 4; 1) и D (5; 6; 2) равен	1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{5}{6}$ 5) $\frac{4}{3}$

Вариант №3

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{\imath}$ угол 45 °, а с базисными ортами $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1)$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ 2) -$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ 5) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=0{,}5\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+5\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{\imath}+\vec{\jmath}+4\vec{k}.$ Проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $2\vec{b}-\vec{c}$ равна	1) –3 2) –2 3) $\frac{1}{4}$ 4) 2 5) 4
А3. Если $\lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2},$ и $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=\sqrt{15},$ то скалярное произведение $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ равно	1) 12 2) 18 3) 16 4) 14 5) 10
А4. Если $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{2}, \lvert\vec{b}\rvert=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45 °, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}+3\vec{b}$, равна	1) 12(кв.ед) 2) 14(кв.ед.) 3) 16(кв.ед) 4) 18(кв.ед) 5) 20(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\lvert\vec{a}\rvert=2, \lvert\vec{b}\rvert=8, \lvert\vec{c}\rvert=3$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 40 2) 42 3) 44 4) 46 5) 48
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (3; 1; 1), B (1; 4;1), C (1; 1; 6) и D (3; 4; 9) равен	1) 10 2) 11 3) 12 4) 13 5) 14

Вариант №4

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол $135°$, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1)$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 3) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ 5) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Проекция вектора $2\vec{a}-\vec{b}$на ось вектора $\vec{c}$ равна	1) –3 2) –2 3) $\frac{1}{6}$ 4) 2 5) 3
А3. Если $\lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=4$, и $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=\sqrt{26}$, то скалярное произведение $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$ равно	1) –22 2) –23 3) –24 4) 25 5) 26
А4. Если $\lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135°$, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $5\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+5\vec{b}$, равна	1) 33(кв.ед) 2) 35(кв.ед.) 3) 36(кв.ед) 4) 38(кв.ед) 5) 39(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=4, \lvert\vec{c}\rvert=5$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 30 2) 40 3) 60 4) 56 5) 64
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (–4; –4; –3), B (–2; –1;1), C (2; –2; –1) и D (–1; 3; –2) равен	1) 10 2) 20 3) 30 4) 40 5) 50

Вариант №5

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол $30°$, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равна	1) 5 2) 6 3) 7 4) –6 5) –7
А3. Если $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}, \|\vec{b}\| = 2$, и $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 3$, то скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$ равно	1) –10 2) –5 3) 5 4) 3 5) –3
А4. Если $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $30°$, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, равна	1)2(кв.ед) 2) 3(кв.ед.) 3) 4(кв.ед) 4) 5(кв.ед) 5) 6(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\|\vec{a}\| = 4, \|\vec{b}\| = 3, \|\vec{c}\| = 3$, то смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равно	1) 18 2) 36 3) 40 4) 80 5) 60
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (–3; –3; –3), B (2; –1; –3), C (–1; 2; –3) и D (–2; –1; 1) равен	1) 10 2) 12 3) 14 4) 16 5) 18

Вариант № 6

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{\imath}$ угол 120°, а с базисными ортами $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) 1 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ 5) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=6\vec{\imath}+\vec{\jmath}-3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}-5\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}-3\vec{c}$ равна	1) $-\frac{15}{13}$ 2) $-\frac{14}{13}$ 3) 1 4) $\frac{14}{13}$ 5) $\frac{15}{13}$
А3. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы, и $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{3}$, то скалярное произведение $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ равно	1) 2 2) 3 3) 4 4) 5 5) 6
А4. Если $\|\vec{a}\|=1, \left\|\vec{b}\right\|=2\sqrt{3}$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, равна	1) 4(кв.ед) 2) 3(кв.ед.) 3) 3,5(кв.ед) 4) 4,5(кв.ед) 5) 5,5(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\|\vec{a}\|=5, \left\|\vec{b}\right\|=2, \|\vec{c}\|=3$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 30 2) 35 3) 40 4) 45 5) 60
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (–1; 1; 2), B (0; 3; 3), C (4; 5; –1) и D (2; 1; 4) равен	1) 6 2) 7 3) 8 4) 9 5) 10

Вариант №7

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол $60°$, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 4) 1 5) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$ и $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{a} - 3\vec{c}$ на ось вектора $\vec{b}$ равна	1) –2 2) –1 3) $\frac{3}{11}$ 4) 2 5) 3
А3. Если $\lvert\vec{a}\rvert = 2, \lvert\vec{b}\rvert = 4$, и $\lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert = \sqrt{12}$, то скалярное произведение $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ равно	1) –40 2) –36 3) –52 4) 50 5) 54
А4. Если $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, равна	1)6(кв.ед) 2) 7(кв.ед.) 3) 8(кв.ед) 4) 10(кв.ед) 5) 12(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\lvert\vec{a}\rvert = 6, \lvert\vec{b}\rvert = 3, \lvert\vec{c}\rvert = 4$, то смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равно	1) 36 2) 44 3) 56 4) 64 5) 72
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (4; 2; 2), B (2; 5; 2), C (2; 2; 7) и D (4; 5; 10) равен	1) 9 2) 10 3) 11 4) 12 5) 13

