П.Ф. СЕВРЮКОВ

МЕХАНИКА
В ФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСНОЙ

2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

МЕХАНИКА
В ФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ
МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСНОЙ

•

МОНОГРАФИЯ

•

Ставрополь 2018

УДК 531/534
ББК 22.2
С 28

Рецензенты: **Р.Г. Закинян,** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры общей и теоретической физики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет»;
С.П. Бабёнышев, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ТК и О технологического института сервиса (филиал) Донского государственного технического университета.

Севрюков, П.Ф.
Механика в физике и астрономии может быть интересной: Монография / П.Ф. Севрюков. – Ставрополь : Дизайн-студия Б, 2018, – 232 с.

ISBN 978-5-906137-85-2

В работе рассматриваются основные положения классической механики как части физики. Изложение теоретического материала сопровождается множеством задач и примеров, от элементарных, даже школьных, до серьёзных задач, требующих знания высшей математики. Особого внимания заслуживают материалы, относящиеся к избранным вопросам механики; там автор разбирает вопросы, начиная с решения задач «на движение» школьного курса математики, до аналогии между механическими и электрическими явлениями и задач небесной механики.

Работа будет интересна как студентам бакалавриата педагогического института, так и учащимся профильных классов средних учебных заведений и школьным учителям.

УДК 531/534
ББК 22.2

ISBN 978-5-906137-85-2

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Традиционно изучение физики и в школе, и в институте, начинается с изучения механики. Этот, казалось бы, «самый понятный» раздел физики, в котором всё легко представить и «потрогать руками», традиционно достаточно плохо усваивается; хуже всего абитуриентами на вступительных экзаменах решаются именно задачи с механическим содержанием. Дело в том, что учащимся зачастую не хватает знаний математического аппарата, а многие понятия и определения, встречающиеся в школьных учебниках, не отличаются точностью.

В школьных курсах математики и физики вектор, например, определяется как величина, характеризующаяся модулем и направлением. В высшей математике задаются величины (а не одна величина), поскольку без задания алгебры (правил, по которым производятся действия над несколькими величинами) эти величины нельзя определять вообще. Только складывание названных величин по правилу параллелограмма задаёт векторы. Пример Н.Е. Жуковского, приведённый около ста лет назад студентам-математикам Московского университета о регулировщике на углу у университета уже стал классикой. Вспомним стрелки в законе Кирхгофа. Они относятся к токам, которые являются величинами алгебраическими!

Стоит вспомнить ещё и о том факте, что в курсе физики различаются свободные векторы, допускающие параллельный перенос, и векторы связанные, которые могут переноситься только вдоль собственной линии действия.

Самым простым видом движения в природе является ***механическое движение***, состоящее в изменении взаимного расположения тел и (или) их частей в пространстве с течением времени. Закономерности механического движения изучает раздел физики, называемый ***механикой***. В более узком смысле слова под механикой обычно понимают классическую механику, изучающую движение макроскопических тел со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме.

Механические свойства тел определяются их химической природой, внутренним строением, агрегатным состоянием, рассмотрение которых является предметом не механики, а других разделов физики. Для описания реальных движущихся тел в механике используются упрощённые модели, выбор которых в каждом конкретном случае определён условиями поставленной задачи.

Механика тела в школьном курсе сводится к механике точки. Пожалуй, только в задачах с моментом сил вращения и задачах на опрокидывание рассматриваются материальные тела.

Материальная точка определяет в школьных учебниках как тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Интуитивно всё понятно. Вспомним определение Евклида: «Точка – это то, что не имеет размера». Евклид говорил о точке геометрической; в физике речь идёт о теле (имеющем массу!) размером которого можно пренебречь. **Материальная точка имеет массу!**

*В классической механике **масса** движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, т.е. она рассматривается как постоянная величина, являющаяся мерой инертности тела и его гравитационных свойств.*

Материальной точкой называется тело, имеющее массу, размеры и форма которого несущественны в условиях данной задачи. В дальнейшем для краткости мы будем говорить просто «точка», а также использовать термин «точечное тело».

Любое протяжённое тело или систему тел можно рассматривать как систему материальных точек. Для этого все протяжённые тела, входящие в состав системы, следует мысленно разделить на малые элементы – достаточно малые для того, чтобы каждый из них рассматривать как материальную точку.

Абсолютно твёрдым (абсолютно жёстким) ***телом*** называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого не изменяется в процессе движения.

Физики называют абсолютно твёрдым телом такое тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Иными словами, абсолютно твёрдым называют тело, размер и форма которого не зависят от внешних воздействий. Его можно рассматривать как систему материальных точек, жёстко связанных между собой.

Другие модели используются в механике сплошной среды. В классической механике только пружины, являющиеся связующими частями между телами в задачах механики, допускают деформацию.

В классической механике изучается простейшая форма движения материи – ***механическое движение***, *т.е. происходящее* ***во времени*** *изменение положения одного тела относительно другого тела, с которым связана система координат, называемая* ***системой отсчёта***. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной.

При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчёта обычно принимают систему осей, неизменно связанных с Землёй. Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчёта не изменяется, находится в состоянии относительного покоя (по отношению к этой системе).

Пространство в механике рассматривается как трёхмерное евклидово пространство, и все измерения в нём производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается один метр.

Время в классической механике предполагается универсальным, т.е. одинаковым во всех системах отсчёта и не зависящим от движения одной системы относительно другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина. За единицу времени принимается одна секунда.

Все кинематические величины, характеризующие движение твёрдого тела и движение отдельной его точки (расстояния, скорости, ускорения и т.д.), рассматриваются как функции времени.

Хотя евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближённо, тем не менее, они позволяют с достаточной для практики точностью изучать движения, скорости которых далеки от скорости света.

При рассмотрении реальной физической задачи выбор системы отсчёта производится так, чтобы максимально упростить решение поставленной задачи.

Очевидно, что из разных систем отсчёта движение одного и того же тела выглядит по-разному. В этом заключается ***относительность механического движения*** и его кинематических параметров.

Механическое движение проявляет себя только в относительной форме. Однако сам факт существования движения является ***абсолютным***.

I. Кинематика

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с причинами, определяющими это движение.

Слово кинематика происходит от греческого «кинема», что означает «движение».

Движение любой механической системы может рассматриваться как движение составляющих её точечных элементов, именно поэтому важно подробно остановиться на основных понятиях кинематики точки.

I. Кинематика материальной точки.

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчёта, называется ***траекторией точки***.

По виду траекторий все движения точки делятся на *прямолинейные* и *криволинейные.*

Изучение движения точки заключается в определении основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчёта, а также её скорости и ускорения в любой момент времени. Эта задача решается различными способами.

Существуют три способа задания движения точки: *векторный*, *координатный* и *естественный.*

1.1. ***Векторный способ задания движения.***

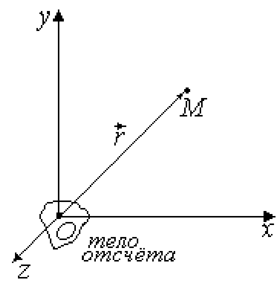


Рис. 1

Положение точки M в системе отсчёта определяет ***радиус-вектор.*** Радиус-вектор $\vec{r}$ точки M – это вектор, начало которого совпадает с началом координат O, а конец – с самой точкой M. Оперируя непосредственно с радиус-векторами и их производными, мы имеем дело с ***векторным способом*** описания движения материальной точки.

Радиус-вектор с течением времени t, вообще говоря, изменяется – точка движется. Движение материальной точки полностью определено, если известна зависимость

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

Теперь мы можем определить траекторию точки как геометрическое место концов радиус-вектора точки.

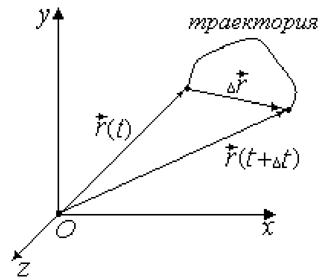


Рис. 2

Если траектория представляет собой плоскую кривую (такую кривую, все точки которой принадлежат одной и той же плоскости), то говорят о движении точки в плоскости. Если траектория точки – прямая линия, то движение точки называют прямолинейным.

Изменение положения точки в пространстве характеризуется ***перемещением***. Перемещение точки $\Delta\vec{r}$ за промежуток времени от момента времени t до $t+\Delta t$ называют вектор, начало которого совпадает с положением точки в момент t, конец – с положением точки в момент $t+\Delta t$. Очевидно, что

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

так что перемещение можно определить как приращение радиус-вектора $\vec{r}(t)$ за время Δt. В общем случае модуль вектора перемещения $\left|\Delta\vec{r}\right|$ не может превышать длины траектории l:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \le l\,.$$

Пусть S – расстояние, пройденное точкой вдоль траектории. Момент времени $t=t_0$, ранее которого движение точки не рассматривается, называется начальным моментом времени, положение точки в этот момент (точка A на рисунке) – начальным положением. Выбор начала отсчёта времени произволен, поэтому очень часто полагают $t_0=0$.

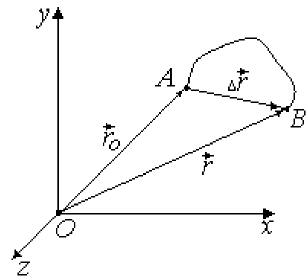


Рис. 3

Путь S, пройденный точкой из её начального положения, является скалярной функцией времени:

$$S=S\,(t).$$

Функция $S(t)$ по определению неотрицательна и является непрерывной; в процессе движения пройденный путь не может убывать.

Если точка движется по дуге траектории, не меняя направления движения, то пройденный ею за время движения от A к B путь будет равен длине дуги $\overset{\frown}{AB}$:

$$S_{AB}=l.$$

Если точка изменяет направление движения и какие-то участки траектории проходятся многократно, то пройденный путь окажется больше длины траектории. Например, если точка, пройдя от A до B, изменила направление движения и вернулась в точку A, то её перемещение $\Delta\vec{r}=0$, длина траектории l, а пройденный путь $S=2l$. В общем случае

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \leq l \leq S;$$

только в том случае, когда точка движется по прямой, не изменяя направления движения (скорость не изменяет знак),

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = l = S\,.$$

Быстроту движения (или изменения положения точки) характеризует ***скорость***.

Средней скоростью за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ называют отношение перемещения $\Delta\vec{r}$ к времени Δt, за которое оно произошло:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Средняя скорость (ясно, что речь идёт о так называемой средней скорости по перемещению) – векторная величина, совпадающая по направлению с перемещением $\Delta\vec{r}$. Очевидно, что $\vec{v}_{cp}$ зависит и от t, и от времени усреднения Δt.

Если уменьшать время усреднения Δt, то можно показать, что в конце концов зависимость $\vec{v}_{cp}$ от Δt исчезнет. В этом случае говорят о мгновенной скорости $\vec{v}_{cp}(t)$. Иными словами, ***мгновенная скорость*** $\vec{v}(t)$ – это предельное значение её средней скорости $\vec{v}_{cp}$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ при переходе к пределу при Δt, стремящемся к нулю.

$$\vec{v}\left(t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \qquad (2)$$

Последний символ $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ используется в тех случаях, когда можно говорить о том, что приращение Δt достаточно мало для того, чтобы зависимость отношения $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ от Δt исчезла. Такого рода математическая операция называется дифференцированием радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t; мгновенная скорость $\vec{v}(t)$ представляет собой производную радиус-вектора по времени.

Если скорость точки $\vec{v}(t)$ с течением времени не изменяется, такое движение называется ***равномерным и прямолинейным***. В этом случае $\vec{v}(t) = \vec{v}_{ср} = \overrightarrow{const}$.

Мы уже упоминали, что средняя скорость по перемещению $\vec{v}_{ср}$ сонаправлена с $\Delta\vec{r}$.

Рассмотрим векторы перемещения $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$, …, соответствующие промежуткам времени $\Delta t_1 < \Delta t_2 < \Delta t_3$, …

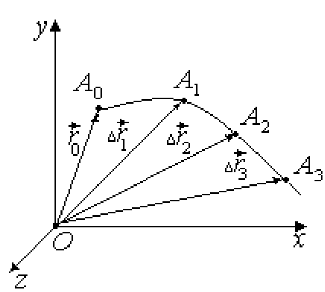


Рис. 4

Из рисунка видно, что чем меньше время усреднения Δt, тем ближе дуга A_0A к стягивающей дугу хорде; секущая превращается в касательную.

Таком образом, при переходе к предельно малому времени усреднения dt можно говорить о том, что мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Направление вектора мгновенной скорости (в дальнейшем мы будем слово «мгновенная» опускать) совпадает с ***направлением движения точки***.

В механике иногда встречается и среднепутевая скорость. При этом речь идёт о том, как быстро изменяется пройденный точкой путь, измеряемый вдоль траектории движения. ***Среднепутевой скоростью*** за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ называют отношение пути S, пройденного за этот промежуток времени, к Δt:

$$v_{cn} = \frac{S\left(t+\Delta t\right) - S\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Среднепутевая скорость – неотрицательная скалярная величина, причём из неравенства $\Delta S \geq \left| \Delta\vec{r} \right|$ следует, что $v_{\text{сп}} \geq \left| \Delta\vec{v}_{cp} \right|$.

При переходе к предельно малому времени усреднения Δt из рисунка 4 легко видеть, что чем меньше Δt, тем ближе длина дуги к длине стягивающей её хорды: $\Delta S \to \left| \Delta\vec{r} \right|$. При достаточно малых Δt можно говорить о том, что эти величины совпадают: $dS = \left| d\vec{r} \right|$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

Если величина скорости (её модуль) в процессе движения не изменяется, то можно говорить о равномерном (пусть и по криволинейной траектории) движении.

Скорость изменения скорости характеризует величина, называемая ускорением. ***Ускорение*** представляет собой производную вектора скорости по времени:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3}$$

Если ускорение сохраняет свой модуль и направление, то точка движется ***равноускоренно и прямолинейно*** (сохранение только величины ускорения, как правило, не говорит о равноускоренном движении).

Иногда приходится решать и обратную задачу: находить $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$, зная $\vec{a}(t)$. Подробнее о двух задачах механики мы поговорим при рассмотрении динамики.

В общем случае движения точки с переменным ускорением необходимо знать также и начальные условия движения точки (какую скорость $\vec{v}_0$ и положение $\vec{r}_0$ имела точка в начальный момент времени t_0).

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt, \text{ где } \vec{r}_0 = \vec{r}(0),$$

$$S(t)=\int_0^t \left|\vec{v}(t)\right| dt.$$

В частности, при $\vec{a}=\overrightarrow{const}$,

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2.$$

1.2. *Координатный способ.*

Этот способ задания движения тесно связан с векторным, но гораздо проще для понимания. С выбранным телом отсчёта жёстко связывается определённая система координат (декартова прямоугольная, косоугольная или криволинейная). Выбор той или иной системы координат определяется рядом соображений: характером или симметрией задачи, постановкой вопроса, а также стремлением упростить само решение. Мы остановимся только на декартовой прямоугольной системе координат.

Запишем проекции на оси *x*, *y*, *z* радиус вектора $\vec{r}(t)$, характеризующего положение интересующей нас точки относительно начала координат *O* в момент времени *t*:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{4}$$

Зная зависимость этих координат от времени – закон движения точки, можно найти положение точки в любой момент времени, её скорость и ускорение. Действительно, спроецировав равенства (2) и (3), например, на координатные оси, получим формулы

$$\begin{cases} v_x\left(t\right) = \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y\left(t\right) = \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z\left(t\right) = \dfrac{dz}{dt}; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_x\left(t\right) = \dfrac{dv_x}{dt}, \\ a_y\left(t\right) = \dfrac{dv_y}{dt}, \\ a_z\left(t\right) = \dfrac{dv_z}{dt}. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, соотношения (4) полностью определяют движение точки. Зная их, можно найти не только положение точки в любой момент времени, но и её кинематические характеристики, например, модули скорости и ускорения точки определяются соотношениями

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{7}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{8}$$

А направления самих векторов в пространстве определяются так называемыми направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v},\ \cos\beta = \frac{v_y}{v},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{v};\ \cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a},$$

где α, β, γ – углы между векторами скорости и ускорения и координатными осями соответственно, ясно, что они при одинаковых буквенных обозначениях различны.

Примечание. С точки зрения математики соотношения (4) представляют собой параметрическое задание траектории движения. Исключив из этой системы время как параметр, получим уравнение траектории.

Решение обратной задачи – нахождение скорости и закона движения – выполняется как в векторном случае. Напомню, что для решения подобной задачи необходимы начальные условия задачи.

Задача 1. Движение точки задано уравнениями: $x = 4\cos\frac{\pi}{6}t$, $y = 3\sin\frac{\pi}{6}t$ (x и y в см). Определить траекторию её движения. Найти положение точки, её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$с.

Решение. 1) Возведя уравнения движения в квадрат, имеем после сложения двух полученных уравнений уравнение траектории

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Это эллипс. С учётом того, что в первой четверти синус возрастает, а косинус убывает, можно сказать, что точка движется по эллипсу против направления движения часовой стрелки, начав своё движение из точки с координатами (4;0).

2) Положение точки в заданный по условию момент времени:

$x = 4\cos\frac{\pi}{6}t = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2$ см.; $y = 3\sin\frac{\pi}{6}t = 3\sin\frac{\pi}{3} = 1{,}5\sqrt{3} = 2{,}6$ см.

3) Определим скорость точки, найдя её координатные составляющие.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t = -\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi = -2{,}55 \text{ см/с.}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} = 0{,}8 \text{ см/с.}$$

Полная скорость точки $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2{,}55^2 + 0{,}8^2} = 2{,}67$ см/с.

4) Найдём ускорение точки, найдя его координатные составляющие.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{6}t = -\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2}{18} = -0{,}55 \text{ см/с}^2.$$

$$a_y = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{12}\sin\frac{\pi}{6}t = -\frac{\pi^2}{12}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{24} = -0{,}71 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение точки $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}55^2 + 0{,}71^2} = 0{,}9$ см/с^2.

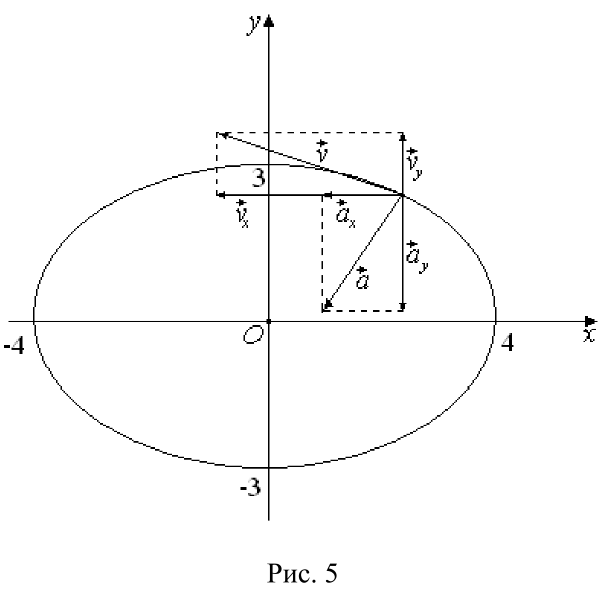


Рис. 5

Покажем решение на рисунке 5. Направление движения указывает вектор скорости, направленный по касательной к траектории. Движение, как уже было отмечено, направлено против хода часовой стрелки. Отметим и тот факт, что вектор ускорения всегда направлен внутрь кривизны траектории (далее этот факт ещё раз будет выявлен при разборе естественного способа движения точки).

Определение. Движение точки, описываемое функцией, содержащей синус или косинус (в школьных учебниках: «движение по закону синуса (косинуса)»), называется колебательным. Закон колебательного движения:

$$x = A\sin\omega t,$$

где x – координата точки, A – амплитуда колебания, ω – циклическая частота, связанная с частотой ν колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$. В свою очередь период колебаний $T = \dfrac{1}{\nu}$.

Рассмотрев в задаче 1 законы изменения скорости и ускорения, относящиеся к одной координате, мы достаточно подробно разобрали колебательное движение точки.

Автор не будет отдельно рассматривать кинематику колебательного движения, поскольку простое рассмотрение колебания без рассмотрения его причины и характерных динамических особенностей теряет смысл.