Вариант №8

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{\imath}$ угол $150°$, а с базисными ортами $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 5) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 8\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равна	1) –4 2) $-\frac{3}{7}$ 3) 3 4) 4 5) $\frac{8}{7}$
А3. Если $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}, \|\vec{b}\| = 1$, и $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{11}$, то скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$ равно	1) –3 2) –2 3) 2 4) 3 5) 6
А4. Если $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}, \|\vec{b}\| = 1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135°$, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - 3\vec{b}$ и $3\vec{a} - \vec{b}$, равна	1)6(кв.ед) 2) 8(кв.ед.) 3) 10(кв.ед) 4) 12(кв.ед) 5) 4(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\|\vec{a}\| = 5, \|\vec{b}\| = 4, \|\vec{c}\| = 4$, то смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равно	1) 40 2) 60 3) 70 4) 80 5) 50
А6. Объем тетраэдра с вершинами А (–3; –3; –2), В (2; –1; –2), С (–1; 1; –2) и D (–2; 0; 4) равен	1) 16 2) 18 3) 20 4) 22 5) 24

Вариант № 9

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол $150°$, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ 2) –1 3) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$. Проекция вектора $\vec{c}$ на ось вектора $2\vec{b}-\vec{a}$ равна	1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{5}{3}$ 3) 2 4) $-\frac{4}{3}$ 5) $-\frac{5}{3}$
А3. Если $\lvert\vec{a}\rvert=4, \lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$, и $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=\sqrt{8}$, то скалярное произведение $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ равно	1) 22 2) 24 3) 26 4) 28 5) 30
А4. Если $\lvert\vec{a}\rvert=2, \lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, равна	1)3(кв.ед) 2) 3,5(кв.ед.) 3) 4(кв.ед) 4) 4,5(кв.ед) 5) 5(кв.ед)
А5. Если векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\lvert\vec{a}\rvert=5, \lvert\vec{b}\rvert=5, \lvert\vec{c}\rvert=4$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 80 2) 90 3) 100 4) 50 5) 120
А6. Объем тетраэдра с вершинами А (–2; 1; 4), В (–1; 5; 5), С (2; 3; 4) и D (0; 0; 5) равен	1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{5}{3}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) 3 5) $\frac{11}{3}$

Вариант №10

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенными. Номер правильного ответа отметьте в бланке ответов под номером выполненного задания.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если единичный вектор $\vec{a}$ образует с базисным ортом $\vec{i}$ угол 135°, а с базисными ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные тупые углы, то сумма координат вектора $\vec{a}$ равна	1) $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 3) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ 5) $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
А2. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$. Проекция вектора $3\vec{c}-\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$ равна	1) -5 2) -4 3) -3 4) 4 5) 5
А3. Если $\|\vec{a}\|=\sqrt{6}, \|\vec{b}\|=3$, и $\|\vec{a}+\vec{b}\|=5$, то скалярное произведение $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})$ равно	1) -16 2) -18 3) -20 4) -23 5) -25
А4. Если $\|\vec{a}\|=4, \|\vec{b}\|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $5\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, равна	1)20(кв.ед) 2) 16(кв.ед.) 3) 22(кв.ед) 4) 24(кв.ед) 5) 18(кв.ед
А5. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов и $\|\vec{a}\|=3, \|\vec{b}\|=6, \|\vec{c}\|=2$, то смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равно	1) 36 2) 42 3) 48 4) 60 5) 72
А6. Объем тетраэдра с вершинами A (2; –1; 1), B (5; 5; 4), C (3; 2; –1) и D (4; 1; 3) равен	1) 3 2) 4 3) 5 4) 6 5)12

Индивидуальные типовые домашние задания по разделу «Геометрический вектор и линейные действия над ним»

Задание 1. Даны векторы $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$ и $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$,

где $|\vec{m}| = k$; $|\vec{n}| = l$; $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \varphi$. Найти:

а) $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot (\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\text{в}}(\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$;

в) $\cos(\widehat{\vec{a},\tau\vec{b}})$.

1.1. $\alpha = -5$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = 6$, $k = 3$, $l = 5$,
$\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -2$, $\mu = 1/3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$.

Ответ: а) 2834

1.2. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = -1$, $k = 1$, $l = 3$,
$\varphi = \pi$, $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = -2$, $\tau = 4$.

Ответ: а) -950

1.3. $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$, $\delta = -1$, $k = 4$, $l = 5$,
$\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = -1$, $\tau = 5$.

Ответ: а) -1165

1.4. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = -6$, $\delta = -4$, $k = 3$, $l = 2$,
$\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -1$, $\mu = 1/2$, $\nu = 2$, $\tau = 3$.

Ответ: а) 416

1.5. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$, $k = 2$, $l = 3$,
$\varphi = \pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 5$, $\tau = 1$.

Ответ: а) 750

1.6. $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = -3$, $\delta = 4$, $k = 2$, $l = 4$,
$\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -4$, $\nu = 2$, $\tau = 3$.

Ответ: а) -2116

1.7. $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$, $k = 2$, $l = 5$,
$\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 1$, $\mu - 3$, $\nu = 0$, $\tau = -1/2$.

Ответ: а) 165

1.8. $\alpha = 5, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -4, \quad k = 3, \quad l = 2,$
$\varphi = \pi, \quad \lambda = 1, \quad \mu = -2, \quad \nu = 3, \quad \tau = -4.$

Ответ: а) -583

1.9. $\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 5, \quad k = 3, \quad l = 6,$
$\varphi = 4\pi/3, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1, \quad \tau = 1.$

Ответ: а) 1287

1.10. $\alpha = 5, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 2, \quad k = 4, \quad l = 1,$
$\varphi = 2\pi/3, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -1/2, \quad \nu = 3, \quad \tau = 0.$

Ответ: а) 2337

1.11. $\alpha = -2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 3, \quad \delta = -6, \quad k = 6, \quad l = 3,$
$\varphi = 5\pi/3, \quad \lambda = 3, \quad \mu = -1/3, \quad \nu = 1, \quad \tau = 2.$

Ответ: а) -936

1.12. $\alpha = -2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 1, \quad k = 3, \quad l = 2,$
$\varphi = 7\pi/3, \quad \lambda = -1/2, \quad \mu = -3, \quad \nu = 1, \quad \tau = 2.$

Ответ: а) 320

1.13. $\alpha = 4, \quad \beta = 3, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 2, \quad k = 4, \quad l = 5,$
$\varphi = 3\pi/2, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -3, \quad \nu = 1, \quad \tau = 2.$

Ответ: а) 352

1.14. $\alpha = -2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 1, \quad k = 2, \quad l = 5,$
$\varphi = 2\pi, \quad \lambda = -3, \quad \mu = 4, \quad \nu = 2, \quad \tau = 3.$

Ответ: а) 1809

1.15. $\alpha = 4, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 2, \quad k = 4, \quad l = 7,$
$\varphi = 4\pi/3, \quad \lambda = -3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 2, \quad \tau = -1.$

Ответ: а) -5962

1.16. $\alpha = -5, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 4, \quad k = 5, \quad l = 4,$
$\varphi = \pi, \quad \lambda = -3, \quad \mu = 1/2, \quad \nu = -1, \quad \tau = 1.$

Ответ: а)3348

1.17. $\alpha = 5, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4, \quad k = 2, \quad l = 5,$

$\varphi = \pi/2, \quad \lambda = 2, \quad \mu = 3, \quad \nu = 1, \quad \tau = -2.$

Ответ: а) − 2076

1.18. $\alpha = 7, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 6, \quad k = 3, \quad l = 4,$

$\varphi = 5\pi/3, \quad \lambda = 3, \quad \mu = -1/2, \quad \nu = 2, \quad \tau = 1.$

Ответ: а)1728

1.19. $\alpha = 4, \quad \beta = -5, \quad \gamma = -1, \quad \delta = -3, \quad k = 6, \quad l = 3,$

$\varphi = 2\pi/3, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -5, \quad \nu = 1, \quad \tau = 2.$

Ответ: а)1044

1.20. $\alpha = 3, \quad \beta = -5, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 3, \quad k = 1, \quad l = 6,$

$\varphi = 3\pi/2, \quad \lambda = 4, \quad \mu = 5, \quad \nu = 1, \quad \tau = -2.$

Ответ: а)1994

1.21. $\alpha = -5, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 7, \quad k = 2, \quad l = 7,$

$\varphi = \pi, \quad \lambda = -2, \quad \mu = 5, \quad \nu = 1, \quad \tau = 3.$

Ответ: а) 29 767

1.22. $\alpha = -7, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \quad k = 2, \quad l = 9,$

$\varphi = \pi/3, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2, \quad \nu = -1, \quad \tau = 3.$

Ответ: а) 20 758

1.23. $\alpha = 5, \quad \beta = 4, \quad \gamma = -6, \quad \delta = 2, \quad k = 2, \quad l = 9,$

$\varphi = 2\pi/3, \quad \lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1, \quad \tau = -1/2.$

Ответ: а) 2751

1.24. $\alpha = -5, \quad \beta = -7, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 2, \quad k = 2, \quad l = 11,$

$\varphi = 3\pi/2, \quad \lambda = -3, \quad \mu = 4, \quad \nu = -1, \quad \tau = 2.$

Ответ: а) 38 587

1.25. $\alpha = 5, \quad \beta = -8, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 3, \quad k = 4, \quad l = 3,$

$\varphi = 4\pi/3, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -3, \quad \nu = 1, \quad \tau =.$

Ответ: а) 1048

Задание 2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:

а) модуль вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$;

в) проекции вектора $\vec{\boldsymbol{c}}$ на вектор $\vec{\boldsymbol{d}}$.

2.1. $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}$.

Ответ: а)$\sqrt{4216}$; б) 314

2.2. $A(4,3,-2)$, $B(-3,-1,4)$, $C(2,2,1)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{CB}$.

Ответ: а)$\sqrt{82}$; б) -50

2.3. $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-3)$, $C(1,4,2)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}$.

Ответ: а)$\sqrt{1750}$; б) -53

2.4. $A(2,4,3)$, $B(3,\ 1,-4)$, $C(-1,2,2)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}$.

Ответ: а)$\sqrt{300}$; б) 78

2.5. $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AB}$.

Ответ: а) 11; б) -20

2.6. $A(-1,-2,4)$, $B(-1,\ 3,5)$, $C(1,4,2)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}$.

Ответ: а)$\sqrt{410}$; б) 70

2.7. $A(1,3,2)$, $B(-2,\ 4,-1)$, $C(1,3,-2)$,

$\vec{\boldsymbol{a}} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AB}$.