Примечание. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний точки (это следует из задачи 1) даёт движение точки по траектории, представляющей собой эллипс. Это движение, как и колебание, будет периодическим.

Задача 2. Движение точки задано уравнениями: $x = 4\cos^2\frac{\pi}{6}t$, $y = 3\sin^2\frac{\pi}{6}t$ (x и y в см). Определить траекторию её движения.

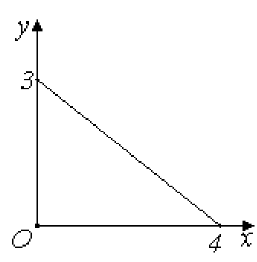
Решение. Эта задача внешне очень похожа на задачу 1. Исключая время из уравнений движения, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \text{ или в привычном виде: } y=3-\frac{3}{4}x\,.$$

Покажем вид траектории, обратив внимание на то, что $0 \leq x \leq 4$; $0 \leq y \leq 3$, поскольку $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ ограничены.

При детальном анализе движения точки, можно говорить о её колебательном движении на отрезке длиной 5 см, поскольку

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$



Задача 3. Точка движется по прямой так, что её координата изменяется по закону $x = t^2 - 4t + 10$ (м), где t – время движения в секундах. Для момента времени $t = 5$ с. найти координату точки. Найти перемещение

точки, совершённое за первые пять секунд движения, и расстояние, пройденное за это время.

Решение.

Координата точки при $t = 5$ с.: $x(5) = 25 – 20 + 10 = 15$ м.

Начальная координата точки при $t_0 = 0$ с.: $x(0) = 10$ м.

Перемещение найдём как разность конечной и начальной координат точки: $x = |x(5)-x(0)| = |15-10| = 5$ м.

Найдём закон изменения скорости с течением времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 4 \text{ м/с}.$$

Очевидно, что первые две секунды движения точка движется в сторону, противоположную направлению оси Ox ($v<0$), останавливается ($v(2) = 0$ м/с), а потом движется в направлении координатной оси.

Найдём координату точки, к которой вектор скорости изменяет направление: $x(2) = 4 – 8 + 10 = 6$ м.

В первые две секунды был пройден путь $|x(2)-x(0)| = 4$ м при приближении точки к началу координат.

В последующие три секунды был пройден путь $|x(5)-x(2)| = 9$ м.

Пройденное за пять секунд расстояние составит $S = 4 + 9 = 13$ м.

1.3. *Естественный способ.*

Этот способ задания движения точки принципиально отличается от двух ранее рассмотренных: система координат при задании движения связана с самой движущейся точкой; движущаяся точка является началом координат.

Этот способ задания движения применяется в случае, когда траектория точки заранее известна. Траекторией может быть как прямая, так и кривая линия.

Выберем на траектории неподвижную точку O, которую назовём началом отсчёта дуговой координаты. Положение движущейся точки M на траектории будем определять дуговой координатой, т.е. расстоянием $\overset{\frown}{OM} = S$, отложенным по траектории от начала отсчёта O. Расстояния, отложенные в одну сторону от точки O, будем считать положительными, а в противоположную – отрицательными, т.е. установим положительного направление отсчёта дуговой координаты.

При движении точки M расстояние S от этой точки до неподвижной точки O изменяется с течением времени, т.е. *дуговая координата S является функцией времени*:

$$S = f(t). \tag{9}$$

Эта зависимость называется *уравнением движения точки*. Если вид функции $f(t)$ известен, то для каждого значения t можно найти значение S, отложить соответствующее расстояние по траектории и указать, где находиться движущаяся точка M в этот момент времени.

Движение точки определено, если известны следующие элементы: траектория точки, начало и направление отсчёта дуговой координаты и уравнение движения $S = f(t)$.

Примечание. Дуговую координату точки не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой. Дуговая координата S точки M в некоторый момент времени t может равняться пути, пройденному точкой за промежуток времени $[0; t]$ только в том случае, если движение начинается из точки O и совершается в положительном направлении (без изменения направления движения по траектории).

1.3.1. *Скорость и ускорение материальной точки.*

Определим скорость точки в том случае, когда её движение задано естественным способом, т.е. известны: её траектория AB, начало и направление отсчёта дуговой координаты и уравнение движения точки $S = f(t)$.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – положение M_1. Дуговые координаты этих точек имеют следующие значения:

$$S = OM;\ S_1 = OM_1 = OM + MM_1 = S + \Delta S.$$

Приращение дуговой координаты

$$\varDelta S = \overset{\frown}{MM_1}.$$

Проведём из произвольного центра *O'* в точку *M* радиус-вектор $\vec{r}$ и определим скорость точки в момент *t* по формуле (2):

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

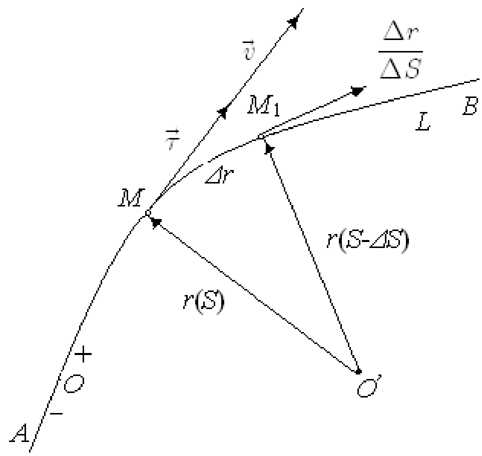


Рис. 6

Введём в качестве промежуточной переменной дуговую координату *S*, от которой зависит радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки. Действительно, каждому значению *S* соответствует определённое значение $\vec{r}$, т.е. $\vec{r}$ можно рассматривать не только как функцию *t*, но и как функцию *S*, полагая $\vec{r} = \vec{r}(S)$. Тогда, дифференцирование сложной функции даёт

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}.$$

Здесь

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}.$$

Вектор $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$ направлен так же, как вектор $\Delta \vec{r}$. При $\Delta S \to 0$ его направление стремиться к направлению касательной, проведённой из точки *M* в сторону увеличения дуговой координаты *S*. Модуль этого вектора стремиться к единице:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1.$$

Таким образом, вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты. Вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$ является ортом (единичным вектором) этого направления. Обозначим этот орт $\vec{\tau}$ (см. рис.6):

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}. \tag{10}$$

Пользуясь формулой (10), получаем вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{dS}{dt}. \tag{11}$$

Производная $\frac{dS}{dt}$ в выражении (11) представляет собой проекцию скорости $\vec{v}$ на касательную к траектории движения, т.е. определяет *алгебраическую величину скорости*.

Условимся обозначать алгебраическую величину скорости $\tilde{v}$, а модуль скорости – буквой v. Тогда

$$\tilde{v} = \frac{dS}{dt}, \tag{12}$$

а

$$v = \left|\tilde{v}\right| = \left|\frac{dS}{dt}\right|, \tag{13}$$

т.е. *модуль скорости равен модулю производной от дуговой координаты точки по времени.*

Орт касательной $\vec{\tau}$, как показано выше, всегда направлен в сторону увеличения дуговой координаты *S* по касательной к траектории.

Если в некоторый момент времени $\frac{dS}{dt} > 0$, то в этот момент функция *S* возрастает, т.е. точка движется в сторону увеличения *S*, и направление скорости $\tilde{v}$ совпадает с направлением орта $\vec{\tau}$ (см. рис. 6).

Если $\frac{dS}{dt} < 0$, то в этот момент функция *S* убывает; точка движется в сторону уменьшения *S*, и направление скорости $\tilde{v}$ противоположно направлению орта $\vec{\tau}$.

Если, непрерывно изменяясь, производная $\frac{dS}{dt}$ при переходе через значение $\frac{dS}{dt} = 0$ изменяет знак, то дуговая координата *S* в этот момент достигает максимума или минимума, т.е. изменяется направление движения точки (вспомним задачу 2 раздела 1.2).

Таким образом, знак $\tilde{v} = \dfrac{dS}{dt}$ указывает направление движения точки по траектории (я об этом факте уже упоминал без строгого обоснования).

Следствие. При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты $\left(\dfrac{dS}{dt} > 0\right)$, т.е. $\dfrac{dS}{dt} = \left|\dfrac{dS}{dt}\right|$ во все моменты времени, а поэтому в данном случае модуль скорости

$$v = \frac{dS}{dt}. \tag{14}$$

Задача 3. Точка движется по криволинейной траектории согласно уравнению $S = 50 + 6t + \dfrac{1}{12}t^3$, где t выражено в с, S – в см. Определить скорость точки в конце шестой и двенадцатой секунд.

Решение. Определим скорость точки в данный момент времени. Прежде всего, по формуле (14) определим скорость точки в любой момент времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = 6 + \frac{t^2}{4}.$$

По полученной формуле вычислим модули скоростей в моменты времени 6 и 12 с.:

при $t = 6$ с $v_6 = 15$ см/с; при $t = 12$ с $v_{12} = 42$ см/с.

Примечание. Ясно, что точка движется в положительном направлении отсчёта дуговой координаты, поэтому скорости точки $\vec{v}_6$ и $\vec{v}_{12}$ направлены так же, как орт $\vec{\tau}$.

При определении вектора ускорения при естественном способе задания движения дадим несколько вспомогательных определений, подробно не рассматривая естественные координатные оси (они в школьном курсе механики не рассматриваются!).

Определение 1. Предел $\overrightarrow{K}$, к которому стремиться вектор средней кривизны кривой $\overrightarrow{K}_{ср}$, когда ΔS стремится к нулю, называется *вектором кривизны кривой* в данной точке:

$$\overrightarrow{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta S}.$$

Определение 2. Орт касательной к кривой является вектор-функцией дуговой координаты s, так как его направление зависит от положения точки на кривой, т.е.

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(S).$$

Определение 3. *Следовательно, вектор кривизны кривой в данной точке равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате.*

$$\overrightarrow{K} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}. \qquad (15)$$

Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси. Для этого представим вектор скорости точки по формуле (11)

$$\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{dS}{dt}.$$

Определим ускорение точки, продифференцировав по t записанное выше равенство:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{dS}{dt} + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dS}{dt} + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2S}{dt^2}.$$

С учётом определения 2

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \vec{K} = \vec{n} \cdot \frac{1}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Так как проекция скорости на касательную $\tilde{v} = \dfrac{dS}{dt}$ может отличаться от модуля скорости v только знаком, то

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = v^2.$$

После подстановки всех полученных выражений получаем ускорение в виде:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} + \frac{d^2S}{dt^2} \cdot \vec{\tau} \qquad (16)$$

Ускорение точки при естественном способе задания движения равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали кривой (в сторону центра кривизны траектории) и называется ***нормальным*** (***или центростремительным***) ***ускорением***, а другой направлен по касательной и называется ***касательным (или тангенциальным) ускорением точки***:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \,, \tag{17}$$

где нормальное ускорение точки

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}, \tag{18}$$

а касательное ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} \cdot \vec{\tau} = \frac{d\tilde{v}}{dt} \cdot \vec{\tau}\,. \tag{19}$$

Скалярные множители $\dfrac{v^2}{R}$ и $\dfrac{d^2 S}{dt^2} = \dfrac{d\tilde{v}}{dt}$ в выражениях (18) и (19), определяющие нормальное и касательное ускорения точки, определяют собой проекции ускорения точки на главную нормаль и касательную.

Проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, делённому на радиус кривизны траектории в соответствующей точке:

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,. \tag{20}$$

Примечание. Эта проекция всегда положительна. Следовательно, нормальное (или центростремительное) ускорение точки всегда направлено к центру кривизны траектории и равно по модулю этой проекции.

Условимся алгебраическую величину касательного ускорения обозначать $\tilde{a}_\tau$, а его модуль - a_τ. Согласно формуле (19)

$$\tilde{a}_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt}, \tag{21}$$

т.е. *проекция ускорения точки на касательную равна второй производной от дуговой координаты по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени.*

Примечание. Эта проекция положительна при совпадении направлений вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ и орта $\vec{\tau}$, отрицательна – при разнонаправленности векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{\tau}$.

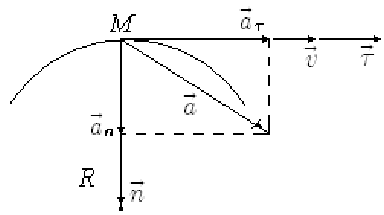


Рис. 7

Таким образом, в случае естественного способа задания движения, когда известны траектория точки, а следовательно, её радиус кривизны *R* в любой точке и уравнение движения *S*=*f*(*t*), можно найти проекции ускорения точки на естественные оси и по ним определить модуль и направление ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{\tau}}\right) = \frac{\tilde{a}_\tau}{a}; \quad \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{n}}\right) = \frac{a_n}{a}, \tag{22}$$

где $\left(\widehat{\vec{a};\vec{\tau}}\right)$ и $\left(\widehat{\vec{a};\vec{n}}\right)$ - углы, образованные направлением ускорения с принятыми направлениями касательной и главной нормали в данной точке.

Следствие 1. *Нормальное ускорение существует только при криволинейном движении точки и характеризует изменение скорости по направлению.*

При прямолинейном движении точки радиус кривизны траектории $R \to \infty$ и, следовательно, a_n=0.

Следствие 2. *Касательное ускорение точки существует лишь при неравномерном движении точки по траектории и характеризует изменение модуля скорости.*

При равномерном движении (**скорость движения точки остаётся постоянной по величине, но может изменять направление**) a_τ=0.

Задача 4. Движение материальной точки задано координатным способом. Определить для любого момента времени касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Решение. Пусть движение точки задано в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$ Легко получить составляющие скоростей и ускорений:

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z(t) = \dfrac{dz}{dt}; \end{cases} \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt}, \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt}, \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt}. \end{cases}$$

Далее находим $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Найдём скалярное произведение векторов скорости и ускорения сначала для координатного способа задания движения:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cos\left(\widehat{\vec{v}, \vec{a}}\right) = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z. \tag{*}$$

Для естественного способа движения:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \left(\vec{a}_n + \vec{a}_\tau\right) = \vec{v} \cdot \vec{a}_n + \vec{v} \cdot \vec{a}_\tau.$$

Поскольку вектор нормали $\vec{n}$, а вместе с ним и вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$, перпендикулярны касательной, вдоль которой направлены векторы касательного ускорения и скорости точки ($\vec{v} \cdot \vec{a}_n = 0$), последнее уравнение принимает (с учётом направлений векторов скорости и касательного ускорения) вид

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \left|\vec{v}\right| \cdot \tilde{a}_\tau. \tag{**}$$

С учетом формулы (*) получаем

$$\tilde{a}_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\left|\vec{v}\right|}, \tag{***}$$

при этом знак «минус» в формуле (***) может быть получен только в случае, когда векторы скорости и касательного ускорения разнонаправлены.

Далее получаем нормальную составляющую ускорения точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\,.$$

Формула (20) даёт возможность получить радиус кривизны траектории в данной точке:

$$R = \frac{v^2}{a_n}.$$

Задача 5. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Каким будет радиус кривизны R в точке наивысшего подъёма?

Решение. Примем тело за материальную точку. Ясно, что начальная вертикальная составляющая скорости равна $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, а горизонтальная составляющая скорости будет постоянной и равной $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$.

Запишем закон изменения вертикальной составляющей скорости:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Понятно, что в верхней точке траектории вертикальная составляющая скорости равна нулю, определим уравнения для нахождения ускорений:

$$\begin{cases} a_x = a_\tau = 0, \\ a_y = a_n = -g. \end{cases}$$

С учетом формулы (***) получаем ещё раз

$$\tilde{a}_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\left|\vec{v}\right|} = 0,$$

Полное ускорение равно g и в наивысшей точке подъёма равно нормальному (центростремительному) ускорению, тогда радиус кривизны траектории равен

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Ответ: $R = \dfrac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

1.3.2. Классификация движений точки по ускорениям её движения.

Выясним зависимость характера движения точки от значений её нормального и касательного ускорений.

Случай 1: $\vec{a}_n = 0$; $\vec{a}_\tau = 0$. Если в течение некоторого промежутка времени нормальное и касательное ускорения точки равны нулю, то в течение этого промежутка времени не изменяются ни направление, ни модуль скорости, т.е. точка движется прямолинейно и равномерно, и её ускорение $\vec{a} = 0$.

Случай 2. $\vec{a}_n \neq 0$; $\vec{a}_\tau = 0$. Если в течение некоторого промежутка времени не равно нулю нормальное ускорение, а касательное ускорение точки равно нулю, то в течение этого промежутка времени происходит изменение направления скорости без изменения её модуля, т.е. точка движется криволинейно равномерно, и модуль её ускорения $a = a_n = \frac{v^2}{R}$. Частным случаем такого движения может, например, быть равномерное движение по окружности.

Примечание. Если $a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = 0$ в отдельный момент времени, то точка не движется равномерно, а в этот момент времени модуль её скорости имеет максимум или минимум (критическую точку).

Случай 3. $\vec{a}_n = 0$; $\vec{a}_\tau \neq 0$. Если в течение некоторого промежутка времени равно нулю нормальное ускорение, а касательное ускорения точки не равно нулю, то в течение этого промежутка времени не происходит изменения направления скорости, а модуль скорости изменяется, т.е. точка движется по прямой неравномерно. Модуль ускорения точки в этом случае $a = a_\tau = \left|\frac{d^2S}{dt^2}\right|$.

Примечание. Если при этом направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ совпадают, то движение точки ускоренное; если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ противоположны, то движение точки замедленное.

Если $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ в некоторый момент времени, то точка не движется прямолинейно, а проходит точку перегиба траектории ($R \to \infty$) или модуль её скорости обращается в нуль (см., например, решение задачи 2 раздела 1.2, происходит изменение направления движения).

Случай 4. $\vec{a}_n \neq 0$; $\vec{a}_\tau \neq 0$. Если в течение некоторого промежутка времени ни нормальное, ни касательное ускорения точки не равны нулю, то изменяются как направление, так и модуль её скорости, т.е. точка совершает криволинейное неравномерное движение.

Если модуль касательного ускорения постоянен, т.е. $\vec{a}_\tau = \overrightarrow{const}$, то модуль скорости точки изменяется пропорционально времени, т.е. точка совершает равнопеременное движение. Составим уравнение равнопеременного движения точки, полагая, что в начальный момент времени t_0 начальная скорость точки равна v_0, а начальное значение дуговой координаты $OM_0 = S_0$. Последовательные выкладки дают:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = \tilde{a}_\tau = const; \qquad d\tilde{v} = \tilde{a}_\tau dt$$

Проинтегрируем полученное уравнение в пределах, соответствующих точкам M_0 и M:

$$\int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} d\tilde{v} = \tilde{a}_\tau \int_0^t dt\,; \; \tilde{v} - \tilde{v}_0 = \tilde{a}_\tau t\,.$$

Получаем ***формулу скорости равнопеременного движения*:**

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{a}_\tau t\,. \tag{23}$$

Далее имеем

$$\frac{dS}{dt} = \tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{a}_\tau t\,; \; dS = \tilde{v}_0 dt + \tilde{a}_\tau t dt\,.$$

Проинтегрируем последнее уравнение в пределах, соответствующих точкам M_0 и M:

$$\int_{s_0}^{s} dS = \tilde{v}_0 \int_0^t dt + \tilde{a}_\tau \int_0^t tdt,\ S - S_0 = \tilde{v}_0 t + \tilde{a}_\tau \frac{t^2}{2},$$

$$S = S_0 + \tilde{v}_0 t + \tilde{a}_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (24)$$

Получено ***уравнение равнопеременного движения точки.***

Задачи на движение встречаются и в школьном курсе математики. Эти задачи (особенно в разделе «производная») требуют к себе очень внимательного отношения. Для примера хочу рассмотреть задание №5 варианта 96 (Дорофеев Г.В. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс. – М.: Дрофа, изд. 3, 2002. – 160 с.: ил). Не секрет, что учителя математики обращаются при решении таких задач за помощью к физикам и не всегда получают квалифицированный ответ.

Задача 5. Тело движется по прямой так, что расстояние до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $S = 0{,}5t^2 - 3t + 4$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите минимальное расстояние, на которое тело приблизится к точке A.

Решение. Ясно, что речь идёт о движении точки, а не тела, поскольку имеющее размеры тело не может двигаться по прямой. Простим эту некорректность математикам и решим задачу.