Ответ: а)$\sqrt{491}$; б) 4

2.8. $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$,

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$

Ответ: а)$\sqrt{1957}$; б) -29

2.9. $A(3,4,-4), \quad B(-2,1,2), \quad C(2,-3,1),$

$\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{1265}$; б) -294

2.10. $A(0,2,5), \quad B(2,-3,4), \quad C(3,2,-5),$

$\vec{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BA}.$

Ответ: а)$\sqrt{1646}$; б) -420

2.11. $A(-2,-3,-4), \quad B(2,-4,0), \quad C(1,4,5),$

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$

Ответ: а)$\sqrt{1777}$; б) 80

2.12. $A(-2,-3,-2), \quad B(1,4,2), \quad C(1,-3,\ 3),$

$\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{856}$; б) 238

2.13. $A(5,6,1), \quad B(-2,4,-1), \quad C(3,-3,3),$

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$

Ответ: а)$\sqrt{2649}$; б) -160

2.14. $A(10,6,3), \quad B(-2,4,5), \quad C(3,-4,-6),$

$\vec{a} = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{9470}$; б) -298

2.15. $A(3,2,4), \quad B(-2,1,3), \quad C(2,-2,-1),$

$\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$

Ответ: а)$\sqrt{362}$; б) 92

2.16. $A(-2,3,-4), \quad B(3,-1,2), \quad C(4,2,4),$

$\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$

Ответ: а)$\sqrt{4109}$; б) 554

2.17. $A(4,5,3), \quad B(-4,2,3), \quad C(5,-6,-2),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AB}.$

Ответ: а)$\sqrt{12\,089}$; б) -263

2.18. $A(2,4,6), \quad B(-3,5,1), \quad C(4,-5,-4),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{BA}.$

Ответ: а)$\sqrt{5988}$; б) 986

2.19. $A(-4,-2,-5), \quad B(3,7,2), \quad C(4,6,-3),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{BC}.$

Ответ: а)$\sqrt{16\,740}$; б) -1308

2.20. $A(5,4,4), \quad B(-5,2,3), \quad C(4,2,-5),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{11\,150}$; б) 1185

2.21. $A(3,4,6), \quad B(-4,6,4), \quad C(5,-2,-3),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{BC}.$

Ответ: а)$\sqrt{18\,666}$; б) -487

2.22. $A(-5,-2,-6), \quad B(3,4,5), \quad C(2,-5,4),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{BC}.$

Ответ: а)$\sqrt{11\,387}$; б) 1549

2.23. $A(3,4,1), \quad B(5,-2,6), \quad C(4,2,-7),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}, \quad \boldsymbol{b} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{6826}$; б) -1120

2.24. $A(4,3,2), \quad B(-4,-3,5), \quad C(6,4,-3),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AC}.$

Ответ: а)$\sqrt{1885}$; б) -434

2.25. $A(-5,4,3), \quad B(4,5,2), \quad C(2,7,-4),$

$\vec{\boldsymbol{a}} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{AB}.$

Ответ: а)$\sqrt{608}$; б) -248

Задание 3. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

3.1. $\vec{a} = (5, 4, 1)$, $\vec{b} = (-3, 5, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 3)$, $\vec{d} = (7, 23, 4)$.

Ответ: (3, 2, -1)

3.2. $\vec{a} = (2, -1, 4)$, $\vec{b} = (-3, 0, -2)$, $\vec{c} = (4, 5, -3)$, $\vec{d} = (0, 11, -14)$.

Ответ: (-1, 2, 2)

3.3. $\vec{a} = (-1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, -5)$, $\vec{c} = (-6, 3, -1)$, $\vec{d} = (28, -19, -7)$.

Ответ: (2, 3, -4)

3.4. $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (-2, 5, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, -4,)$, $\vec{d} = (13, -5, -4)$.

Ответ: (2, -1, 3)

3.5. $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (-5, -3, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, 0)$, $\vec{d} = (-15, -10, 5)$.

Ответ: (2, 3, -1)

3.6. $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (-7, -2, -4)$, $\vec{c} = (-4, 0, 3)$, $\vec{d} = (16, 6, 15)$.

Ответ: (2, -2, 1)

3.7. $\vec{a} = (-3, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 7, -3)$, $\vec{c} = (-4, 3, 5)$, $\vec{d} = (-16, 33, 13)$.

Ответ: (2, 3, 4)

3.8. $\vec{a} = (5, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, -3)$, $\vec{c} = (4, -3, 5)$, $\vec{d} = (15, -15, 24)$.

Ответ: (-1, 28, 4)

3.9 $\vec{a} = (0, 2, -3)$, $\vec{b} = (4, -3, -2)$, $\vec{c} = (-5, -4, 0)$, $\vec{d} = (-19, -5, -4)$.

Ответ: (2, -1, 3)

3.10. $\vec{a} = (5, 4, 1)$, $\vec{b} = (-3, 5, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 3)$, $\vec{d} = (7, 23, 4)$.

Ответ: (3, 2, -1)

3.11. $\vec{a} = (5, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, -4, 2)$, $\vec{d} = (-9, 34, -20)$.

Ответ: (2, 4, -5)

3.12. $\vec{a} = (3, 1, -3)$, $\vec{b} = (-2, 4, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, 5)$, $\vec{d} = (1, 12, -20)$.

Ответ: (2, 1, -3)

3.13. $\vec{a} = (6, 1, -3)$, $\vec{b} = (-3, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -3, 4)$, $\vec{d} = (15, 6, -17)$.

Ответ: (1, -2, -3)

3.14. $\vec{a} = (4, 2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 1, -8)$, $\vec{c} = (2, -4, 5)$, $\vec{d} = (-12, 14, -31)$.

Ответ: (0, 2, -3)

3.15. $\vec{a} = (-2, 1, 3)$, $\vec{b} = (3, -6, 2)$, $\vec{c} = (-5, -3, -1)$, $\vec{d} = (31, -6, 22)$.