Попытаемся решить данную задачу как классическую задачу «на экстремум».

$$S' = t - 3; \qquad S' = 0; \qquad t = 3.$$

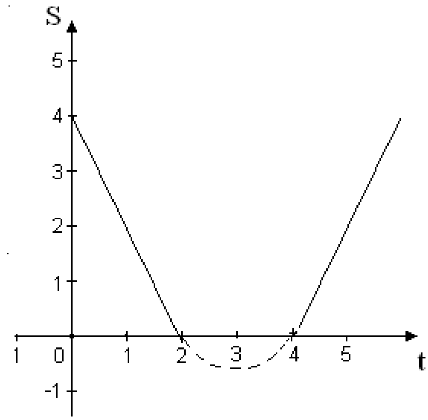
Далее $S(3) = -0{,}5$ м. «Расстояние» отрицательно, что противоречит физическому смыслу понятия «расстояние».

Ясно, что когда тело находится в точке A, расстояние между точкой и телом минимально (оно равно 0). Решение квадратного уравнения $0{,}5t^2 - 3t + 4 = 0$ даёт моменты времени 2 с и 4 с.

Примечание 1. Несложно проверить, что в интервале времени с 2 с. по 4 с. «расстояние» отрицательно. Задача имеет реальный физический смысл только первые 2! секунды движения.

Данное задание во всех знакомых мне «решебниках» выполнено с ошибками: или берётся модуль полученного расстояния, или указывается, что расстояние равно нулю при $t = 2$ и $t = 4$ (мне пришлось держать в руках более десятка «опусов»).

Напомню, что расстояние есть функция неотрицательная, непрерывная. Дадим иллюстрацию к рассмотренной задаче.



S терпит разрыв! S становится отрицательным при $2 < t < 4$.

Авторы сборника в издании 5 исправили ошибку условия: $S = 0{,}5t^2 - 3t + 8$ (м). При таких условиях задача решается как задача на экстремум.

Ответ: 0 м.

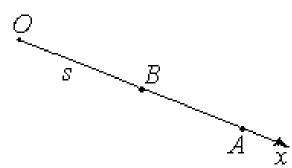
Примечание 2. Обратим внимание на то, что по условию задачи не требуется указать момент времени, в который искомое расстояние минимально. Отвечая именно на поставленный вопрос (без указания моментов времени) мы избегаем лишних ошибок.

Рассмотрим ещё несколько несложных задач кинематики точки. Обратим внимание на то, что в многочисленных тестах часто используются величины, не относящиеся к системе SI.

Задача 6. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии 30 см. от начального положения шарик побывал дважды: через 1 с. и через 3 с. после начала движения. Найти максимальное расстояние, на которое смог откатиться шарик вверх. Считать движение шарика прямолинейным и равноускоренным.

Решение. Обратим внимание на то, что трение в задаче не упоминается. В реальности шарик, вкатываясь на наклонную плоскость, замедляет своё движение, двигаясь до верхней точки 2 с., останавливается, а потом катится вниз по наклонной плоскости. Ясно, что при движении вверх и вниз шарик проходит расстояние от начала наклонной плоскости (точка A) до верхней точки (точка O) и обратно, за одно и то же время. Воспользуемся обратимостью движения.

Рассмотрим движение шарика сверху вниз. В точке O шарик начинает движение без начальной скорости и проходит расстояние $OB = S$ за одну секунду, а расстояние $OA = S + 30$ за две секунды, имея одно и то же ускорение a.



Запишем два уравнения движения для отрезков OB и OA (в тестах нет смысла подробно расписывать решение):

$$S = \frac{a \cdot 1^2}{2}; \qquad S + 30 = \frac{a \cdot 2^2}{2}.$$

Исключая a из двух записанных уравнений (например, разделив второе уравнение на первое), получаем $S = 10$ см. Окончательно $OA = S + 30 = 40$ (см).

Примечание. Выбор противоположного направления движения (снизу вверх) приводит к необходимости учитывать скорость, с которой шарик вкатывается на наклонную плоскость. Решение простой задачи при этом сильно усложняется.

Задача 7. Мяч бросили с начальной скоростью 20 м/с под углом 60^0 к горизонту. На какой высоте скорость мяча будет направлена под углом 45^0 к горизонту? Ускорение свободного падения *g* считать равным 10 м/с.

Решение. (1 способ) При решении задачи будем считать, что мяч в момент броска находится в начале координат (x_0=0; y_0=0) и имеет координатные составляющие скорости $v_{ox} = v_o \cos 60^0, v_{oy} = v_o \sin 60^0$. Ясно, что горизонтальная составляющая скорости остаётся постоянной, поскольку за счёт вертикально направленного ускорения свободного падения будет изменяться только вертикальная составляющая скорости: $v_x = v_{ox} = v_o \cos 60^0 = 10$; $v_y = v_{oy} - gt = v_o \sin 60^0 - gt = 10\sqrt{3} - 10t$.

Из условия задачи следует, что требуется найти высоту, на которой горизонтальная и вертикальная составляющие скорости равны, т.е. справедливы соотношения $v_x = v_y = 10$, $10 = 10\sqrt{3} - 10t$, откуда находим момент времени $t = \sqrt{3} - 1$, в который мяч находится на заданной высоте.

Далее определим саму высоту, записав уравнение движения мяча вдоль вертикали:

$$y = y_0 + v_{oy}t - \frac{gt^2}{2} = 10\sqrt{3}t - 5t^2 = 10\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) - 5\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 =$$

$$= 30 - 10\sqrt{3} - 15 + 10\sqrt{3} - 5 = 10 \text{ м.}$$

Примечание. (2 способ) Хорошо известная формула связи скоростей, ускорения движения точки и дуговой координаты $v^2 - v_0^2 = 2a_\tau S$ является следствием теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и формулой кинематики может считаться с большой натяжкой.

Для рассмотренной задачи эта формула даёт решение с учётом постоянства горизонтальной составляющей скорости, а, следовательно, и равенства проходимых по горизонтали расстояний за равные промежутки времени, и равенства составляющих скорости в искомой точке:

$$v^2 \sin^2 45^0 - v_0^2 \sin^2 60^0 = -2gh;$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 60^0 - v^2 \sin^2 45^0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 60^0 - v_0^2 \cos^2 60^0}{2g} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g}\left(\sin^2 60^0 - \cos^2 60^0\right) = \frac{400}{20}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 10 \,\text{м.}$$

Без подробных комментариев 2-ой способ решения не может считаться обоснованным.

2. Кинематика твёрдого тела.

Если речь идёт об абсолютно твёрдом теле, то оно в школьном курсе определяется как тело, сохраняющее свою форму и объём. В классической механике при движении **между любой парой точек абсолютно твёрдого тела сохраняются расстояния!** Именно такое определение позволяет давать корректные определения поступательного и вращательного движения твёрдого тела.

Поступательное и вращательное движения твёрдого тела являются простейшими движениями твёрдого тела.

2.1. Поступательное движение тела.

В школьных учебниках поступательное движение тела описывается как движение, при котором все точки движущегося тела описывают одинаковые траектории, проходят один и тот же путь, в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Всё перечисленное является характеристикой движения **точек поступательно движущегося тела**, но ничего не говорит о движении тела. **Тело движется поступательно, если любые две непараллельные прямые, принадлежащие этому телу, в процессе движения перемещаются параллельно самим себе.** Именно это определение позволяет с использованием определения абсолютно твёрдого тела указать на свойства точек, находящихся на теле. А далее, рассмотрев движение одной точки тела, зная его массу, а точнее, рассмотрев движение центра масс тела, мы можем полностью описать механику данного поступательно движущегося тела.

Определение. Общие для всех точек твёрдого тела, движущегося поступательно, скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ *называются скоростью и ускорением поступательного движения твёрдого тела.*

Точки поступательно движущегося тела могут описывать любые траектории.

2.2. Вращательное движение твёрдого тела.

Вращательное движение в школьных учебниках также вводится через движение точек. Попросив ученика объяснить, когда тело (твёрдое) может вращаться, мы услышим, что а) тело должно иметь ось вращения; б) все точки тела должны двигаться по окружностям. Винт имеет ось вращения, но его движение является совокупностью вращательного движения и поступательного движения вдоль оси вращения (ось скользит вдоль своей направляющей прямой): такое движение иногда называют винтовым. Все точки корзин «колеса обозрения» движутся по окружностям, однако сами корзины не вращаются, а совершают поступательное движение.

Определение. Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения.

При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Для осуществления этого движения следует неподвижно закрепить две некоторые точки твёрдого тела A и B. Тогда прямая AB будет осью вращения тела, и все точки, лежащие на этой прямой, во время движения будут оставаться неподвижными.

Вращательное движение твёрдого тела возможно, если это тело имеет две неподвижных точки.

Примечание. Это характерно для цилиндрического вращения. Для сферического вращения (волчок, карданов подвес) тело должно иметь единственную неподвижную точку. Этот тип движения в школьном курсе физики не рассматривается.

При вращении тела вокруг неподвижной оси его положение определяется углом поворота $d\vec{\varphi}$. Кинематическое уравнение вращательного движения $\varphi = \varphi(t)$.

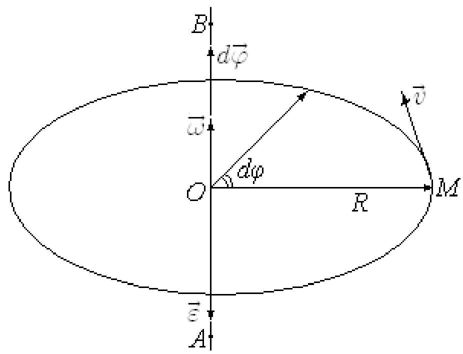


Рис. 1

Угловая скорость (скорость изменения угла поворота)

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

где $\vec{d\varphi}$ - псевдовектор (т.е. вектор, связанный с направлением вращения), направленный вдоль неподвижной оси и совпадающий по направлению с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, так что поворот тела с конца вектора (в правовинтовой системе) должен быть виден происходящим против часовой стрелки.

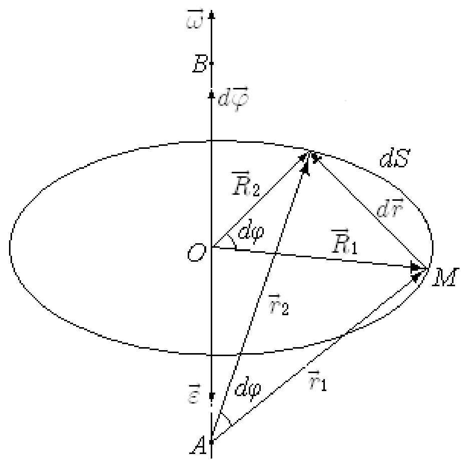


Рис. 2

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

при вращательном движении характеризует скорость изменения угловой скорости.

Определение 1. Вращение тела с постоянной угловой скоростью называется равномерным.

Уравнение равномерного вращения твёрдого тела

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Определение 2. Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называется *равнопеременным вращением.* При этом, если модуль угловой скорости увеличивается, вращение называется *равноускоренным*, а если уменьшается – *равнозамедленным*.

Уравнение равнопеременного вращения тела

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Примечание 1. На представленных выше рисунках 1 и 2 векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены автором вдоль оси вращения в разные стороны: это говорит о замедленном вращении – угловая скорость вращения тела уменьшается.

Примечание 2. Угол поворота φ измеряется в радианах и, таким образом, является величиной безразмерной. Связь между радианной и градусной мерой угла выражается соотношением

$$\varphi^0 = \frac{\varphi}{\pi} 180^0,$$

где φ^0 – величина угла в градусах.

Время совершения одного полного оборота называется периодом вращения T.

Величина, обратная периоду вращения:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

называется частотой вращения, она равна числу оборотов, совершённых телом в единицу времени.

Частота и период вращения связаны с угловой скоростью соотношениями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu .$$

Скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Обратимся к рисунку 1. R – радиус окружности произвольной точки M твёрдого тела. Связь между угловыми и линейными характеристиками: $dS=Rd\varphi$, где dS – дуга, описываемая точкой при повороте тела на угол $d\varphi$.

По формуле (13) раздела 1.3.1 определим модуль скорости точки M, называемой *вращательной, или окружной*, скоростью этой точки:

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = R\omega . \qquad (1)$$

Следствие 1. Модули вращательных скоростей различных точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения.

Ускорения точки M определим по его составляющим: касательному ускорению, направленному по касательной к окружности, и нормальному ускорению, направленному к центру O.

Эти ускорения точек вращающегося тела называются *вращательными и центростремительными ускорениями* и обозначаются $\vec{a}_{\varepsilon}$ и $\vec{a}_{\omega}$. По формулам (20) и (21) раздела 1.3.1.

$$a_{\varepsilon} = a_{\tau} = \left|\frac{d\tilde{v}}{dt}\right| = R\left|\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right| = \varepsilon R, \tag{2}$$

$$a_{\omega} = a_{n} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{3}$$

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_{\varepsilon}^2 + a_{\omega}^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{4}$$

Тангенс угла β, составленного ускорением $\vec{a}$ с радиусом окружности *OM*,

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a_{\varepsilon}}{a_{\omega}} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{5}$$

Следствие 2. Модули вращательных, центростремительных и полных ускорений точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения.

При рассмотрении рисунка 2 с использованием $\vec{r}$ - радиус-вектора точки *M* получим формулы кинематики точек вращающегося тела с использованием векторных произведений.

$$d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{r}}{dr};\ \left|d\vec{\varphi}\right| = \frac{ds}{R};\ d\vec{r} = d\vec{\varphi}\times\vec{R} = d\vec{\varphi}\times\vec{r};\ \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt};\ \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt};$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} = \vec{\omega}\times\vec{r};$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt};$$

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{R};\ \vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Примечание. Из формулы (1) следует, что угловая скорость $\omega = \frac{v}{R}$, при этом $v = \frac{S}{T}$, где S – длина дуги радиуса R, а T – время прохождения точкой этой дуги. Если точка прошла полный оборот, $S = 2\pi R$, а время T – время одного оборота, тогда угловая скорость совпадает с частотой вращения тела: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Задача 1. Минутная стрелка в 3 раза длиннее секундной. Найти отношение линейных скоростей концов стрелок.

Решение. Скорость точки, находящейся на конце стрелки, v равна произведению угловой скорости стрелки ω на длину стрелки R: $v = \omega R$. Угловая скорость вращения стрелки ω совпадает с частотой вращения этой стрелки $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Минутная стрелка делает оборот за $T_м$ = 60 мин., а секундная – за $T_с$ = 1 мин.

Найдём отношение линейных скоростей концов стрелок:

$$\frac{v_M}{v_C} = \frac{\frac{2\pi}{T_M} R_M}{\frac{2\pi}{T_C} R_C} = \frac{R_M T_C}{R_C T_M} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

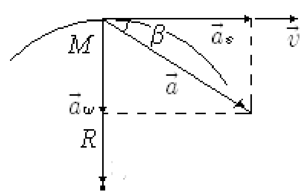
Ответ: $v_M : v_C = 1 : 20$.

Задача 2. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска v_1 = 3 м/с, а точек, находящихся на Δr = 0,1 м ближе к оси вращения, - v_2 = 2 м/с. Сколько оборотов ν делает диск в минуту?

Ответ: $\nu = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{v_1 - v_2}{\Delta r} = 95{,}5$ об/мин.

Задача 3. Диск начинает движение из состояния покоя и вращается равномерно-ускоренно. Каким будет угол между векторами скорости и ускорения произвольной точки диска, когда он сделает k оборотов?

Решение. Векторы скорости и ускорения покажем на рисунке.



Ясно, что вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, а вектор ускорения $\vec{a}$ - по секущей. Необходимо найти угол β. Поставим задачу определения тангенса угла β как тангенса угла между вращательным $\vec{a}_\varepsilon$ и полным $\vec{a}$ ускорениями.

По условию задачи вращение происходит с постоянным угловым ускорением ε из состояния покоя, тогда уравнение вращения тела имеет вид:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Сделав k оборотов, тело повернулось на угол $\varphi = 2\pi k$, тогда угловое ускорение имеет вид $\varepsilon = \dfrac{4\pi k}{t^2}$, а угловая скорость - $\omega = \dfrac{4\pi k}{t}$. Не определяя значения времени t, запишем уже известное нам соотношение:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a_\omega}{a_\varepsilon} = \frac{R\omega^2}{R\varepsilon} = \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \left(\frac{4\pi k}{t}\right)^2 \frac{t^2}{4\pi k} = 4\pi k .$$

Ответ: $\beta = \mathrm{arctg}(4\pi k)$.

Задача 4. Вращение маховика в момент пуска машины определяется уравнением $\varphi = \dfrac{t^3}{3}$, где t – в с, φ – в рад. Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 см, в момент, когда её скорость равна 8 м/с.

Решение. По уравнению вращения маховика находим его угловые скорость и ускорение:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2 ; \qquad (*)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2t . \qquad (**)$$

Найдём момент времени t_1, когда скорость точки равна 8 м/с:

$$v = \omega R;\ \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16\ \text{с}^{-1}.$$

По полученному значению ω_1 из (*) находим $t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4$ с.

По уравнению (**) вычисляем ε, а затем модули вращательного, центростремительного и полного ускорений точки в полученный момент времени:

$$\varepsilon_1=2\cdot 4=8\ \text{с}^{-2};$$

$$a_1^{\varepsilon}=\varepsilon_1 R=8\cdot 0{,}5=4\ \text{м/с}^2;$$

$$a_1^{\omega}=\omega_1^2 R=16^2\cdot 0{,}5=128\ \text{м/с}^2;$$

$$a=\sqrt{\left(a_1^{\varepsilon}\right)^2+\left(a_1^{\omega}\right)^2}=\sqrt{4^2+128^2}=128{,}06\ \text{м/с}^2.$$

Как видно, модуль полного ускорения точки очень мало отличается от модуля центростремительного ускорения точки.

Направление ускорения точки определяется углом β, образованным вектором ускорения и радиусом:

$$\mathrm{tg}\beta_1=\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}=\frac{8}{16^2}=\frac{1}{32};\ \beta_1=1^0 48'.$$

2.3. Плоское движение твёрдого тела.

Определение. Плоским или плоскопараллельным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Следствие 1. Плоская фигура, образованная сечением тела этой неподвижной плоскости, во всё время движения остаётся в этой плоскости.

Предположим, что плоская фигура переместилась на плоскости из положения I в положение II (см. рис.1). Отметим два положения отрезка *AB*, принадлежащего фигуре.

Покажем, что перемещение фигуры можно осуществить совокупностью двух перемещений: поступательного и поворота.

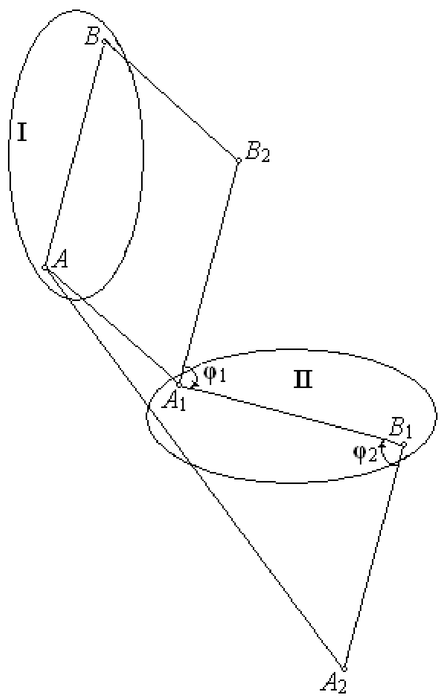


Рис. 1

Вариант 1. Переместим фигуру поступательно из положения *AB* в положение A_1B_2, т.е. так, чтобы точка *A* переместилась в новое положение A_1, а точка *B* описала траекторию тождественную траектории точки *A* и заняла положение B_2. Затем повернём фигуру вокруг точки A_1 на угол φ_1 так, чтобы точка B_2 совпала с точкой B_1.

Вариант 2. Переместим фигуру поступательно из положения AB в положение A_2B_1, затем повернём фигуру вокруг точки B_1 на угол φ_2 так, чтобы точка A_2 совпала с точкой A_1.