Ответ: (3, 4, -5)

3.16. $\vec{a} = (1, 3, 6)$, $\vec{b} = (-3, 4, -5)$, $\vec{c} = (1, -7, 2)$, $\vec{d} = (-2, 17, 5)$.

Ответ: (12, 1, -1)

3.17. $\vec{a} = (7, 2, 1)$, $\vec{b} = (5, 1, -2)$, $\vec{c} = (-3, 4, 5)$, $\vec{d} = (26, 11, 1)$.

Ответ: (2, 3, 1)

3.18. $\vec{a} = (3, 5, 4)$, $\vec{b} = (-2, 7, -5)$, $\vec{c} = (6, -2, 1)$, $\vec{d} = (6, -9, 22)$.

Ответ: (2, -3, -1)

3.19. $\vec{a} = (5, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -5, 1)$, $\vec{c} = (-7, 4, -3)$, $\vec{d} = (36, 1, 15)$.

Ответ: (5, 2, -1)

3.20. $\vec{a} = (11, 1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 3, 4)$, $\vec{c} = (-4, -2, 7)$, $\vec{d} = (-5, 11, -15)$.

Ответ: (-1, 2, -3)

3.21. $\vec{a} = (9, 5, 3)$, $\vec{b} = (-3, 2, 1)$, $\vec{c} = (4, -7, 4)$, $\vec{d} = (-10, -13, 8)$.

Ответ: (-1, 3, 2)

3.22. $\vec{a} = (7, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, -5, 6)$, $\vec{c} = (-4, 3, -4)$, $\vec{d} = (-1, 18, -16)$.

Ответ: (2, -1, 3)

3.23. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-5, 3, -1)$, $\vec{c} = (-6, 4, 5)$, $\vec{d} = (-4, 11, 20)$.

Ответ: (3, -1, 2)

3.24. $\vec{a} = (-2, 5, 1)$, $\vec{b} = (3, 2, -7)$, $\vec{c} = (4, -3, 2)$, $\vec{d} = (-4, 22, -13)$.

Ответ: (3, 2, -1)

3.25. $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (-4, 3, -1)$, $\vec{c} = (2, 3, 4)$, $\vec{d} = (14, 14, 20)$.

Ответ: (2, 0, 4)

Решение типового варианта

Задание 1. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$,

где $|\vec{m}| = 2$; $|\vec{n}| = 5$; $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 2\pi/3$. Найти:

а) $\vec{a}\vec{b}$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(4\vec{a} - 5\vec{b})$;

в) $\cos(\widehat{2\vec{b} - \vec{a}, 4\vec{b}})$.

Решение.

а) Вычисляем

$\vec{a}\vec{b} = (-\vec{m} + 6\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + 4\vec{n}) = -3\vec{m}^2 + 14|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m}, \wedge\vec{n}) + 3\vec{n}^2 =$
$-3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5(-1/2) + 24 \cdot 5^2 = 518.$

б) Пусть $\vec{c} = 4\vec{a} - 5\vec{b} = -19\vec{m} + 4\vec{n}$. Тогда $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$,

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = (-19\vec{m} + 4\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + 4\vec{n})$$

$$= -57\vec{m}^2 - 64|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) + 16\vec{n}^2 = \sqrt{316}.$$

Окончательно получаем $\text{пр}_{\vec{b}}(4\vec{a} - 5\vec{b}) = -\frac{148}{\sqrt{316}}$.

в) Пусть $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{a} = 7\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{e} = 4\vec{b} = 12\vec{m} + 16\vec{n}$.

Тогда $cos(\widehat{\vec{d}\vec{e}}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{e}}{|\vec{d}||\vec{e}|}$,

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = (7m + 2n) \cdot (12m + 16n) =$$

$$= -84m^2 - 136|m||n|\cos(\widehat{m,n}) + 32|n|^2 = 456,$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(7m + 2n)^2} = \sqrt{49m^2 + 28|m||n|\cos(\widehat{m,n}) + 4n^2} = \sqrt{156},$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{(12m + 16n)^2} = \sqrt{144m^2 + 384|m||n|\cos(\widehat{m,n}) + 256n^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем: $cos\ (\widehat{2\vec{b} - \vec{a}, 4\vec{b}}) = 456/\sqrt{156} \approx 0{,}5$.

Задание 2. По координатам точек A(-5, 1, 6), B(1, 4, 3) и C(6, 3, 9). Найти: а) модуль вектора $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

Решение.

а) Последовательно находим $\overrightarrow{AB} = (6, 3, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (5, -1, 6)$,

$4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ = (29, 11, -6),

$\left|4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}$;

б) Имеем $\vec{a} = (29, 11, -6), \vec{b} = (5, -1, 6)$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|}, \qquad \vec{d} = (6, 3, -3),$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 30 - 3 - 18 = 9, \qquad |\vec{d}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BC} = \frac{9}{\sqrt{54}};$$

Задание 3. Доказать, что векторы $\vec{a}$ = (3, -1, 0), $\vec{b}$ = (2, 3, 1), $\vec{c}$ = (-1, 4, 3) образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ = (2, 3, 7) в этом базисе.

Решение.