Примечание. Вариантов перемещений может быть столько, сколько точек у плоской фигуры, т.е. бесчисленное множество. Как видно, поступательное перемещение плоской фигуры различно в различных вариантах, а величина угла поворота и направление поворота одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Свойство. Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в её плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой полюсом, и поворота вокруг полюса.

При этом *поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.*

Примечание. При изучении динамики в качестве полюса, как правило, выбирается центр масс твёрдого тела: это существенно упрощает запись уравнений движения тела.

Теорема 1. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса: $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{OA}$.

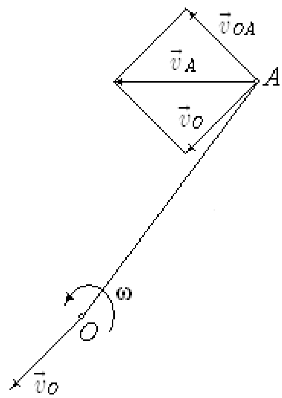


Рис. 2

Вращательная скорость $\vec{v}_{OA}$ направлена перпендикулярно к отрезку OA в сторону вращения фигуры и имеет модуль

$$v_{OA} = \omega \cdot OA.$$

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Следствие 2. В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент времени равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей*.

Примечание 1. Вообще говоря, это полюс, скорость которого равна нулю. В любой момент времени вокруг мгновенного центра скоростей осуществляется поворот плоской фигуры. *Рассматриваются только перемещения и скорости точек тела.*

Примечание 2. Рассмотрение ускорений точек фигуры относительно мгновенного центра скоростей является грубой ошибкой. В классической механике рассматривается мгновенный центр ускорений. *Мгновенный центр ускорений фигуры не совпадает с мгновенным центром скоростей*!

Различные случаи определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры.

Случай 1. Допустим, что известны прямые, по которым направлены скорости точек плоской фигуры A и B. Тогда мгновенный центр скоростей P определяется как точка пересечения перпендикуляров к этим прямым, восстановленных из точек A и B. Зная модуль скорости точки A и определив расстояние этой точки от мгновенного центра скоростей AP, находим угловую скорость плоской фигуры согласно зависимости:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

Модуль скорости точки B можно определить из пропорциональности скоростей точек их расстояниям от мгновенного центра скоростей по формуле:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP},$$

откуда

$$v_B = v_A \frac{BP}{AP}$$

или при помощи угловой скорости фигуры:

$$v_B = \omega \cdot BP.$$

Скорость любой другой точки плоской фигуры определяется аналогично.

Задача 1. В вертикальной плоскости между двумя стенками, образующими прямой угол, движется стержень длиной 10 метров. В момент, когда угол наклона стержня составляет 30^0, его нижний конец имеет скорость 4 м/с. Найти скорости верхнего конца стержня и его середины в этот момент времени.

Решение. По условию задачи концы стержня A и B движутся по взаимно перпендикулярным прямым. Вектор скорости $\vec{v}_A$ направлен вправо, вектор скорости $\vec{v}_B$ должен быть направлен вертикально; проведя из точек A и B перпендикулярные к скоростям прямые, получим мгновенный центр скоростей P. Ясно, что в данный момент времени происходит поворот стержня против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Соединим точки P и C, вектор скорости $\vec{v}_C$ должен быть перпендикулярен отрезку PC.

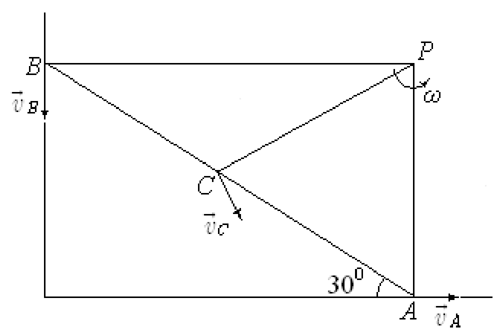


Рис. 3

Сначала определим величину угловой скорости стержня:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

Из рисунка 3 ясно, что $\triangle APC$ - равносторонний, причём $AP = AC = \dfrac{1}{2}AB = 5$ м. Тогда угловая скорость $\omega = \dfrac{4}{5} = 0,8$ с$^{-1}$.

Поскольку $AP=AC$, скорости равноудалённых от мгновенного центра скоростей точек A и C равны, поэтому $v_C = v_A = 4$ м/с.

$$v_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot AB\cos 30^0 = 0,8 \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ м/с.}$$

Примечание. Поскольку в условии задачи направления скоростей точек A и B определены, для нахождения скорости точки B можно воспользоваться следствием 1 к теореме 1 о проекциях скоростей.

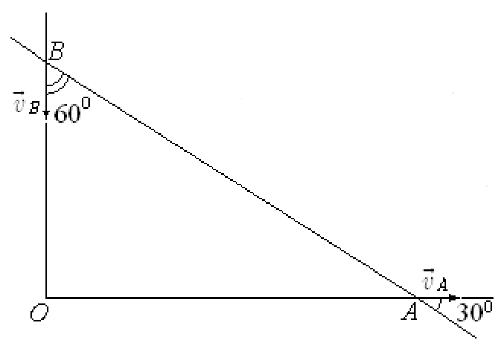


Рис. 4

По теореме о проекциях скоростей фигуры на прямую, соединяющую две точки

$$v_A\cos 30^0 = v_B\cos 60^0,$$

откуда

$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = v_B \cdot \frac{1}{2};\ v_B = 4\sqrt{3} \text{ м/с.}$$

Для определения величины скорости точки C по теореме о проекциях мы не знаем направления вектора скорости.

Ответ: $v_B = 4\sqrt{3}$ м/с, v_C =4 м/с.

Случай 2. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны AB, то для определения положения мгновенного центра скоростей должны быть известны модули скоростей обеих точек и направления векторов скоростей.

Известно, что модули скоростей точек фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Ясно, что мгновенный центр скоростей может лежать только на прямой, которой принадлежит отрезок AB. Если векторы скоростей направлены вдоль параллельных прямых в разные стороны, мгновенный центр скоростей лежит между точками A и B (рис. 5); если в одну сторону – на продолжении отрезка AB (рис. 6).

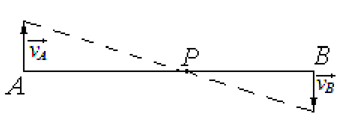


Рис. 5

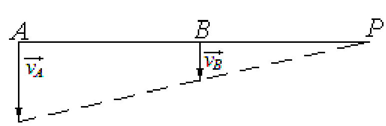


Рис. 6

Задача 2. Определить угловые скорости стержней, изображённых на рисунках 5 и 6.

Решение. Для тела, изображённого на рисунке 5, справедливы соотношения:

$$\omega = \frac{v_A}{AB + BP} = \frac{v_B}{BP}; \qquad v_A BP = v_B AB + v_B BP;$$

$$(v_A - v_B)BP = v_B AB; \qquad BP = \frac{v_B}{v_A - v_B} AB;$$

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Примечание. Если векторы скоростей точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны между собой, сонаправлены, равны, и перпендикулярны *AB*, то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности, а *фигура в данный момент совершает мгновенно-поступательное движение*: **скорости всех точек фигуры в данный момент равны!**

Для тела, изображённого на рисунке 6, справедливы соотношения:

$$\omega = \frac{v_A}{AB - BP} = \frac{v_B}{BP}; \qquad v_A BP = v_B AB - v_B BP;$$

$$(v_A + v_B)BP = v_B AB; \qquad BP = \frac{v_B}{v_A + v_B} AB;$$

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

Случай 3. Если происходит движение плоской фигуры, при которой она катится без скольжения по некоторой неподвижной гладкой кривой, то мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится в точке соприкосновения фигуры с кривой.

Задача 3. Колесо радиуса *R* катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Найти скорости точек колеса, отстоящие на $\frac{\pi}{2}n$ радиан от нижней точки, если *n* – целое. Скорость оси колеса равна v_0.

Решение. Итак, точка *P* является мгновенным центром скоростей колеса, $\vec{v}_P$=0.

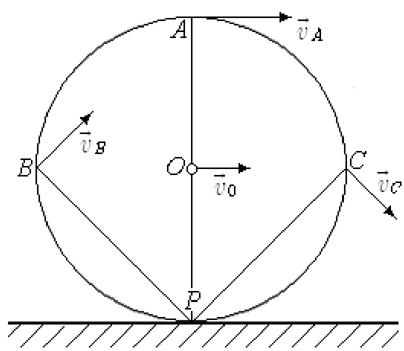


Рис. 5

Ясно, что для решения задачи, зная скорость точки *O*, необходимо определить скорости точек *A*, *B* и *C*. Векторы скоростей $\vec{v}_0$, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ должны быть направлены перпендикулярно отрезкам *PO*, *PA*, *PB* и *PC* соответственно.

Определим угловую скорость колеса:

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{v_O}{R},$$

далее:

$$v_A = \omega \cdot AP = \frac{v_O}{R} \cdot 2R = 2v_O,$$

$$v_B = v_C = \omega \cdot BP = \omega \cdot CP = \frac{v_O}{R} \cdot R\sqrt{2} = v_O\sqrt{2}.$$

Ответ: $v_A = 2v_O$; $v_B = v_C = v_O\sqrt{2}$.

Примечание. Теперь мы можем ответить на «странный» вопрос: «Все ли точки автомобиля, движущегося со скоростью 100 км/час, имеют такую скорость?» Не все. Например, нижние точки колес имеют скорость, равную нулю, а верхние – 200 км/час.

Задача 4. Диск радиуса *R* по плоскости без скольжения вдоль прямой. Чему равно перемещение точки *A* за один оборот диска?

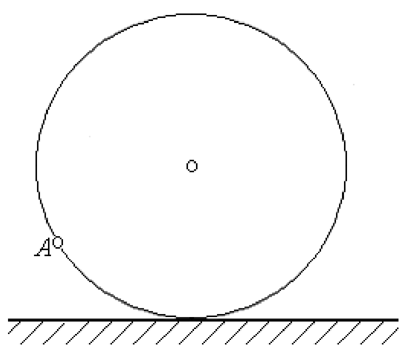


Рис. 6

Решение. Для решения задачи мысленно поместим точку *A* в нижнюю точку диска (при этом задача будет иметь тот же самый смысл). После полного оборота диска точка опять будет в нижней точке. При этом расстояние между двумя последовательными положениями точки будет равно длине окружности $2\pi R$.

Интересно то, что при этом точка условия задачи и нижняя точка диска опишут одинаковые траектории (они называются циклоидами).

Ответ: $2\pi R$.

Теорема 2. Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{OA}.$$

Во вращательном движении вокруг полюса O точка A имеет вращательную и центростремительную составляющие ускорения, поэтому

$$\vec{a}_{OA} = \vec{a}^{\,\varepsilon}_{OA} + \vec{a}^{\,\omega}_{OA},$$

тогда

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^{\,\varepsilon}_{OA} + \vec{a}^{\,\omega}_{OA}.$$

При этом вектор вращательной составляющей $\vec{a}^{\,\varepsilon}_{OA}$ по модулю равен $a^{\varepsilon}_{OA} = \varepsilon \cdot OA$ и направлен перпендикулярно отрезку OA в соответствии с направлением углового ускорения ε. Вектор центростремительной составляющей $\vec{a}^{\,\omega}_{OA}$ направлен от точки A к точке O, по модулю $a^{\omega}_{OA} = \omega^2 \cdot OA$.

Примечание. Задачи с ускорениями точек фигур в плоском движении в школьной механике встречаются редко: они достаточно сложны.

Задача 5. По условию задачи №1, считая, что ускорение точки A стержня равно 2 м/с^2 и направлено по горизонтали вправо, определить ускорение точки B и угловое ускорение ε стержня.

Решение. В соответствии с теоремой 2

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\varepsilon}_{AB} + \vec{a}^{\,\omega}_{AB}.$$

Ясно, что вектор ускорения $\vec{a}_B$ направлен горизонтально. Вектор центростремительной составляющей $\vec{a}_{AB}^{\omega}$ направлен от точки B к точке A, по модулю $a_{AB}^{\omega} = \omega^2 \cdot AB$. Величина угловой скорости $\omega = 0,8$ с$^{-1}$ была ранее определена при решении задачи, тогда a_{AB}^{ω} = 0,64 м/с^2. При этом вектор вращательной составляющей $\vec{a}_{AB}^{\varepsilon}$ направлен перпендикулярно отрезку AB в соответствии с направлением углового ускорения ε. Укажем его направление произвольно.

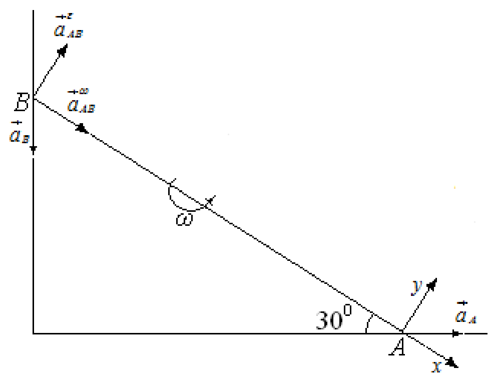


Рис. 7

В проекции на ось x теорема сложения ускорений даёт

$$a_B \cos 60^0 = a_A \cos 30^0 + a_{AB}^{\omega},$$

откуда

$$a_B = \frac{a_A \cos 30^0 + a_{AB}^{\omega}}{\cos 60^0} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,64}{0,5} = \frac{\sqrt{3} + 0,64}{0,5} = \left(2\sqrt{3} + 1,28\right) \text{ м/с}^2.$$

В проекции на ось y теорема сложения ускорений имеет вид

$$-a_B \sin 60^0 = a_A \sin 30^0 + a_{AB}^{\varepsilon}, \text{ тогда } a_{AB}^{\varepsilon} = -\left(a_B \sin 60^0 + a_A \sin 30^0\right).$$

Величина вращательной составляющей может быть определена с учётом соотношения $a_{AB}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot AB$, поэтому

$$\varepsilon = -\frac{a_B \sin 60^0 + a_A \sin 30^0}{AB} = -\frac{\left(2\sqrt{3}+1,28\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}}{10} =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{3}+0,64\right)\sqrt{3}+1}{10} = -\frac{0,64\sqrt{3}+4}{10} = -\left(0,064\sqrt{3}+0,4\right)c^{-2}.$$

Полученное отрицательное значение углового ускорения говорит о том, что вектор вращательной составляющей ускорения $\vec{a}_{AB}^{\varepsilon}$ направлен в сторону, противоположную указанную на рисунке 7. При этом направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости (против часовой стрелки).

Рассмотрим две несложные задачи с ускорениями точек тела.

Задача 7. Диск катится по горизонтальной прямой так, что его центр O в данный момент времени имеет скорость $\overrightarrow{v_O}$ и ускорение $\overrightarrow{a_O}$. Определить угловое ускорение диска.

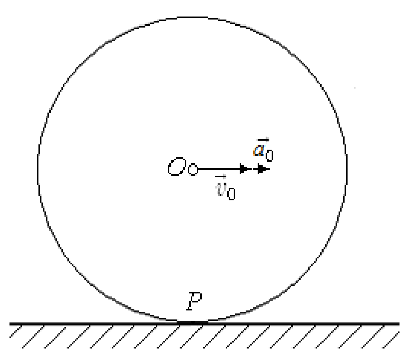


Рис. 8

Решение. Точка P является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска равна $\omega = \dfrac{v_O}{OP} = \dfrac{v_O}{R}$. Отметим, что скорость и ускорение центра диска не изменяют направления и являются сонаправленными: ускорение не имеет центростремительной (вращательной) составляющей и зависит только от углового ускорения.

Угловое ускорение ε представляет собой первую производную от угловой скорости по времени, тогда

$$\varepsilon = \omega' = \left(\frac{v_O}{R}\right)' = \frac{(v_O)'}{R} = \frac{a_O}{R}.$$

Задача 8. Стержень OB вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси O так, что колесо I неподвижно, а колёса II и III вращаются относительно осей A и B, скреплённых со стержнем. Колёса I и III имеют радиус R, а колесо II радиус r. Колёса соприкасаются между собой в точках C и P (см. рис. 9). Чему равна угловая скорость колеса III? Каковы скорости и ускорения точек этого колеса?

Решение. Скорости точек A и B, расположенных на вращающемся стержне (его в механике машиностроения иногда называют «водило») равны соответственно $v_A=\omega_0 OA=\omega_0(R+r)$ и $v_B=\omega_0 OB=\omega_0(2R+2r)=2\omega_0(R+r)$.

Колесо II катится без проскальзывания по неподвижному колесу I, точка P является мгновенным центром скоростей. Угловая скорость колеса II $\omega_{\text{II}}=\dfrac{v_A}{AP}=\dfrac{v_A}{r}$. Скорость точки C при этом $v_C = \omega_{\text{II}} PC = 2\omega_{\text{II}} r = 2v_A =$

$= 2\omega_0(R+r) = v_B$. Точки B и C, находящиеся на колесе III, имеют равные по величине и одинаково направленные скорости. Это говорит о том, что колесо III движется мгновенно-поступательно (См. примечание к задаче 2).

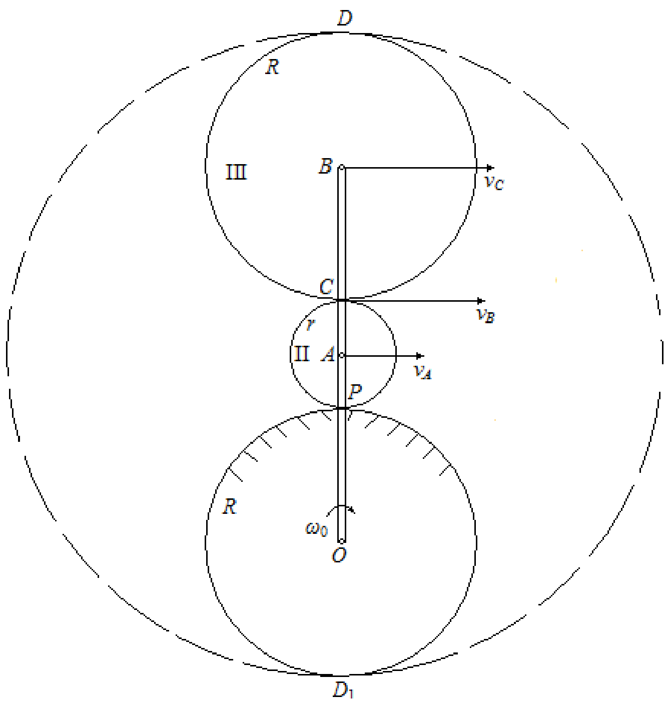


Рис. 9

Выводы:

а) В процессе движения все точки колеса III в любой момент времени имеют одинаковые по величине скорости: $v=2\omega_0(R+r)$.

б) Колесо III движется поступательно ($\omega_{III}=0$). При этом все его точки описывают подобные окружности радиуса $4R+2r$. Например, точка D, всегда оставаясь верхней точкой колеса III, при повороте стержня OB на 180^0 займёт положение D_1. Скорость любой точки колеса III при постоянстве ω_0 будет изменяться только по направлению (при неизменности модуля), вектор скорости отдельно взятой точки всегда будет направлен по касательной к её траектории движения.

в) Угловое ускорение ε_{III} колеса III при постоянстве ω_0 и ω_{III}=0 будет равно 0.

г) Ускорения всех точек колеса III при постоянстве ω_0 равны по модулю центростремительному ускорению точки B и совпадают с ним по направлению в любой момент движения: $a=2\omega^2(R+r)$.

Примечание 1. При $\omega_0=\omega_0(t)$ сохраняется поступательное движение колеса III ($\omega_{\text{III}}=0$, $\varepsilon_{\text{III}}=0$). При этом скорости и ускорения точек колеса будут зависеть от характера вращения стержня OB:

$$v=2(R+r)\omega_0(t); \qquad a=2(R+r)\,\omega_0^2\,(t).$$

Примечание 2. Рассмотренный пример с выбранным соотношением радиусов трёх колёс в теории машин и механизмов носит название парадокса Фергюссона.

Примечание 3. Вспомним о том, что сложение двух вращение может давать поступательное движение (например, движение педали велосипеда, вращающейся вокруг стержня, прикреплённого к вращающейся шестерёнке).

3. Сложное движение точки.

Определение 1. Сложное движение точки (тела) – это такое движение, при котором точка (тело) одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

Например, сложное движение совершает лодка, переплывающая реку (лодка движется относительно воды и её сносит течением), пассажир, перемещающийся по салону движущегося автобуса, наконец, человек, идущий по поверхности Земли, совершает сложное движение относительно Солнца, поскольку перемещается по поверхности Земли, Земля совершает вращение относительно собственной оси и перемещается по орбите вокруг Солнца. В школьном курсе рассматриваются случаи, в которых точка участвует одновременно не более чем в двух движениях.

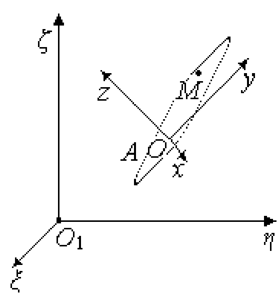


Рис. 1

Рассмотрим движущееся тело A и точку M, не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое движение. Через произвольную точку O движущегося тела проведём неизменно связанные с этим телом оси x, y, z. Систему осей $Oxyz$ называют *подвижной системой отсчёта*.

Неподвижной системой отсчёта называют систему осей $O_1\xi\eta\zeta$, связанную с некоторым условно неподвижным телом, обычно с Землёй.

Определение 2. Движение точки M относительно неподвижной системы отсчёта называют *абсолютным движением точки.*

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют *абсолютной скоростью и абсолютным ускорением* точки и обозначаются $\vec{v}$ и $\vec{a}$.

Определение 3 Движение точки M относительно подвижной системы отсчёта называют *относительным движением точки.*

Скорость и ускорение точки относительно подвижной системы координат называются *относительной скоростью и относительным ускорением* точки и обозначаются $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{a}_{\text{отн}}$.

Движение подвижной системы отсчёта $Oxyz$ и неизменно связанного с ним тела A по отношению к неподвижной системе $O_1\xi\eta\zeta$ является для точки M переносным движением. Точки тела A, совершая различные движения, имеют в данный момент времени различные скорости и ускорения.

Скорость и ускорение точки тела A, связанной с подвижной системой отсчёта, совпадающей в данный момент с движущейся точкой M, называют *переносной скоростью и переносным ускорением точки M* и обозначают $\vec{v}_{\text{пер}}$ и $\vec{a}_{\text{пер}}$.

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчёта, которое названо абсолютным движением, является сложным, состоящим из относительного и переносного движения точки. Основная задача изучения сложного движения состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движения точки.

Теорема 1. (о сложении скоростей). Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Примечание. Эту теорему достаточно часто называют *правилом параллелограмма или треугольника скоростей*.

Поскольку абсолютная скорость точки $\vec{v}$ определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной $\vec{v}_{\text{пер}}$ и относительной $\vec{v}_{\text{отн}}$ скоростей, то её модуль можно вычислить по формуле

$$v = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2v_{пер}v_{отн}\cos\left(\widehat{\vec{v}_{пер}, \vec{v}_{отн}}\right)}.$$

Не будем останавливаться на многократно рассмотренных в различных школьных учебниках задачах с лодкой, переплывающей реку поперёк с постоянной скоростью. Переносное, относительное и абсолютное движения в таких задачах очевидны и не представляют интереса.

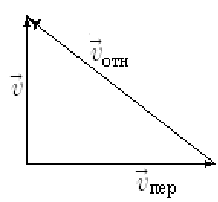
Задача 1. Две машины отъехали от перекрёстка по двум взаимно перпендикулярным улицам: одна со скоростью 60 км/час, вторая со скоростью 80 км/час. С какой относительной скоростью они удаляются друг от друга?

Решение. Свяжем неподвижную систему координат с перекрёстком. Тогда скорость, с которой движется первая машина относительно перекрёстка – её абсолютная скорость движения $\vec{v}$. Подвижную систему координат свяжем со второй машиной, тогда скорость движения первой машины относительно второй – относительная скорость движения $\vec{v}_{\text{отн}}$; а скорость, с которой вторая машина движется относительно перекрёстка – скорость её переносного движения $\vec{v}_{\text{аер}}$.

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Изобразим векторы скоростей на рисунке в соответствии с условием задачи, они образуют треугольник:



Из рисунка видно, что скорость, с которой удаляется первая машина от второй – скорость относительная. Ясно, что с такой же относительно первой машины скоростью удаляется и вторая.

$$\vec{v}_{\text{удаления}} = \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{пер}}.$$

В скалярном виде, используя теорему Пифагора, из треугольника скоростей получаем

$$v_{\text{удаления}} = \sqrt{v^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{100^2} = 100 \text{ км/час}.$$

Ответ: 100 км/час.

Теорема 2. (о сложении ускорений). В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Определение 4. Ускорение Кориолиса (кориолисово ускорение) равно

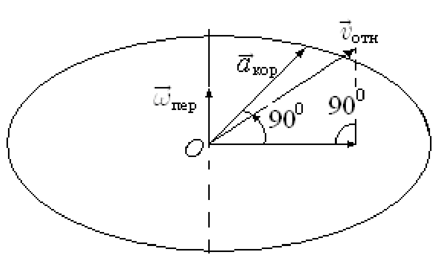
$$\vec{a}_{\text{кор}}=2(\vec{\omega}_{\text{пер}}\times\vec{v}_{\text{отн}}),$$

его модуль вычисляется по формуле

$$a_{\text{кор}} = 2|\vec{\omega}_{\text{пер}}|\cdot|\vec{v}_{\text{отн}}|\cdot\sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами угловой скорости переносного движения и вектором скорости относительного движения.

Правило Жуковского. Для определения направления вектора ускорения Кориолиса необходимо спроецировать вектор $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения (вдоль этой оси направлен вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}_{\text{пер}}$), и повернуть вектор в этой плоскости на 90^0 по направлению вращения.



Следствие. В случае поступательного переносного движения (именно такое движение, как правило, рассматривается в школьном курсе механики) абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Примечание. Каждое из ускорений (кроме ускорения Кориолиса) может раскладываться на несколько составляющих.

Задача 2. Цилиндр радиусом R = 20 см вращается вокруг своей оси с частотой n = 20 об/мин. Вдоль образующей цилиндра с постоянной скоростью v = 30 см/с относительно поверхности цилиндра движется материальная точка. 1) Определить полную скорость и ускорение этой точки. 2) Какими будут скорость и ускорение, если точка движется по поверхности цилиндра в окружном направлении с относительной скоростью v = 30 см/с?

Решение. 1) По условию задачи частота вращения цилиндра в системе SI равна n = 20 об/мин = $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ об/с, тогда угловая скорость цилиндра ω = $\frac{2\pi}{3}$ с$^{-1}$. Переносная скорость точки, отстоящей от оси вращения на расстояние R = 0,2 м, равна соответственно $v_{\text{пер}} = \omega R = \frac{2\pi R}{3} = \frac{2\pi\cdot 0,2}{3} \approx$ $\approx 0,42$ м/с. Данная в условии задачи скорость является относительной и равной $v_{\text{отн}}$ = 0,3 м/с. Сложение скоростей (см. рисунок 2) даёт $v = \sqrt{0,3^2+0,42^2} \approx$ 0,52 м/с.

Отметим, что ускорение Кориолиса в задаче равно нулю, поскольку векторы переносной угловой скорости и относительной скорости параллельны (синус угла между этими векторами равен нулю).

Абсолютное ускорение точки имеет только вращательную составляющую переносного ускорения, поскольку относительное движение происходит с постоянной скоростью, а переносное вращение является равномерным:

$$a_{пер} = a^{\omega}_{пер} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 0,2 \approx 0,88 \text{ м/с}^2.$$

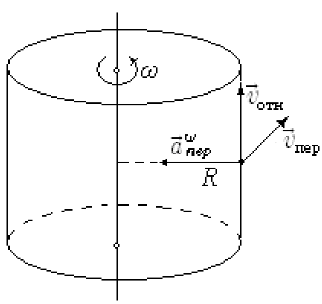


Рис. 2

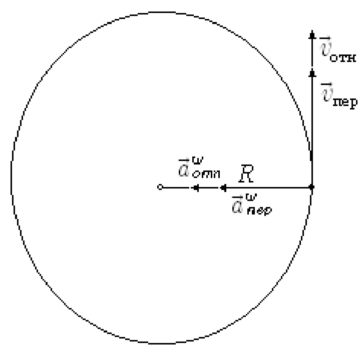


Рис. 3

2) На рисунке 3 видно, что направления векторов переносного и относительного ускорений совпадают, поэтому $v = v_{отн} + v_{пер} = 0,72$ м/с. Совпадают и направления относительной и переносной составляющих вращательных ускорений, поэтому

$$a = a^{\omega}_{пер} + a^{\omega}_{отн} = \frac{v^2}{R} = \frac{0,72^2}{0,2} \approx 2,59 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v \approx 0,52$ м/с, $a \approx 0,88$ м/с^2; $v = 0,72$ м/с, $a \approx 2,59$ м/с^2.

4. Сложное движение тела.

Сложное движение тела в школьном курсе механики представлено только сложением нескольких поступательных движений.

Пример 1. Обратим внимание на то, что винт и шуруп совершают сложное движение: они совершают вращение вокруг оси (относительное движение), а сама ось скользит вдоль направляющей прямой (переносное движение). Сложение этих двух движений дает движение, которое иногда называют винтовым. Шнек мясорубки, совершая вращательное движение, придаёт массе, попавшей в мясорубку и движущейся внутри, сложное винтовое движение, при котором все точки перемещаемой массы имеют различные скорости, поскольку при постоянной угловой скорости шнека находятся на различных расстояниях от оси вращения.

Примечание. Вспомним движение частицы, имеющей электрический заряд, влетающей в однородное магнитное поле под острым углом к линиям магнитной индукции.

Совершенно не обращается внимание (даже в физико-математических классах!) на то, что, например, сложение двух вращений при определённых условиях может в результате дать поступательное движение (вспомним ранее рассмотренный парадокс Фергюссона).

Пример 2. Рассмотрим движение кабин колеса обозрения относительно земли. Кабина подвешена к оси и совершает относительно этой оси при движении колеса поворот (относительное вращательное движение). В свою очередь сама ось, закрепленная на колесе, вместе с колесом совершает переносное вращательное движение. Обратим внимание на то, что пол кабины при абсолютном (относительно земли) движении, состоящем из двух вращений, остаётся горизонтальным. При этом кабина не наклоняется: её вертикаль также сохраняет своё положение. Так же движется педаль велосипеда, вращающаяся вокруг стержня, который в свою очередь вращается с передаточной шестерёнкой.

Это характерно для поступательного движения.

Даже достаточно интересное с точки зрения механики движение Луны относительно Земли в курсе астрономии не разбирается. Упоминается тот факт, что Луна к Земле обращена всегда одной стороной.

Пример 3. Луна вращается вокруг своей оси (собственное вращение), в то же время движется по орбите вокруг Земли – совершает относительное вращение. Земля в свою очередь, вращаясь вокруг Солнца, совершает переносное вращение. Сложение трёх движений при известных в астрономии соотношениях угловых скоростей и параметров орбит и приводит к тому, что человек, находящийся на Земле, не видит части поверхности Луны.

Примечание. При детальном рассмотрении движения Луны относительно Земли оказывается, что Луна периодически даёт человечеству возможность «заглянуть ей за спину», немного поворачиваясь к Земле то одним, то другим боком. Такое явление называется либрацией и рассматривается в серьёзном курсе небесной механики.

II. Динамика.

В кинематике, где речь идёт лишь об описании движений и не затрагивается вопрос о причинах, вызывающих эти движения, никакой принципиальной разницы между различными системами отсчёта нет, и все они в этом отношении равноправны. Совершенно иначе дело обстоит в динамике при изучении законов движения. Здесь обнаруживается существенное различие между различными системами отсчёта и преимущества одного класса систем отсчёта по сравнению с другими.

В принципе можно взять любую из бесчисленного множества систем отсчёта. Однако законы механики в различных системах отсчёта имеют, вообще говоря, различный вид, и может оказаться, что в произвольной системе отсчёта законы, описывающие даже совсем простые явления, будут весьма сложными. Естественно, возникает задача нахождения такой системы отсчёта, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Такая система отсчёта, очевидно, наиболее удобна для описания механических явлений.

Определение 1. Твёрдое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Определение 2. Тело, ограничивающее свободу движения данного твёрдого тела, является по отношению к нему *связью*.

1. Инерциальные системы отсчёта. Основные понятия динамики.

Рассмотрим ускорение материальной точки относительно произвольной системы отсчёта. Опыт показывает, что причинами этого ускорения могут быть как действие на данную точку каких-либо определённых тел или полей, так и свойства самой системы отсчёта (действительно, ускорение одной и той же материальной точки относительно различных систем отсчёта в общем случае будет различным).

Можно предположить, что существует такая система отсчёта, в которой ускорение материальной точки целиком обусловлено только взаимодействием её с другими телами (о взаимодействии с полями пока для простоты изложения говорить не будем). Свободная материальная точка, не подверженная действию никаких других тел, движется относительно такой системы отсчёта равномерно и прямолинейно, или, ***по инерции.*** *Такую систему отсчёта называют инерциальной.*

Первый закон механики – *закон инерции Галилея-Ньютона.*

Формулировка 1. *Существуют системы отсчёта, относительно которых точка находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, если действие всех тел на эту точку скомпенсировано.*

Следствие. *Существуют системы отсчёта, относительно которых тело находится в состоянии покоя или поступательного равномерного движения, если действие всех тел на это тело скомпенсировано.*

Формулировка 2. *Материальная точка сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.*

Примечание. Обе формулировки встречаются в учебных пособиях. Их эквивалентность не вызывает сомнения, но этот факт не всегда очевиден для школьников.

Существование инерциальных систем подтверждается опытом. Первоначальными опытами было установлено, что такой системой отсчёта является Земля. Последующие более точные опыты (опыт Фуко и аналогичные ему) показали, что эта система не является инерциальной, а именно: были обнаружены ускорения (например, ускорение Кориолиса), существование которых нельзя объяснить действием каких-либо определённых тел.

Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчёта, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

Системы отсчёта, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называются ***неинерциальными.***

Симметрия пространства и времени.

Важной особенностью инерциальных систем отсчёта является то, что по отношению к ним пространство и время обладают определёнными свойствами симметрии. А именно: опыт убеждает, что в этих системах отсчёта ***пространство однородно и изотропно, а время однородно***.

Однородность и изотропность пространства заключаются в том, что свойства пространства одинаковы в различных точках (однородность), а в каждой точке пространства одинаковы во всех направлениях (изотропность).

Однородность времени заключается в том, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Иначе говоря, различные моменты времени эквивалентны друг другу по своим физическим свойствам.

Примечание. По отношению к неинерциальным системам отсчёта пространство является неоднородным и неизотропным. Это означает, что даже при отсутствии взаимодействия с другими телами положения тела и его ориентации в механическом отношении не эквивалентны. Время в неинерциальных системах неоднородно, т.е. различные его моменты не эквивалентны.

Принцип относительности Галилея.

Все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Это означает, что никакими механическими опытами, проводимыми «внутри» данной инерционной системы, нельзя установить, покоится эта система или движется.

Следствие. Во всех инерциальных системах отсчёта свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики.

Примечание. Скорость движения рассматриваемых объектов должна быть значительно меньше скорости света.

Всё сказанное говорит об исключительности свойств инерциальных систем отсчёта; именно эти системы, как правило, используются при изучении механических явлений.

Свойство (без рассмотрения преобразований Галилея).

Ускорение точки одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

Опыт показывает, что в инерциальных системах отсчёта ***всякое*** ускорение точки вызывается действием на неё других тел.

Определение. Влияние (тела или тел), вызывающее ускорение точки, называют ***силой.*** (Позднее будет введена величина, называемая силой.)

Итак, причиной ускорения точки является действующая на него сила. Одной из важнейших характеристик силы является её материальное происхождение. Классификация сил имеет довольно условный характер. Можно отметить, что все силы взаимодействия между телами обусловлены, в конечном счёте, полями. Вопрос о природе сил выходит за рамки механики и рассматривается в других разделах физики.

Опыт показывает, что всякое тело «оказывает сопротивление» попыткам изменить его скорость – как по модулю, так и по направлению. Это свойство, выражающее степень неподатливости тела к изменению его скорости, называется ***инертностью.***

Определение. Мерой инертности тела служит величина, называемая ***массой.***

Понятие массы *m* определяется отношением масс двух различных тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Интересно, что такое определение не требует предварительного измерения самих сил. Достаточно лишь располагать критерием равенства сил.

Свойство 1. Масса – величина ***аддитивная***, т.е. масса составного тела равна сумме масс его частей.

Свойство 2. Масса системы тел, не обменивающихся веществом с окружением, – величина ***постоянная***, не изменяющаяся при его движении.

Свойство 3. В классической механике масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, т.е. она рассматривается как постоянная величина, являющаяся мерой инертности тела и его гравитационных свойств.

Сила в механике вводится на основе эксперимента по соотношению масс и ускорений. Поскольку ускорение является величиной векторной, а причиной появления ускорения является сила, сила определяется как векторная величина

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

действующая на тело пренебрежимо малых размеров.

2. Основные законы механики.

Второй закон Ньютона.

Ускорение, приобретаемое материальной точкой, пропорционально приложенной к ней силе, и имеет одинаковое с ней направление

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Примечание. Закон устанавливает пропорциональность силы $\vec{F}$ и ускорения $\vec{a}$. Он говорит об изменении скорости движения точки под действием силы

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{1}$$

Третий закон Ньютона.

Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющие эти точки:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{2}$$

Примечание. Силы в третьем законе Ньютона приложены к разным телам и не могут уравновешивать друг друга.

Закон независимости сил.

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Основное уравнение динамики материальной точки.

Основное уравнение динамики материальной точки представляет собой не что иное, как математическое выражение второго закона Ньютона для точки с постоянной массой:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{3}$$

Примечание. Именно в таком виде в «Началах» дана формулировка закона самим Ньютоном.

Уравнение (3) есть, по существу, дифференциальное уравнение движение точки в векторном виде.

Две задачи механики.

Первая задача механики. Зная массу точки m и уравнения её движения

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right),$$

найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Первая задача механики решается практически всегда при помощи дифференцирования уравнения (3) в проекции на декартовы оси координат и использования второго закона Ньютона.

Вторая задача механики. Зная силы, действующие на материальную точку, её массу m, а также начальное положение точки и её начальную скорость, получить уравнения движения точки.

Ясно, что вторая задача механики является обратной к первой и сводится к интегрированию; решается в довольно ограниченном числе случаев.

В зависимости от характера и постановки конкретной задачи решение уравнения (3) приводит или к векторной форме, или к координатной. Ясно, что уравнения проще для понимания в координатной форме.

Запишем уравнение (3) в проекциях на оси координат.

В проекциях на оси декартовых координат.

Получаем три дифференциальных уравнения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x; \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y; \qquad m\frac{dv_z}{dt} = F_z, \tag{4}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора $\vec{F}$ на координатные декартовы оси.

Примечание. Необходимо помнить, что проекции – величины алгебраические: в зависимости от ориентации вектора $\vec{F}$ они могут быть как положительными, так и отрицательными. (Это определяется и вводимой системой координат). Знак проекции результирующей силы F определяет и знак проекции ускорения.

В проекциях на касательную и нормаль к траектории в данной точке.

Записывая обе части уравнения (3) в проекциях на подвижные орты $\vec{\tau}$ *и* $\vec{n}$, и, использую ранее полученные выражения для тангенциального и нормального ускорений ($a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt}, a_n = \dfrac{v^2}{\rho} n$), получим:

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \tag{5}$$

где $F_\tau; F_n$ - проекции вектора F орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$.

Примечание. Естественный выбор системы координат применяется в случае, когда задана траектория движения.

3. Колебательное движение материальной точки.

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку *M*, отклонённую от положения покоя *O*, действует сила $\vec{P}$, стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется *восстанавливающей.*

Рис. 1

Рассмотрим простейший, но имеющий большое практическое значение случай, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения покоя, т.е.

$$P = c \cdot OM,$$

где c – постоянный коэффициент пропорциональности.