Находим определитель третьего порядка, составленный из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Следовательно, так как определитель отличен от нуля, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \beta + 3\gamma = 7. \end{aligned}\right\}$$

Решаем полученную систему уравнений, применяя формулы Крамера. Находим значения определителей: $\Delta = 22$,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \qquad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \frac{\Delta(\alpha)}{\Delta} = 3, \qquad \beta = \frac{\Delta(\beta)}{\Delta} = -2, \qquad \gamma = \frac{\Delta(\gamma)}{\Delta} = 3.$$

Поэтому, искомое разложение данного вектора по заданному базису имеет вид:

$$\overrightarrow{d} = (3, -2, 3) = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}.$$

Индивидуальные типовые домашние задания по разделу «Нелинейные операции над векторами»

Задание 1. Даны векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1.1. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$;

$a)\ \overrightarrow{a}, 3\vec{b}, \overrightarrow{c}$; б) $3\overrightarrow{a}, 2\overrightarrow{c}$; в) $\vec{b}, -4\vec{c}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{c}$; д) $\overrightarrow{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -261$; б) $\sqrt{19116}$; в) 40.

1.2. $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 6j - 21\vec{k}$;

$a)\ 5\overrightarrow{a}, 2\vec{b}, \vec{c}$; б) $4\vec{b}, 2\vec{c}$; в) $\overrightarrow{a}, c$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $2\overrightarrow{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б) 0; в) 6.

1.3. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$;

$a)\ \overrightarrow{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$; б) $3\overrightarrow{a}, -7\vec{b}$; в) $\vec{c}, -2\overrightarrow{a}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{c}$; д) $3\overrightarrow{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -1840$; б)$\sqrt{612108}$; в) 0.

1.4. $\vec{a} = -7\vec{\imath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$;

$a)\ \overrightarrow{a}, -2\vec{b}, -7\vec{c}$; б) $4\vec{b}, 3\vec{c}$; в) $2\overrightarrow{a}, -7\vec{c}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $2\overrightarrow{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)0; в) 42.

1.5. $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\jmath} + 5\vec{k}$

$a)\ \overrightarrow{a}, 6\vec{b}, 3c\vec{c}$; б) $2\vec{b}, \overrightarrow{a}$; в) $\overrightarrow{a}, -4\vec{c}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{b}$; д) $\overrightarrow{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -2538$; б)$\sqrt{3192}$; в) 12.

1.6. $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$;

$a)\ \overrightarrow{a}, -3\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $5\overrightarrow{a}, 3\vec{c}$; в) $-2\overrightarrow{a}, 4\vec{b}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{c}$; д) $5\overrightarrow{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)0; в) 56.

1.7. $\vec{a} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$;

$a)\ 7\overrightarrow{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $3\overrightarrow{a}, 5\vec{c}$; в) $2\vec{b}, 4\vec{c}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $7\overrightarrow{a}, 2\vec{b}, 5\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -4480$; б)$\sqrt{78750}$; в) 0.

1.8. $\vec{a} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2i + \vec{k}$, $\vec{c} = -12i - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}$;

$a)\ 2\overrightarrow{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; б) $4\overrightarrow{a}, 3\vec{b}$; в) $\vec{b}, -4\vec{c}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{c}$; д) $2\overrightarrow{a}, 3\vec{b}, -4\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)$\sqrt{17280}$; в) 60.

1.9. $\vec{a} = -\vec{\imath} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2i - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$;

$a)\ 3\overrightarrow{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $7\overrightarrow{a}, -3\vec{c}$; в) $2\vec{b}, 3\overrightarrow{a}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $7\overrightarrow{a}, 2\vec{b}, -3\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -1680$; б)$\sqrt{219177}$; в) 78.

1.10. $\vec{a} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = i - 8\vec{k}$;

$a)\ 2\overrightarrow{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$; б) $3\vec{b}, -9\vec{c}$; в) $3\overrightarrow{a}, -5\vec{c}$; г) $\overrightarrow{a}, \vec{b}$; д) $3\overrightarrow{a}, -4\vec{b}, -9\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)$\sqrt{6488829}$; в) 630.

1.11. $\vec{a} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$;

$a)\ \overrightarrow{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $-2\vec{b}, 4\vec{c}$; в) $-3\vec{a}, 6\vec{c}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $\vec{a}, -2\vec{b}, 6\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -464$; б)$\sqrt{127488}$; в) 504.

1.12. $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 3\vec{k}$;

$a) - 2\overrightarrow{a}, \vec{b}, -2\vec{c}$; б) $4\vec{b}, 7\vec{c}$; в) $5\vec{a}, -3\vec{b}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $-2\vec{a}, 4\vec{b}, 7\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)0; в) -240.

1.13. $\vec{a} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{\imath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$;

$a)\ 2\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$; б) $-3\vec{b}, 11\vec{c}$; в) $8\vec{a}, -6\vec{c}$; г) $\vec{a}, \vec{c}$; д) $8\vec{a}, -3\vec{b}, 11\vec{c}$.

Ответ: $a)$4360; б) $33\sqrt{682}$; в)0.

1.14. $\vec{a} = -4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$;

$a)\ 5\vec{a}, 7\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $-4\vec{b}, 11\vec{a}$; в) $3\vec{a}, -7\vec{c}$; г) $\vec{a}, \vec{b}$; д) $3\vec{a}, 7\vec{b}, -2\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)0; в)672.

1.15. $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 4\vec{k}$;

$a)\ 5\vec{a}, -\vec{b}, 3\vec{c}$; б) $-3\vec{a}, 4\vec{c}$; в) $3\vec{a}, 9\vec{b}$; г) $\vec{a}, \vec{c}$; д) $3\vec{a}, -9\vec{b}, 4\vec{c}$.

Ответ: $a)\ -1170$; б)$56\sqrt{638}$; в)567.