Примером такой линейной восстанавливающей силы может служить сила упругости пружины. Пусть, например, тело весом mg, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости в положении O (Рис.2), соединено с недеформированной пружиной, другой конец которой закреплён в точке A. В этом положении приложенные силы, его вес $\overrightarrow{mg}$ и реакция плоскости $\vec{N}$ взаимно уравновешиваются.

На тело, отклонённое в положение M_1, будет действовать, кроме сил $\overrightarrow{mg}$ и $\vec{N}$ сила упругости растянутой пружины $\vec{P}_1$, стремящаяся вернуть тело в положение покоя O. Модуль этой силы пропорционален удлинению пружины:

$$P_1 = c \cdot OM_1.$$

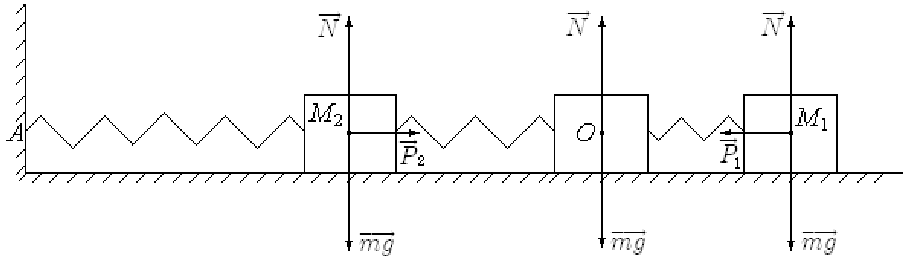


Рис. 2

В положении M_2 сила упругости сжатой пружины $\vec{P}_2$, имеющая модуль $P_2 = c \cdot OM_2$ также стремиться вернуть тело в положение O.

Таким образом, сила упругости деформированной пружины всегда направлена к точке O – положению покоя тела и пропорциональна отклонению тела от этого положения.

Колебания могут происходить и под действием восстанавливающих сил, изменяющихся по другому закону. Различают четыре основных случая колебательного движения материальной точки:

1) *свободные колебания*, совершающиеся под действием только восстанавливающей силы;

2) *свободные колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению;

3) *вынужденные колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой *возмущающей силой*;

4) *вынужденные колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления движению.

Изучим свободные колебания материальной точки. Примем прямолинейную траекторию движения точки M за ось x и поместим начало координат O в положение, в котором точка M могла бы находиться в покое (см. рис.3).

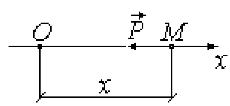


Рис. 3

Если точка M выведена из состояния покоя, то на неё по оси x действует только восстанавливающая сила $\vec{P}$. Если в некоторый момент времени t точка M имеет координату x, то модуль восстанавливающей силы

$$P = c \cdot OM = c|x|,$$

где c – коэффициент жёсткости пружины, численно равный силе упругости её при деформации, равной единице.

Так как восстанавливающая сила в любом положении направлена к точке O, то её проекция на ось x всегда имеет знак, противоположный знаку координаты x:

$$P_x = -cx \tag{1}$$

Составим дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки M под действием восстанавливающей силы $\vec{P}$:

$$mx'' = \sum X_i = P_x.$$

Используя выражение (1), получим:

$$mx'' = -cx \text{ или } x'' + \frac{c}{m}x = 0.$$

Обозначим $\frac{c}{m} = k^2$:

$$x'' + k^2x = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки.* Для интегрирования этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составим характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

Его комплексные корни $z_1 = +ik$ и $z_2 = -ik$.

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt \qquad (3)$$

Чтобы определить значения постоянных C_1 и C_2, найдём уравнение, определяющее скорость точки, продифференцировав уравнение (3):

$$x' = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt. \qquad (4)$$

Пусть в начальный момент $t=0$ точка имеет координату x_0 и проекцию скорости на ось x, равную x_0'. Тогда, подставив начальные условия в уравнения (3) и (4), найдём

$$C_1 = x_0,\ x_0' = kC_2, \text{ откуда } C_2 = \frac{x_0'}{k}.$$

Подставляя полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (3), получаем уравнение движения точки M:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt. \tag{5}$$

Уравнению (3) можно придать и другой вид, введя вместо постоянных C_1 и C_2 две новые постоянные α и β, положив

$$C_1 = \alpha sin\beta \text{ и } C_2 = \alpha \cos\beta.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 (по сути мы вводим дополнительный угол) в уравнение (3), получим

$$x = \alpha \sin(kt+\beta). \tag{6}$$

Уравнение (6) является *уравнением гармонического колебательного движения точки.*

Таким образом установлено, что *свободные колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы являются гармоническими колебаниями.*

Амплитуда α и начальная фаза β свободных колебаний материальной точки как постоянные интегрирования, введённые вместо C_1 и C_2, определяются по начальным условиям движения.

Уравнение, определяющее скорость колеблющейся точки, имеет вид:

$$x' = \alpha k \cos(kt+\beta) \tag{7}$$

Так как $k^2 = \dfrac{c}{m}$, то циклическая частота и период свободных колебаний определяются по формулам:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{8}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad . \tag{9}$$

Как видно, частота и период свободных колебаний точки зависят лишь от массы этой точки и от коэффициента c, характеризующего восстанавливающую силу, и не зависят от начальных условий движения.

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}, \tag{10}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{kx_0}{v_0}. \tag{11}$$

Пример 1. Рассмотрим груз весом mg, подвешенный к пружине AB, конец A которой закреплён неподвижно (рис. 4).

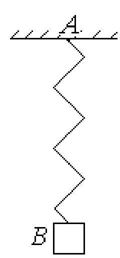


Рис. 4

Когда груз находится в покое, удлинение пружины равно $f_{\text{ст}}$. Положим, что в некоторый момент времени груз был смещён из положения покоя вниз по вертикали на величину y_0 и отпущен с начальной скоростью v_0. Определить возникшее движение груза, пренебрегая массой пружины.

Решение. Примем груз за материальную точку и направим по его вертикальной прямолинейной траектории ось y (рис. 5).

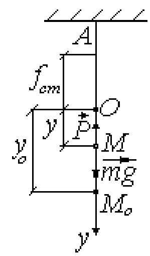


Рис. 5

Начало координат O совместим с положением покоя груза, которому соответствует статическое удлинение пружины $f_{\text{ст}}$. Тогда начальному положению груза M_0 будет соответствовать координата y_0 и проекция начальной скорости v_0.

Начальные условия будут: $t_0 = 0$, $y = y_0$, при начальной скорости v_0.

На груз действует сила тяжести $\overrightarrow{mg}$ и сила упругости пружины $\vec{P}$, модуль которой пропорционален деформации пружины. В положении M, определяемом координатой y, деформация пружины

$$f_{\text{ст}} + y,$$

а модуль силы упругости

$$P = c(f_{\text{ст}} + y).$$

Проекция силы $\vec{P}$ на ось y

$$P_y = -c(f_{\text{ст}} + y).$$

Когда груз находится в покое, его вес уравновешивается силой упругости, равной по модулю $P_{ст} = cf_{ст}$, т.е.

$$mg = P_{ст} = cf_{ст} \qquad (*).$$

Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$my'' = mg - c(f_{ст}+y).$$

Подставим в дифференциальное уравнение значение коэффициента жёсткости пружины c, определяемое формулой (*), получим:

$$y'' + \frac{g}{f_{ст}} y = 0 \qquad (**)$$

Уравнение (**) является дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки (2):

$$x''+k^2x=0,$$

где

$$k^2=\frac{g}{f_{ст}}.$$

Частота свободных колебаний груза

$$k=\sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}.$$

Период его колебаний

$$T=\frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}$$

Представим уравнение движения груза в форме (6):

$$y = \alpha\sin(kt+\beta).$$

Амплитуду α и начальную фазу β определим по формулам (10) и (11):

$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2},$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{kx_0}{v_0}.$$

Уравнение движения груза примет вид

$$y = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{f_{cm}}}t + \beta\right).$$

Пример 2. Груз весом mg подвешен на двух пружинах с различными коэффициентами жёсткости c_1 и c_2. Определить периоды свободных колебаний груза при последовательном и параллельном соединении пружин при условии, что удлинения параллельно соединённых пружин одинаковы.

Решение. Периоды свободных колебаний груза определим по формуле (9).

В случае последовательного соединения пружин общее статическое удлинение связи, поддерживающей груз, равно сумме удлинений двух пружин.

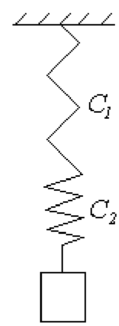


Рис. 6

Определяем эти удлинения по формуле:

$$f_{\text{ст}} = f_{1\text{ст}} + f_{2\text{ст}} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} = \frac{mg\left(c_1 + c_2\right)}{c_1 \cdot c_2}.$$

Таким образом, при последовательном соединении пружин приведённый коэффициент жёсткости

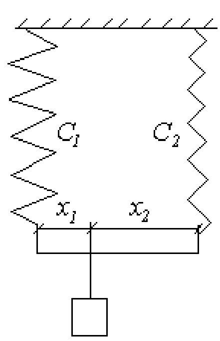
$$c_{\text{пр}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

Период колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{f_{cm}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(c_1 + c_2\right)}{c_1 \cdot c_2}}.$$

В случае параллельного соединения пружин (рис. 7) силы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, растягивающие пружины, определяются как параллельные составляющие силы тяжести $\overrightarrow{mg}$:

$$\overrightarrow{mg} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2; \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{x_2}{x_1} (*).$$



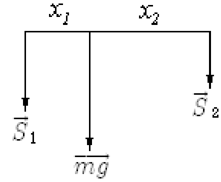


Рис. 7 Рис. 8

По условию задачи удлинения обеих пружин должны быть одинаковыми:

$$f_{1\text{ст}} = f_{2\text{ст}}.$$

Как и в случае последовательного соединения определяем удлинения по формуле

$$\frac{S_1}{c_1} = \frac{S_2}{c_2} (**).$$

Условие, обеспечивающее одинаковые удлинения пружин, получается из пропорций (*) и (**):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Величина удлинения каждой из пружин определяется отношением (**):

$$f_{\text{ст}} = \frac{S_1}{c_1} = \frac{S_2}{c_2} = \frac{S_1 + S_2}{c_1 + c_2} = \frac{mg}{c_1 + c_2}.$$

Период колебаний груза

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{f_{cm}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(c_1 + c_2\right)}}.$$

Примечание. Приведённые коэффициенты жесткости для пружин аналогичны ёмкостям конденсаторов при соответствующих соединениях.

4. Центр масс системы материальных точек. Центр тяжести.

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка *C*, называемая ***центром масс,*** которая обладает рядом интересных и важных свойств. Её положение относительно начала *O* данной системы отсчёта характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}_c$:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,, \qquad (1)$$

где m_i и r_i – масса и радиус-вектор *i*-той частицы, *m* – масса всей системы.

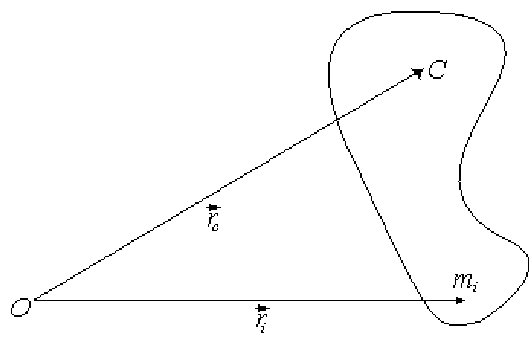


Рис. 1

Формула (1) в проекции на координатные оси даст:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,; \qquad y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\,; \quad z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (2)$$

Примечание. Следует отметить, что центр масс системы совпадает с его центром тяжести. Впрочем, это утверждение справедливо лишь в том случае, когда поле сил тяжести в пределах данной системы можно считать однородным.

Пример 1. Определить положение центра тяжести однородного диска радиусом R с круглым отверстием радиуса $r = 0{,}5R$.

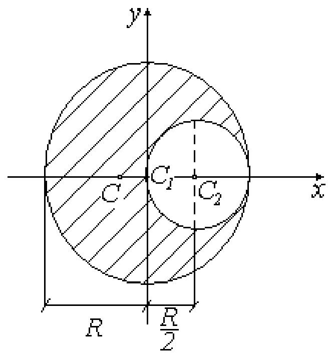


Рис. 2

Решение. Ясно, что для однородной пластины постоянной толщины масса пластины пропорциональна её площади.

Воспользуемся при решении задачи так называемым методом *«отрицательных площадей»*. Кроме того, из симметрии задачи следует, что центр тяжести пластины с отверстием лежит на оси x.

Пусть центр тяжести круга площади S_1 без отверстия C_1 расположен в начале координат. Предположим, что отверстие имеет отрицательную массу, а, следовательно, и отрицательную площадь $–S_2$; его центр тяжести C_2. Определим положение C центра тяжести пластины площади S_1-S_2:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}. \qquad (3)$$

Здесь

$$S_1 = \pi R^2;\ S_1 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2;\ x_1 = 0;\ x_2 = \frac{R}{2}.$$

Тогда

$$x_{\text{c}}=\frac{S_1x_1-S_2x_2}{S_1-S_2}=-\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{R}{2}}{\pi R^2-\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}=-\frac{R}{6}.$$

Ответ: центр тяжести $C\left(-\frac{R}{6};0\right)$.

Теперь найдём скорость $\vec{v}_c$ центра масс системы. Продифференцировав (1) по времени, получим:

$$\vec{v}_c=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\,. \qquad (4)$$

Если скорость центра масс равна нулю, то говорят, что система, как целое, покоится. Это вполне естественное обобщение понятия покоя отдельной материальной точки. Скорость же $\vec{v}_c$ приобретает смысл скорости движения всей системы как целого.

Из последней формулы с учётом того, что

$$m\vec{v}_c=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i \qquad (5)$$

следует, что импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс.

Уравнение движения центра масс.

Понятие центра масс системы позволяет придать уравнению (5) иную форму, которая часто бывает более удобной. Для этого достаточно выражение (5) подставить в формулу второго закона Ньютона и учесть, что масса системы как таковой есть величина постоянная. Тогда получим:

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \tag{6}$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Это и есть ***уравнение движения центра масс системы*** – одно из важнейших уравнений механики.

Примечание. Согласно этому уравнению, центр масс любой системы частиц движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы. При этом ускорение центра масс совершенно не зависит от точек приложения внешних сил.

При поступательном движении твёрдого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс тела являются дифференциальными уравнениями поступательного движения тела:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_{Cx}}{dt} = \sum\limits_i F_{ix}^e \\ m\dfrac{dv_{Cy}}{dt} = \sum\limits_i F_{iy}^e \\ m\dfrac{dv_{Cz}}{dt} = \sum\limits_i F_{iz}^e \end{cases}, \tag{7}$$

где *m* – масса тела, v_{Cx}, v_{Cy} и v_{Cz} - координаты центра масс тела; F_{ix}^e, F_{iy}^e, F_{iz}^e - проекции внешних сил на координатные оси.

Далее из уравнения (6) следует, что если $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$, а значит $\vec{v}_c = \overrightarrow{const}$. Таково следствие замкнутости механической системы в инерциальной системе отсчёта. Кроме того, из постоянства скорости центра масс системы следует и постоянство импульса системы.

Следствие 1. Таким образом, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, то это означает, что её импульс сохраняется в процессе движения. Разумеется, справедливо и обратное утверждение.

Следствие 2. Уравнение (6) по форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки и является его естественным обобщением для системы частиц: ускорение системы, как целого, пропорционально результирующей внешних сил и обратно пропорционально суммарной массе системы.

Пример 2. Человек весом $\overrightarrow{mg_1}$ стоит на корме лодки весом $\overrightarrow{mg_2}$ и длиной l, находящейся в покое в стоячей воде. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, расстояние a, на которое переместится лодка, если человек перейдёт на нос лодки.

Решение. Система лодка-человек находится в покое под действием трёх вертикальных сил: веса лодки $\overrightarrow{mg_2}$, веса человека $\overrightarrow{mg_1}$ и реакции воды $\vec{R}$, линия действия которой проходит через центр масс системы. Проведём из произвольной точки O горизонтальную и вертикальную оси координат. Обозначим x_1 и x_2 горизонтальные координаты центров масс частей системы, находящейся в покое, и вычислим координату центра масс этой системы x_c по формуле:

$$x_c = \frac{mg_1 x_1 + mg_2 x_2}{mg_1 + mg_2}.$$

Так как проекция на ось x главного вектора внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, и начальная скорость равны нулю, то координата x_c центра масс не изменяется. Отсюда следует, что при движении человека с кормы лодки на нос, т.е. вправо, лодка перемещается влево и центр масс C системы остаётся на той же вертикали. Новые координаты центров масс человека и лодки становятся равными:

$$X_1 = x_1 + l - a; \qquad X_2 = x_2 - a.$$

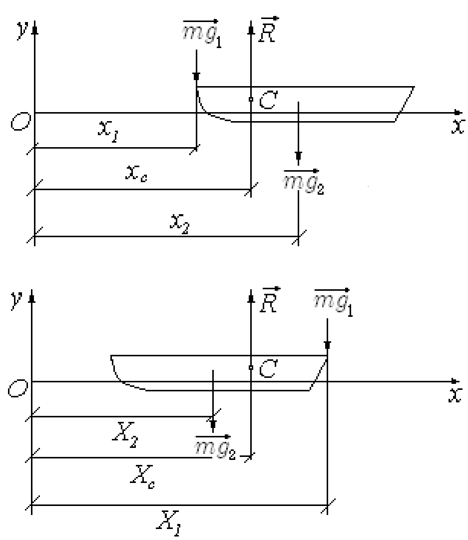


Рис. 3

Координата центра масс всей системы в этом положении

$$X_c = \frac{m_1 g X_1 + m_2 g X_2}{m_1 g + m_2 g} = \frac{m_1 g(x_1 + l - a) + m_2 g(x_2 - a)}{m_1 g + m_2 g}.$$

Так как x_c=const, то приравняем значения абсциссы центра масс:

$$\frac{m_1 g x_1 + m_2 g x_2}{m_1 g + m_2 g} = \frac{m_1 g(x_1 + l - a) + m_2 g(x_2 - a)}{m_1 g + m_2 g},$$

тогда

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(x_1 + l - a) + m_2(x_2 - a),$$

откуда

$$a = l\frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

т.е. перемещение лодки a меньше относительного перемещения человека l во столько раз, во сколько раз вес человека $m_1 g$ меньше суммы весов человека и лодки $m_1 g + m_2 g$.

5. Основные теоремы механики точки и системы. Законы сохранения.

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой, по существу, систему материальных точек, или частиц. Если система с течением времени изменяется, то говорят, что изменяется её состояние. Состояние системы характеризуется одновременным заданием положений (координат) и скоростей всех её частиц.

Зная законы, по которым действуют на частицы силы, и состояние системы в некоторый начальный момент времени, можно, как показывает опыт, с помощью уравнений движения предсказать её дальнейшее поведение, т.е. найти состояние системы в любой момент времени. Так, например, решается задача о движении планет Солнечной системы.

Детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения часто бывает настолько затруднительно (например, из-за сложности самой системы), что довести решение до конца представляется практически невозможным. А в тех случаях, когда законы, по которым действуют силы, вообще неизвестны, такой подход оказывается в принципе неосуществимым. Кроме того, существует ряд задач, в которых детальное рассмотрение движения отдельных частиц просто не имеет смысла (например, описание отдельных молекул газа).

Возникает вопрос: нет ли каких-либо общих принципов, являющихся следствием законов Ньютона, которые позволили бы иначе подойти к решению задачи, и помогли бы в какой-то степени обойти подобные трудности?

Оказывается, что такие принципы есть. Это так называемые ***общие теоремы механики*** и ***законы сохранения.***

Уже было отмечено, что при движении системы её состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие величины, которые обладают весьма важным свойством изменяться во времени по определённым законам. Весьма важным и замечательным свойством является сохранение некоторых из таких величин. Среди этих изменяющихся и сохраняющихся величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса.

Теоремы об изменении указанных выше величин носят в классической механике название общих теорем.

Примечание. Обратим внимание на достаточно простой вывод обеих теорем из основного уравнения динамики материальной точки. При всей своей внешней простоте они имеют фундаментальное значение: одна теорема связывает скалярные величины (и содержит расстояния), вторая связывает векторные величины (и содержит время).

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса относятся к числу тех фундаментальных принципов физики, значение которых трудно переоценить. Роль этих законов особенно возросла после того, как выяснилось, что они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные принципы природы. Они «работают» и для элементарных частиц, и для космических объектов, и в физике твёрдого тела и лежат в основе современной физики.

Примечание. Следует обратить внимание на тот факт, что ***все теоремы и законы имеют границы применимости!*** Мы будем на это обращать особое внимание.

Законы сохранения являются весьма мощным и эффективным инструментом исследования, которым постоянно пользуются физики. Это обусловлено тем, что законы сохранения:

1) не зависят ни от траекторий частиц, ни от характера действующих сил, поэтому они позволяют получить ряд существенных заключений о свойствах различных механических процессов, не вникая в их детальное рассмотрение с помощью уравнений движения;

2) не зависят от характера действующих сил, позволяют использовать их даже тогда, когда силы неизвестны (в этих случаях законы сохранения являются единственным и незаменимым инструментом исследования, как в физике элементарных частиц);

3) могут оказать существенную помощь при решении многих задач о движении частиц, даже в тех случаях, когда силы в точности известны; (Хотя все эти задачи могут быть решены с помощью уравнений движения, привлечение законов сохранения очень часто позволяет получить решение наиболее простым и изящным путём, избавляя нас от громоздких и утомительных расчётов).

Если выясняется, что такой-то процесс противоречит законам сохранения, то сразу можно утверждать: этот процесс невозможен, бессмысленно пытаться его осуществить.

Примечание. Достаточно часто можно встретить такой подход к решению физических задач: последовательно проверяется выполняемость всех законов сохранения; если подобный «перебор» не даёт результата, задача решается с использованием уравнений движения. *При подобном подходе могут быть пропущены крайне необходимые (оговоренные в условии задачи) этапы решения и не определены необходимые (по условию)* *величины.* ***Решение задач динамики требует выбора пути решения, определяемого условием задачи!***

5.1. Теорема об изменении количества движения (импульса). Закон сохранения импульса. Замкнутая система.

Материальная точка. Примечательно, что эту теорему динамики иногда в литературе называют 4-ым законом Ньютона. Попытаемся разобраться… Итак, математическое выражение второго закона Ньютона для точки с постоянной массой имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{1}$$

Предположим, что сила, фигурирующая в законе, является функцией времени: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, тогда получившееся уравнение допускает интегрирование при разделении переменных:

$$m d\vec{v} = \vec{F}(t)dt; \qquad m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F}(t)dt \tag{2}$$

Получено уравнение, являющееся теоремой об изменении количества движения материальной точки (по терминологии классической механики). В школьных учебниках встречаются «импульс точки» $\vec{p} = m\vec{v}$ и «импульс силы» $\int_0^t \vec{F}(t)dt$.

Если $\vec{F} = \overrightarrow{const}$, то уравнение (2) принимает вид

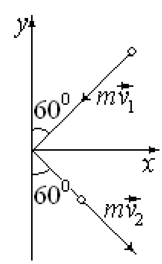
$$\vec{mv} - \vec{mv_0} = \vec{F}t. \qquad (3)$$

Пример 1. Молекула массой *m*, имеющая скорость $\vec{v}$ ударяется в стенку сосуда под углом 60^0 и упруго отражается. Как изменяется при ударе величина импульса молекулы?

Решение. Изменение импульса молекулы вычисляется по формуле $\vec{mv_2} - \vec{mv_1}$. Поскольку при упругом отражении углы падения и отражения равны, то в проекциях на оси координат, получим:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = -mv\sin 60^0 + mv\sin 60^0 = 0;$$

$$mv_{2y} - mv_{1y} = mvcos 60^0 + mv\cos 60^0 = 2mv \cdot \frac{1}{2} = mv.$$



Сложение полученных векторных составляющих даёт mv.

Ответ: mv.

Импульс системы. Рассмотрим произвольную систему частиц. В общем случае частицы этой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в данную систему. В соответствии с этим силы взаимодействия между частицами системы называют *внутренними*, а силы, обусловленные действием других тел, не входящих в данную систему – *внешними.* Ясно, что такое разделение сил условно – оно целиком зависит от интересующей нас системы частиц.

Примечание. В неинерциальных системах отсчёта к внешним силам относятся и силы инерции.

Импульс системы определяется как векторная сумма импульсов её отдельных частиц:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_i , \tag{4}$$

где $\vec{p}_i$ - импульс *i*-той частицы.

Заметим, что импульс системы – величина аддитивная, т.е. импульс системы равен сумме импульсов её отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.

Найдём физическую величину, которая определяет изменение импульса системы. Для этого продифференцируем выражение (4) по времени

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^e + \sum_i \vec{F}_i^i , \tag{5}$$

где $\sum_i \vec{F}_i^e$ - сумма действующих на систему внешних сил, $\sum_i \vec{F}_i^i$ - сумма действующих внутренних сил.

По третьему закону Ньютона внутренние силы, действующие между элементами системы, в сумме дают нуль, поэтому закон изменения импульса системы содержит только внешние силы и аналогичен закону изменения импульса для материальной точки:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^e ; \ \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i^e dt. \qquad (6)$$

При постоянстве действующих сил

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}_{\text{внеш}} t, \qquad (7)$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – равнодействующая всех действующих внешних сил.

Уравнения (5), (6) и (7) справедливы как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчёта. Следует только иметь ввиду, что в неинерциальных системах отсчёта необходимо учитывать и действие сил инерции, играющих роль внешних сил: в правой части уравнения (7) нужно подставить $(\vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{инер}})t$, где $\vec{F}_{\text{инер}}$ – равнодействующая всех сил инерции системы.

Замкнутая (изолированная) система. Так называется система частиц, на которую не действуют никакие внешние силы (если их действием пренебрегается, это упрощение должно быть обосновано). Очевидно, что понятие замкнутой системы имеет строгий смысл только по отношению к инерциальной системе отсчёта, поскольку в неинерциальных системах отсчёта всегда действуют силы инерции, играющие роль внешних сил.

Понятие замкнутой системы является обобщением понятия изолированной материальной точки и играет весьма важную роль в физике.

Согласно уравнениям (5), (6) и (7) импульс системы может изменяться под действием только внешних сил. Внутренние силы не могут изменить импульс системы. Из этой посылки достаточно часто выводят ***закон сохранения импульса:***

Импульс замкнутой системы частиц остаётся постоянным, т.е. не изменяется со временем:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i(t) = \overrightarrow{const}. \quad (8)$$

Пример 2. Снаряд массой 25 кг, имеющий скорость 300 км/час, находясь в верхней точке траектории, разрывается на две части. Часть, имеющая массу 15 кг, после взрыва летит по направлению полёта снаряда со скоростью 400 км/час. Определить скорость второй части снаряда в момент взрыва.

Решение. Достаточно часто в решебниках при решении задач подобного типа встречается ремарка: «будем считать системы замкнутой, тогда…». По условию задачи ***система замкнутой не является!*** И на снаряд, и на оба осколка, действуют не скомпенсированные силы тяжести, являющиеся внешними! При этом закон сохранения импульса выполняется, только причина сохранения объясняется другими причинами…

Примечание. Импульс системы сохраняется при равенстве нулю правой части уравнения (7): при кратковременном ударе, взрыве (*t=0*); и в случае, когда система является замкнутой ($\vec{F}_{внеш} = 0$, не действуют внешние силы).

При решении задачи 2 проекция закона сохранения импульса

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

на горизонтальную ось даёт при направлении векторов скорости вдоль оси, совпадающей по направлению с вектором скорости снаряда в момент взрыва:

$$25 \cdot 300 = 15 \cdot 400 + 10 v_2; \; v_2 = 150 \text{ км/час.}$$

***Ответ*:** 150 км/час по направлению движения снаряда.

Продолжаем разговор о замкнутой системе… Импульс отдельных частиц или частей замкнутой системы может меняться со временем, что и подчёркнуто в уравнении (8). Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение импульса одной части системы равно убыли импульса оставшейся части системы. Другими словами, отдельные части системы могут только обмениваться импульсами. Обнаружив в некоторой системе приращение импульса, можно утверждать, что это приращение произошло за счёт убыли импульса в окружающих телах.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии, что результирующая всех внешних сил равна нулю. Это вытекает из уравнений (6) и (7). В практическом отношении сохранение импульса в этих случаях представляет особый интерес, ибо даёт возможность получать достаточно простым путём ряд сведений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

У незамкнутой системы может сохраняться (как в примере 2) не сам импульс $\vec{p}$, а его проекция p_x на некоторое направление x. При этом внешние силы должны быть перпендикулярными к этой оси.

5.2. Работа простейших сил.

Определение. Работа силы $\vec{P}$ на перемещении $\vec{u}$

$$A = \vec{P}\ \vec{u}, \tag{1}$$

т.е. *работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения точки её приложения.*

При движении точки в любом направлении по траектории элементарная работа силы

$$\delta A = Pds \cos\left(\widehat{\vec{P},\vec{\tau}}\right), \tag{2}$$

где P – модуль силы, приложенной к точке; ds – приращение дуговой координаты (алгебраическая величина) при естественном способе задания движения; $\left(\widehat{\vec{P},\vec{\tau}}\right)$ - угол между вектором силы $\vec{P}$ и направлением орта $\vec{\tau}$, направленного всегда по касательной в сторону увеличения дуговой координаты.

Формула (2) может быть представлена в виде

$$\delta A = P_\tau\, ds, \tag{3}$$

которая показывает, что работу на перемещении ds совершает только касательная составляющая силы $\overrightarrow{P_\tau}$, работа же нормальной составляющей $\overrightarrow{P_n}$, перпендикулярной к направлению скорости точки $\vec{v}$, равна нулю.

Обозначив проекции силы $\overrightarrow{P}$ на координатные оси X, Y, Z, а проекции вектора элементарного перемещения $\overrightarrow{dr}$ на оси dx, dy, dz, получим скалярное произведение

$$\delta A = \overrightarrow{P}\ \overrightarrow{dr} = Xdx + Ydy + Zdz \tag{4}$$

Теорема 1. Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ на том же перемещении.

Теорема 2. Работа постоянной по модулю и направлению силы на результирующем перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на составляющих перемещениях.

5.2.1. Работа силы тяжести.

Как известно, вектор силы тяжести вертикален, направлен вниз и по модулю равен $\overrightarrow{mg}$. Пусть на материальную точку действует сила тяжести. По правилу нахождения скалярного произведения двух векторов с использованием их координат (9), будем иметь:

$$A(\overrightarrow{mg}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y \cdot dy + \int_{z_1}^{z_2} -mg \cdot dz = mg(z_1 - z_2). \tag{5}$$

Здесь $H = z_1 - z_2$ величина вертикального перемещения точки. Если точка в поле тяготения опускается, то работа силы тяжести – положительна; поднимается – сила тяжести совершает отрицательную работу. Ясно, что первые два интеграла в выражении (7) равны нулю, поскольку сила тяжести не имеет горизонтальных составляющих.

Примечание. Достаточно часто вместо термина «сила тяжести» в школьных учебниках фигурирует «вес». ***Вес тела*** *определяется, как сила, с которой тело действует на опору, или растягивает нить, к которой это тело подвешено.* ***Сила тяжести*** *определяется как сила, с которой тело притягивается к Земле.* Принято считать, что обе названные силы приложены к центру масс, направлены вертикально вниз и (если центр масс тела не движется с ускорением) равны.

5.2.2. Работа силы трения

Если к твёрдому телу, покоящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, приложить горизонтальную силу $\vec{S}$, то действие этой силы вызовет появление силы сцепления (трения) $\vec{F}_{тр} = -\vec{S}$, представляющей собой силу противодействия плоскости смещению тела. Эта сила направлена вдоль плоскости, по которой соприкасаются тела. Благодаря сцеплению тело остаётся в покое при изменении модуля силы $\vec{S}$ от нуля до некоторого значения $S_{\max}$. Это означает, что модуль силы сцепления тоже изменяется от $F_{тр} = 0$ до $F_{тр} = F^{\max}$ в момент начала движения. Модуль максимальной силы сцепления, как показывает опыт, пропорционален нормальному давлению N на плоскость, тогда

$$F^{\max} = f_c \cdot N.$$

Коэффициент f_c является отвлечённым числом и называется коэффициентом сцепления (трения). Коэффициент сцепления, как правило, фигурирует в задачах статики (его ещё называют коэффициентом трения покоя), при движении тела чаще говорят о наличии коэффициента трения.

Подробнее о силах трения скольжения и качения можно будет прочитать в отдельном разделе далее.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направления вектора скорости $\vec{v}$, а, следовательно, и вектора элементарного перемещения $\overrightarrow{ds}$. В общем случае величина силы трения может и не быть постоянной, поэтому в общем случае работа силы трения отрицательна и равна:

$$A(\overrightarrow{F}_{mp}) = -\int_{S_1}^{S_2} F_{mp} ds .$$

Примечание. Работа силы трения вычисляется как интеграл вдоль траектории движения. При движении, например, по шероховатой сферической поверхности, находящейся в поле земного тяготения, сила трения, зависящая от силы нормального давления, не будет оставаться постоянной.

При постоянстве силы трения на участке траектории работа силы трения равна

$$A(\vec{F}_{тр}) = -F_{тр}\left(S_2 - S_1\right),$$

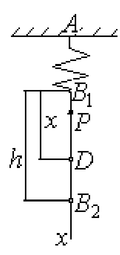
где S_2 - S_1 – расстояние, пройденное по траектории (разность дуговых координат при естественном способе задания движения).

5.2.3. Работа силы упругости.

Рассмотрим пружину AB_1, конец A которой закреплён неподвижно. При растяжении пружины в ней возникают силы упругости, и на тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины $\vec{P}$. Эта сила направлена противоположно перемещению свободного конца пружины, а её модуль пропорционален удлинению пружины

$$P = c \cdot B_1D,$$

где c – коэффициент жёсткости пружины.



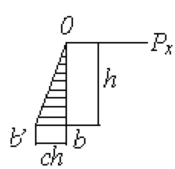


Рис. 1 Рис. 2

Направим ось x по оси пружины, приняв за начало координат конец недеформированной пружины B_1.

Проекция силы упругости $\vec{P}$ на ось x: $P_x = -cx$.

Вычислим работу силы упругости на перемещении при помощи формулы скалярного произведения для проекций:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Проекции силы упругости, направленной по оси x, на оси координат:

$$X = -cx; \qquad Y=0; \qquad Z=0.$$

Элементарная работа силы упругости $\delta A = -cxdx$.

Работа силы упругости на перемещении $B_1B_2 = h$:

$$A_{1,2} = -c\int_{o}^{h} xdx = -\frac{cx^2}{2} \tag{6}$$

Наибольшей деформации пружины B_1B_2 соответствует наибольшее значение силы упругости $P_{\max} = ch$, а потому $A_{1,2} = \frac{1}{2}P_{\max}h$.

Работа силы упругости отрицательна в том случае, когда деформация пружины увеличивается, т.е. когда сила упругости направлена противоположно перемещению её точки приложения, и положительна, когда деформация уменьшается.

На рис.2 показан график изменения проекции силы упругости P_x в зависимости от перемещения конца пружины x. Так как $P_x = -cx$, то линия графика Ob' – прямая.

Работа силы упругости определяется площадью треугольника $Ob'b$.

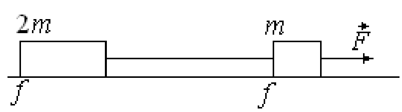
Если начальная деформация пружины не равна нулю, а равна x_0, то работа силы упругости на дополнительной деформации (x_1-x_0) равна:

$$A_{1,0} = -c\int_{x_0}^{x_x} x dx = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2) \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) имеют большое применение в технических расчётах. Эти формулы используются для вычисления работы сил упругости во всех случаях, когда имеется пропорциональность между силами и деформацией, т.е. когда справедлив закон Гука.

Пример. На горизонтальной плоскости лежат связанные тела с массами m и $2m$. Коэффициент трения между каждым из тел и плоскостью равен f. Какую силу нужно приложить к телу меньшей массы, чтобы оба тела сдвинулись с места? Рассмотреть случаи, когда тела связаны нерастяжимой нитью и пружиной.

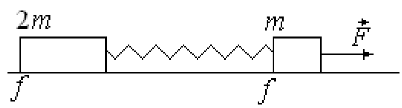
Решение. 1. Рассмотрим случай, когда два тела связаны нерастяжимой нитью.



Этот тривиальный случай (длина нити не изменяется, следовательно, система тел вместе с нитью может рассматриваться в данной задаче как единое недеформируемое целое) рассматривается в статике (см. далее). Ясно, что силы тяжести $\overrightarrow{mg}$ и $2\overrightarrow{mg}$ и нормальные реакции $\overrightarrow{N}_1$ и $\overrightarrow{N}_2$, приложенные к каждому из тел, перпендикулярны к линии действия силы $\overrightarrow{F}$ и влияют только на величины сил трения: $F_1 = fmg$ и $F_2 = 2fmg$ (силы трения $\overrightarrow{F}_1$ и $\overrightarrow{F}_2$, очевидно, должны быть направлены в сторону, противоположную направлению силы $\vec{F}$). Натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, приложенные к двум телам и направленные вдоль нити, являются внутренними для системы тел и при нерастяжимости нити друг друга компенсируют.

Тогда при величине силы $F > 3fmg$ оба тела одновременно будут сдвинуты с места.

2. Случай, когда два тела связаны между собой пружиной (пусть её жёсткость равна k), качественно отличается от ранее рассмотренного случая с нитью.



Обратим внимание на то, что сначала, увеличивая величину силы F, мы сдвигаем с места тело массой m (при этом сила упругости возрастает пропорционально удлинению пружины), а только при равенстве силы упругости силе трения, действующей на тело массой $2m$ большее тело будет сдвинуто с места, и выполнится условие, поставленной задачи.

Итак, при условии $F_{упр} > F_{тр2}$, $2fmg < kx$ (*) тело массой $2m$ будет сдвинуто с места.

Поскольку сила упругости не является постоянной, при решении задачи рассмотрим, какую работу совершат все приложенные к телу массой m силы при растяжении пружины на величину x. Такой подход при малом x в классической механике называется методом возможных перемещений.

Итак, (с учётом направления векторов сил) работа внешней силы должна быть равна сумме работ силы трения и силы упругости: $Fx = fmgx + \frac{kx^2}{2}$. Поскольку $x \neq 0$, получаем $F = fmg + \frac{kx}{2}$, а с учётом соотношения (*) $F > 2fmg$.

Примечание 1. В решении подобных задач встречается «усреднение» силы упругости, изменяющейся от 0 до значения kx как $\frac{kx}{2}$, при этом подгонка под ответ при помощи усреднения никак не обосновывается.

Примечание 2. Мы получили почти парадоксальный результат… Вспомним, сколько раз мы видели пружины в сцепках между вагонами на железнодорожных вокзалах!

5.4. Потенциальная энергия.

Силовым полем называется физическое пространство, удовлетворяющее условию, при котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от положения точек и времени (но не от скоростей точек).

Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется *стационарным*. Примерами силовых полей могут служить поле силы тяжести, электростатическое поле, поле силы упругости.

Стационарное поле в одной системе отсчёта может оказаться нестационарным в другой. В стационарном силовом поле сила, действующая на точку, зависит только от её положения.

В общем случае работа, которую совершают силы поля при перемещении точки из одного положения в другое, зависит от траектории между этими положениями (или пути).

Стационарное силовое поле называют потенциальным, если существует такая функция, однозначно зависящая от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются как

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; \qquad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \tag{8}$$

Функцию

$$\Pi = \Pi(x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2; ...; x_n; y_n; z_n) \tag{9}$$

называют потенциальной энергией.

Примечание 1. Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, так как для проекции силы на координатные оси требуются только частные производные по координатам от этой функции и добавление постоянной к функции Π не влияет не её проекции X_i; Y_i; Z_i.

Примечание 2. Потенциальная энергия системы в любом данном её положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенных к её точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое.

Так как эта сумма работ зависит только от того, из какого положения система перемещается в выбранное нулевое положение, то потенциальная энергия Π зависит только от положения системы.