1.16. $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 8j,\quad \vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k},\quad \vec{c} = 8\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - 8\vec{k};$

$a)$ $4\vec{a}, -6\vec{b}, 5\vec{c}$; б) $-3\vec{a}, 9\vec{c}$; в) $3\vec{b}, -8\vec{c}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $4\vec{a}, -6\vec{b}, 9\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)$252\sqrt{917}$; в) -1632.

1.17. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k},\quad \vec{b} = -9\vec{\imath} + 2\vec{k},\quad c = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k};$

$a)$ $7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$; б) $-5\vec{a}, 4\vec{b}$; в) $3\vec{b}, -8\vec{c}$; г) $\vec{a}, \vec{c}$; д) $7\vec{a}, 5\vec{b}, -c\vec{c}$.

Ответ: $a)$ -10430; б) $\sqrt{40389}$; в)984.

1.18. $\vec{a} = 9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k},\quad \vec{b} = 3\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 21\vec{k},\quad \vec{c} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k};$

$a)$ $2\vec{a}, -7\vec{b}, 3\vec{c}$; б) $-6\vec{a}, 4\vec{c}$; в) $5\vec{b}, 7\vec{a}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 4\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)$\sqrt{3365604}$; в)3255.

1.19. $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k},\quad \vec{b} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k},\quad \vec{c} = 7\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k};$

$a)$ $\vec{a}, -\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $-8\vec{b}, 5\vec{c}$; в) $-9\vec{a}, 7\vec{c}$; г) $\vec{a}, \vec{b}$; д) $a, -6\vec{b}, 5\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 1068; б)$\sqrt{478400}$; в) -315.

1.20. $\vec{a} = -9\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k},\quad \vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k},\quad \vec{c} = -5\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} - 20\vec{k};$

$a)$ $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 5\vec{c}$; б) $-6\vec{b}, 7\vec{c}$; в) $9\vec{a}, 4\vec{c}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 4\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)$\sqrt{52611300}$; в) 6660.

1.21. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 5\vec{k},\quad \vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k},\quad \vec{c} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k};$

$a)$ $-3\vec{a}, 6\vec{b}, -\vec{c}$; б) $5\vec{b}, 3\vec{c}$; в) $7\vec{a}, -4\vec{b}$; г) $\vec{b}, \vec{c}$; д) $7\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 2196; б)$\sqrt{126900}$; в) 1288.

1.22. $\vec{a} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 5\vec{k},\quad \vec{b} = \vec{\imath} - 11\vec{\jmath} + 3\vec{k},\quad \vec{c} = 5\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k};$

$a)$ $3\vec{a}, -7\vec{b}, 2\vec{c}$; б) $2\vec{b}, 6\vec{c}$; в) $-4\vec{a}, -5\vec{b}$; г) $\vec{a}, \vec{c}$; д) $-4\vec{a}, 2\vec{b}, 6\vec{c}$.

Ответ: $a)$28728; б) $\sqrt{870912}$; в) 0.

1.23. $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k},\quad \vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k},\quad \vec{c} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k};$

$a)$ $6\vec{a}, 3\vec{b}, 8\vec{c}$; б) $-7\vec{b}, 6\vec{a}$; в) $-5\vec{a}, 4\vec{c}$; г) $\vec{a}, \vec{b}$; д) $-5\vec{a}, 3\vec{b}, 4\vec{c}$.

Ответ: $a)$ 0; б)0; в) -560.

1.24. $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k},\quad \vec{b} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 4\vec{k},\quad \vec{c} = 6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k};$

$a)$ $4\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$; б) $6\vec{a}, -4\vec{c}$; в) $-2\vec{a}, 5\vec{b}$; г) $\vec{a}, \vec{c}$; д) $6\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$.

Ответ: a) 0; б) 0; в) 160.

1.25. $\vec{a} = -3i - j - 5k, \quad \vec{b} = 2i - 4j + 8k, \quad \vec{c} = 3i + 7j - k;$

a) $2\vec{a}, -\vec{b}, 3\vec{c}$; б) $-9\vec{a}, 4\vec{c}$; в) $5\vec{b}, -6\vec{c}$; г) $\vec{b}, c$; д) $2\vec{a}, 5\vec{b}, -6\vec{c}$.

Ответ: a) 0; б) $\sqrt{2519424}$; в) 900.

Задание 2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды ABCD.

2.1. $A(3,4,5), \quad B(1,2,1), \quad C(-2,-3,6), \quad D(3,-6,-3);$

a) ACD; б) $l = AB, C$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{2114}$; б) $\sqrt{\dfrac{4426}{2}}$; в) 42.

2.2. $A(-7,-5,6), \quad B(-2,5,-3), \quad C(3,-2,4), \quad D(1,2,2);$

a) BCD; б) $l = CD, A$ и B.

Ответ: а) $\sqrt{1350}$; б) $\sqrt{\frac{8937}{2}}$; в) $77/3$.

2.3. $A(1,3,1), \quad B(-1,4,6), \quad C(-2,-3,4), \quad D(3,4,-4);$

a) ACD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{891/2}$; б) $3\sqrt{2}/2$; в) 3.

2.4. $A(2,4,1), \quad B(-3,-2,4), \quad C(3,5,-2), \quad D(4,2,-3);$

a) ABD; б) $l = AC, B$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{395}$; б) $\sqrt{205}/2$; в) $25/3$.

2.5. $A(-5,-3,-4), \quad B(1,4,6), \quad C(3,2,-2), \quad D(8,-2,4);$

a) ACD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{6137/2}$; б) $\sqrt{7289}/2$; в) $304/3$.

2.6. $A(3,4,2), \quad B(-2,3,-5), \quad C(4,-3,6), \quad D(6,-5,3);$

a) ABD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а) $8\sqrt{26}$; б) $\sqrt{1826}/2$; в) 40.

2.7. $A(-4,6,3), \quad B(3,-5,1), \quad C(2,-6,4), \quad D(2,-4,5);$

a) ACD; б) $l = AD, B$ и C.

Ответ: а)$\sqrt{94}$; б)$\sqrt{1554}/2$; в) $100/3$.

2.8. $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$;

a) BCD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а)$\sqrt{1150}$; б)$\sqrt{4101}$; в) $202/3$.

2.9. $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$;

a) ABD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а)$\sqrt{5040}$; б)$\sqrt{212}$; в) 52.

2.10. $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$;

a) BCD; б) $l = AD, B$ и C.

Ответ: а)$\sqrt{1422}/2$; б)$\sqrt{504}$; в) 44.

2.11. $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$;

a) ACD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а)$\sqrt{6986}/2$; б)$\sqrt{1261}$; в) $202/3$.

2.12. $A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$;

a) ABD; б) $l = AB, C$ и D.

Ответ: а)$\sqrt{1179}$; б) 17; в) 50.

2.13. $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$;

a) BCD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а)$\sqrt{276}$; б)$\sqrt{1393}$; в) $148/3$.

2.14. $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$;

a) ACD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а)$\sqrt{7281}$; б)$\sqrt{2726}$; в) 46.

2.15. $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$;

a) ABD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а)$2\sqrt{266}$; б)$\sqrt{1405}/2$; в) $286/3$.

2.16. $A(-6,4,5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$;

a) ACD; б) $l = AD, B$ и C.

Ответ: а) $2\sqrt{251}$; б) $25\sqrt{38}/2$; в) 150.

2.17. $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$;

$a)$ BCD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{2294}$; б) $2\sqrt{406}$; в) $332/3$.

2.18. $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$;

$a)$ ABD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а) $\sqrt{4140}$; б) $\sqrt{405}$; в) $82/3$.

2.19. $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$;

$a)$ BCD; б) $l = AD, B$ и C.

Ответ: а) $\sqrt{158}/2$; б) $\sqrt{2266}/2$; в) $86/3$.

2.20. $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$;

$a)$ ACD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а) $\sqrt{5957}$; б) $\sqrt{1361}$; в) $124/3$.

2.21. $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$;

$a)$ ABD; б) $l = AB, C$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{3194}$; б) $19\sqrt{2}/2$; в) 76.

2.22. $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$;

$a)$ BCD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{1802}$; б) $\sqrt{2142}/2$; в) $226/3$.

2.23. $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$;

$a)$ ACD; б) $l = BC, A$ и D.

Ответ: а) $\sqrt{24101}/2$; б) $\sqrt{2969}$; в) $4/3$.

2.24. $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$;

$a)$ ABD; б) $l = BD, A$ и C.

Ответ: а) $\sqrt{11161}$; б) $\sqrt{5629}/2$; в) 186.

2.25. $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$;

$a)$ ACD; б) $l = AD, B$ и C.

Ответ: а) $\sqrt{584}$; б) $\sqrt{9754}/2$; в) $296/3$.

Решение типового варианта

Задание 1. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$; б) найти модуль векторного произведения $3\vec{e}$ и $\vec{b}$; в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение.

а) Так как вектор $5\vec{c} = 15\vec{i} + 25\vec{j}$, то находим

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot 5\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) Поскольку $3\vec{e} = 9\vec{i} + 15\vec{j}$, то

$$3\vec{e} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\vec{i} + 27\vec{k} + 15\vec{k} - 18\vec{j} = 30\vec{i} - 18\vec{j} + 42\vec{k},$$

$$\left|3\vec{e} \times \vec{b}\right| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3\vec{b} = -3\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}, \vec{a} \cdot 3b = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12;$

г) Так как $\vec{a} = (4, 0, 4), \vec{b} = (-1, 3, 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и b не коллинеарны.

Так как скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$ то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ не ортогональны. Вычисляем скалярное произведение трех векторов:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0$, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны

Задание 2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4), B(4, 7, 3), C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD; в) объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим: $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -1), \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{\imath} + 5\vec{l} + 2\vec{k}.$$

Окончательно имеем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110}$;

б) Середина ребер AB, BC и AD находятся в точках $K(3; 5; 3{,}5), M(1{,}5; 2{,}5; 3), N(0; 1{,}5; 1{,}5)$. Далее имеем:

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN}|$, $\overrightarrow{KM} = (-1{,}5;\ -2{,}5;\ -0; 5)$, $\overrightarrow{KN} = (-3;\ -3{,}5;\ -2)$.

$$\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 \\ -3 & -3{,}5 & -2 \end{vmatrix} = 3{,}25\vec{\imath} - 1{,}5\vec{\jmath} - 2{,}25\vec{k},$$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{17{,}875}$;

в) Поскольку $V = \frac{1}{6}\ |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}|, \overrightarrow{AD} = -4, -3, -5)$,

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11, \text{ то } V = \frac{11}{6}.$$

Подписано в печать 18.12.2018. Формат 65 × 95 1/16.
Гарнитура Georgia. Бумага 80 г. Усл. печ. л. 6,84.
Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии «Дизайн-студия Б».
Ставрополь, ул. Маршала Жукова, 46. Тел. (8652) 333-131.