Из определения потенциальной энергии следует, что в нулевом положении её значение равно нулю:

$$\Pi_0 = 0. \tag{10}$$

Примечание 3. Работа сил поля на перемещении системы из первого положения во второе равна разности:

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2. \tag{11}$$

Таким образом, работа сил, *приложенных к точкам механической системы, на любом её перемещении равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях системы.*

Необходимое и достаточное условие потенциальности силового поля:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{12}$$

Примечание 4. Постоянные по величине и направлению силы могут быть отнесены к силам, имеющим потенциал. Очевидно, что поле силы тяжести является потенциальным.

Ещё одним примером потенциального поля является поле центральной силы притяжения.

Ранее упоминалось, что поле сил упругости потенциально.

5.5. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и системы.

Предположим, что скорость является функцией координаты, а координата в свою очередь является функцией времени: скорость является сложной функцией времени: $\vec{v} = \vec{v}(s(t))$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}, \text{ тогда}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; m\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}; m\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}\vec{v} = \vec{F}; m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}\cdot d\vec{s};$$

окончательно получаем после интегрирования

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^S \vec{F}\cdot d\vec{s}\,. \tag{13}$$

Примечание. Работа силы, напоминаю, представляет собой интеграл от скалярного произведения силы на элемент траектории:

$$A = \int_0^S \vec{F}\cdot d\vec{s}\,. \tag{14}$$

Система материальных точек. Предположим, что имеется система, состоящая из n материальных точек. Разделим все силы, действующие на точки M_1, M_2,…,M_n на внешние силы $\vec{P}_1^e$; $\vec{P}_2^e$; …; $\vec{P}_n^e$ и внутренние силы $\vec{P}_1^j$; $\vec{P}_2^j$; …, $\vec{P}_n^j$. Применим к движению каждой точки M_i теорему об изменении кинетической энергии. Предположим, что при перемещении механической системы из первого положения во второе, каждая точка M_i перемещается из положения $M_{i(1)}$ в положение $M_{i(2)}$, причём скорость её изменяется от $v_{i(1)}$ до $v_{i(2)}$, тогда по уравнениям (13) и (14) для каждой материальной точки

$$\frac{mv_{i(1)}^2}{2} - \frac{mv_{i(2)}^2}{2} = A_i^e + A_i^j. \tag{15}$$

где A_i^e - работа силы $\vec{P}_i^e$ и A_i^j - работа силы $\vec{P}_i^j$ на перемещении $M_{i(1)}M_{i(2)}$.

Просуммируем левые и правые части составленных n равенств:

$$\left(\sum\frac{mv_i^2}{2}\right)_2 - \left(\sum\frac{mv_i^2}{2}\right)_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j, \tag{16}$$

где $\left(\sum\frac{mv_i^2}{2}\right)_1 = T_1$ - кинетическая энергия системы в первом её положении, $\left(\sum\frac{mv_i^2}{2}\right)_2 = T_2$ - кинетическая энергия системы во втором её положении. Таким, образом,

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j. \tag{17}$$

Уравнение (17) представляет собой теорему об изменении кинетической энергии механической системы: *изменение кинетической* *энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки на этом перемещении.*

Примечание 1. Сумма работ внутренних сил для твёрдого тела на любом перемещении равна нулю, т.е.

$$\sum A_i^j = 0.$$

Для твёрдого тела уравнение (17) принимает вид

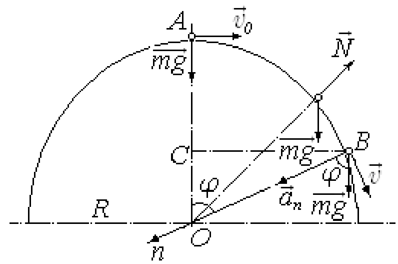
$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e, \qquad (18)$$

т.е. *изменение кинетической энергии твёрдого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.*

Примечание 2. Сумма работ внутренних сил для неизменяемой системы (системы, в которой отсутствуют деформации; пружины, как правило, являются связующими элементами, и в систему не входят) на любом перемещении равна нулю.

Пример 1. Горошине, лежащей на вершине мяча радиуса *R*, сообщается горизонтальная скорость v_0. В какой точке горошина оторвётся от поверхности мяча? Какую скорость необходимо сообщить горошине для того, чтобы она оторвалась от поверхности мяча в верхней точке?

Решение. Будем рассматривать горошину как материальную точку. При решении задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки и основным уравнением динамики материальной точки.



Место отрыва горошины (точка *B*), начавшей движение в точке *A* со скоростью v_0, однозначно задаётся углом φ.

Движение горошины от точки *A* до точки *B* происходит под действием силы тяжести $\overrightarrow{mg}$ и нормальной реакции $\overrightarrow{N}$, при этом в момент отрыва она имеет скорость v. По теореме об изменении кинетической энергии с учётом того, что нормальная реакция работы не совершает, получаем:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg\cdot AC; \qquad \frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg\left(R-R\cos\varphi\right);$$

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mgR-mgR\cos\varphi; \qquad \frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=gR-gR\cos\varphi.$$

(*)

В момент отрыва горошины от мяча нормальная реакция обращается в нуль. Запишем основное уравнение динамики для момента отрыва:

$$\overrightarrow{ma}=\overrightarrow{mg}.$$

В проекции на ось нормали получаем:

$$ma_n = mg\cos\varphi; \qquad m\frac{v^2}{R} = mg\cos\varphi;$$

$$v^2 = gR\cos\varphi. \tag{**}$$

Исключая v из уравнения (*) при помощи уравнения (**), получаем после преобразований:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right).$$

Итак, место отрыва горошины от мяча определяется углом φ.

Если горошина отрывается в верхней точке, $\varphi=0$, тогда $\cos\varphi=1$, и для отрыва горошина должна иметь скорость

$$v_0 = \sqrt{gR}. \tag{***}$$

Ясно, что это минимальная скорость, при которой происходит отрыв.

Примечание. Если вместо мяча взять Земной шар, то формула (***) даёт знакомую первую космическую скорость.

Рассмотрим задачу на использование общих теорем динамики.

Пример 2. Тело, имеющее скорость v_0, начинает движение вверх по наклонной плоскости, имеющей угол ската φ. С какой скоростью и через какое время оно соскользнёт с плоскости, если коэффициент трения между телом и плоскостью равен f?

Решение. 1) Определим скорость, с которой тело соскользнёт с наклонной плоскости. Для этого дважды используем теорему об изменении кинетической энергии. Очевидно, что тело, движущееся поступательно, уменьшает свою скорость, в точке A останавливается, а потом соскальзывает с наклонной плоскости. Отметим, что при этом при движении вверх и вниз тело проходит одно и то же расстояние S.

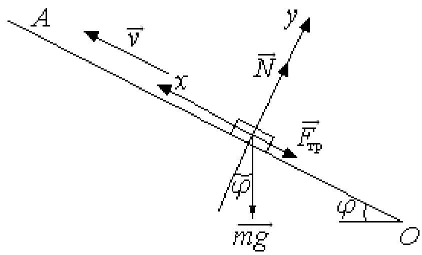


Рис. 1

Запишем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для движения тела вверх (рис. 1):

$$\frac{mv_A^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A\left(\overrightarrow{mg}\right)+A\left(\vec{F}_{mp}\right)+A\left(\vec{N}\right).$$

Работа нормальной реакции равна нулю, работы сил тяжести и трения отрицательны, v_A=0.

$$-\frac{mv_0^2}{2}=-mgS\sin\varphi-fmgS\cos\varphi;$$

$$v_0^2=2gS\left(\sin\varphi+f\cos\varphi\right). \qquad (*)$$

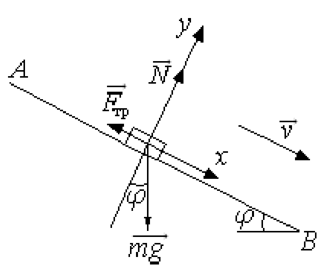


Рис. 2

Запишем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для движения тела вниз (рис. 2):

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A\left(\overrightarrow{mg}\right) + A\left(\vec{F}_{тр}\right) + A\left(\vec{N}\right).$$

Работа нормальной реакции равна нулю, работа силы трения отрицательна, работа силы тяжести положительна, v_A=0.

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgS\sin\varphi - fmgS\cos\varphi\,;$$

$$v_B^2 = 2gS\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right). \qquad (**)$$

Разделив уравнение (**) на уравнение (*), после преобразований получим:

$$v_B = v_0\sqrt{\frac{\sin\varphi - f\cos\varphi}{\sin\varphi + f\cos\varphi}}\,. \qquad (***)$$

Отметим, что скорость, с которой тело спустится с наклонной плоскости (при наличии трения), меньше скорости v_0.

2) Зная скорость v_B, определим время, через которое тело вернётся к подножью наклонной плоскости.

Запишем уравнение теоремы об изменении импульса при подъёме тела и определим время подъёма τ_1:

$$m\vec{v}_A - m\vec{v}_0 = \left(\overrightarrow{mg} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}\right)\tau_1\,.$$

Спроецировав векторное уравнение на оси координат (рис. 1), получим с учётом v_A=0:

$$\begin{cases} -mv_0 = \left(-mg\sin\varphi - F_{тр}\right)\tau_1 \\ 0 = N - mg\cos\varphi \end{cases}.$$

Система уравнений даёт:

$$v_0 = g\left(s\,in\varphi + f\cos\varphi\right)\tau_1;\ \tau_1 = \frac{v_0}{g\left(s\,in\varphi + f\cos\varphi\right)}.$$

Запишем уравнение теоремы об изменении импульса при спуске тела и определим время спуска τ_2:

$$m\vec{v}_B - m\vec{v}_A = \left(\overrightarrow{mg} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}\right)\tau_2.$$

Спроецировав векторное уравнение на оси координат (рис. 2), получим с учётом v_A=0:

$$\begin{cases} mv_B = \left(mg\sin\varphi - F_{тр}\right)\tau_2 \\ 0 = N - mg\cos\varphi \end{cases}.$$

Система уравнений даёт:

$$mv_B = \left(mg\sin\varphi - fmg\cos\varphi\right)\tau_2;$$

$$\tau_2 = \frac{v_B}{g\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right)} = \frac{v_0}{g\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right)}\sqrt{\frac{\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right)}{\left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)}} =$$

$$= \frac{v_0}{g\sqrt{\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right)\left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)}} = \frac{v_0}{g\sqrt{\left(\sin^2\varphi - f^2\cos^2\varphi\right)}}.$$

Время движения является суммой времен подъёма и спуска:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{v_0}{g\sqrt{\left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)}}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sin\varphi - f\cos\varphi\right)}}\right)$$

.

5.4. Закон сохранения механической энергии. Консервативная система.

При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, изменение кинетической энергии системы определяются зависимостями (11) и (17), тогда

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e = \Pi_1 - \Pi_2,$$

откуда

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2,$$

т.е.

$$T + \Pi = const.$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют полной механической энергией системы.

Консервативная система в физике – механическая система, при движении которой сумма её кинетической *T* и потенциальной *П* энергий остаётся величиной постоянной, т.е. имеет место закон сохранения механической энергии.

Таким образом, *консервативная система – любая механическая система, движущаяся в стационарном (не изменяющемся со временем) потенциальном силовом поле при условии, что система свободна, или наложенные на неё связи являются идеальными и не изменяющимися с течением времени.*

Примечание 1. Примером консервативной системы может служить Солнечная система. В земных условиях, благодаря неизбежному наличию сопротивлений движению, консервативность системы осуществляются грубо приближённо. Например, можно приближённо рассматривать как консервативную систему математический маятник, если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха. Если нить маятника разматывается с катушки, находящейся на оси подвеса, система не является консервативной; не выполняется и теорема об изменении кинетической энергии, поскольку длина нити не остаётся постоянной: связь не является стационарной.

Примечание 2. Полная механическая энергия E, как и потенциальная энергия Π, определяется с точностью до произвольной постоянной.

Замечание 1. Консервативную систему не следует смешивать с замкнутой системой, для которой имеет место закон сохранения количества движения (импульса), т.е. *замкнутая система может вообще не быть консервативной системой, если внутренние силы не являются потенциальными.*

Замечание 2. В свою очередь, *консервативная система может не быть замкнутой, т.е. её движение может происходить в потенциальном силовом поле, образованном телами, не входящими в консервативную систему*, как, например, колебания маятника в поле тяготения Земли.

В реальных условиях на механическую систему могут действовать не только потенциальные силы, и полная механическая энергия системы может изменяться. Это происходит, когда часть энергии механической системы расходуется на преодоление различных сил сопротивления или наблюдается приток энергии от других систем.

Расход механической энергии движущейся механической системы обычно означает превращение её в теплоту, электричество, звук или свет, а приток механической энергии связан с обратным процессом превращения различных видов энергии в механическую энергию.

6. Динамика вращательного движения твёрдого тела.

Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. Пусть к этому телу в некоторой точке A, не лежащей на оси, приложена сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси. Разложим эту силу на две составляющие: $\vec{F_r}$ и $\vec{F_\tau}$ - вдоль радиуса-вектора $\vec{r}$ и перпендикулярно ему. Составляющая $\vec{F_r}$ не может изменять характера движения тела; составляющая $\vec{F_\tau}$ сообщает телу угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$.

Моментом силы $\vec{F}$ *будем называть вектор* $\vec{M}$*, направленный вдоль оси вращения и ориентированный по правилу правого винта относительно вектора силы* $\vec{F}$ (рис. 1):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{1}$$

С математической точки зрения вектор момента силы представляет собой векторное произведение радиус-вектора на вектор силы.

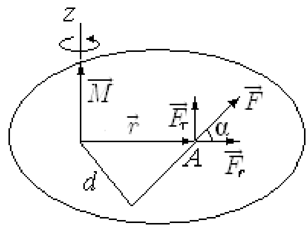


Рис. 1

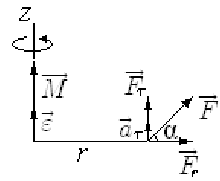


Рис. 2

Модуль момента силы равен

$$M = F \cdot r\sin\alpha = Fd, \tag{1}$$

где $d = r\sin\alpha$ – плечо силы. Оно равно кратчайшему расстоянию между осью вращения и линией действия силы.

6.1. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

Пусть материальная точка массой m вращается на невесомом твёрдом стержне длиной r вокруг оси (рис. 2). Уравнение второго закона Ньютона в проекции на касательную к траектории движения точки (тангенциальную ось) запишется в виде:

$$ma_\tau = F_\tau = F\sin\alpha. \tag{2}$$

Но тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(r\omega\right)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon,$$

тогда после подстановки в формулу (2) получим:

$$mr\varepsilon = F\sin\alpha.$$

Умножив обе части последнего равенства на r, чтобы свести действие силы к действию момента силы, будем иметь:

$$mr^2 \cdot \varepsilon = Fr\sin\alpha = M. \tag{3}$$

Произведение массы точки на квадрат её расстояния до оси называется ***моментом инерции*** *материальной точки относительно оси*:

$$I = mr^2. \tag{4}$$

Единица момента инерции в SI – килограмм-метр в квадрате (кг$\cdot$м^2).

Выражение (3) может быть переписано в виде:

$$I\varepsilon = M. \tag{5}$$

Все рассуждения для материальной точки нами были проведены для скалярных выражений. Поскольку векторы $\overrightarrow{M}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль оси вращения, выражение (5) в векторном виде запишется как

$$I\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{M}. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) представляют *основное уравнение динамики вращательного движения* (в скалярной и векторной форме соответственно).

Твёрдое тело является совокупностью материальных точек с массами m_1, m_2, m_3,…,m_n, расположенных на расстояниях r_1, r_2, r_3,…,r_n от оси вращения. Поскольку все эти точки находятся на одном твёрдом теле, вращающемся с угловым ускорением ε, просуммировав уравнения (6) с учётом (4), записанные для всех материальных точек тела, получим:

$$\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2\right)\vec{\varepsilon} = \sum_i \overrightarrow{M}_i^e,$$

где $\sum_i \overrightarrow{M_i}^e$ - сумма моментов внешних сил, приложенных к твёрдому телу. Ясно, что суммарный момент внутренних сил при этом равен нулю.

Моментом инерции тела относительно оси *является сумма моментов инерции составляющих его материальных точек*:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 . \tag{7}$$

Примечание. Момент инерции твёрдого тела при вращательном движении играет ту же роль, что и масса тела при его поступательном движении: *момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.*

Обозначив сумму моментов внешних сил $\sum_i \overrightarrow{M_i}^e$ через M, увидим, что уравнение (6) применимо и к любому вращающемуся телу.

Основное уравнение динамики вращающегося твёрдого тела аналогично основному уравнению динамики материальной точки (поступательно движущегося тела). Действительно, ускорение материальной точки пропорционально сумме действующих на неё сил и обратно пропорционально её массе $\left(\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}\right)$; угловое ускорение вращающегося твёрдого тела пропорционально сумме моментов сил и обратно пропорционально моменту инерции тела $\left(\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}}{I}\right)$.

Если масса тела является инвариантом и не зависит от того, каково его поступательное движение, то момент инерции тела зависит от того, как расположена ось вращения. При изменении положения оси в пространстве изменяется и величина момента инерции тела.

Интересно, что момент инерции тела зависит не только от массы и формы тела, но и от распределения масс внутри тела и положения оси, относительно которой оно вращается.

Теорема Гюйгенса-Штейнера. Если известен момент инерции I_0 относительно произвольной оси, проходящей через центр масс тела, то для нахождения момента инерции I этого тела относительно оси, параллельной первой и отстоящей от неё на расстоянии d, используется соотношение:

$$I = I_0 + md^2. \tag{8}$$

Тело массой m	Ось вращения проходит	Момент инерции I_0
Обруч	через центр обруча перпендикулярно плоскости обруча	mR^2
Диск (цилиндр)	через центр диска перпендикулярно плоскости диска	$0{,}5mR^2$
Диск	через центр диска вдоль его диаметра	$0{,}25mR^2$
Шар	через центр шара	$0{,}4mR^2$
Стержень длиной l	через середину стержня перпендикулярно ему	$\frac{1}{12}ml^2$

Примечание. Обратим внимание на то, что диск и обруч одинаковой массы и радиуса имеют моменты инерции, отличающиеся в два раза (см. таблицу); два тела одинаковой массы и размера имеют разные динамические характеристики при вращении (диск раскручивается быстрее обруча).

Пример 1. Определить момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня ему перпендикулярно.

Решение. По сформулированной теореме $I = I_0 + md^2$, но $I_0 = \dfrac{1}{12}ml^2$, а расстояние от середины стержня (центр масс) до его конца $d = \dfrac{1}{2}l$, тогда искомый момент инерции равен $I = \dfrac{1}{12}ml^2 + \dfrac{1}{4}ml^2 = \dfrac{1}{3}ml^2$.

Для тел неоднородных или имеющих сложную форму момент инерции относительно какой-либо оси определяется экспериментально. В классической механике и технике момент инерции тела относительно оси x задаётся *радиусом инерции* i_x по формуле:

$$I = m\,i_x^2.$$

Ясно, что такой момент инерции должна иметь материальная точка с массой тела, отстоящая от оси x на расстояние, равное радиусу инерции i_x.

Пример 2. Тело, имеющее относительно оси вращения момент инерции I_x раскручивается из состояния покоя под действием постоянного момента сил $M_{\underline{x}}$. Записать закон его вращательного движения.

Решение. По основному уравнению динамики вращательного движения (5) $I_x\varepsilon = M_x$. Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$, где ω – угловая скорость тела. Тогда $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{M_x}{I_x}$, и далее получаем цепочку преобразований, учитывая, что вращение начинается из состояния покоя ($\omega_0 = 0$), и начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$:

$$d\omega = \frac{M_x}{I_x} dt\,; \quad \int_0^{\omega} d\omega = \frac{M_x}{I_x} \int_0^{t} dt\,; \qquad \omega = \frac{M_x}{I_x} t\,.$$

Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, тогда далее:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_x}{I_x} t; \quad d\varphi = \frac{M_x}{I_x} t dt\,; \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \frac{M_x}{I_x} \int_0^{t} t dt\,;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_x}{2I_x} t^2\,.$$

Ответ: $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{M_x}{2I_x} t^2\,.$

Примечание. Вспомним из кинематики вращательного движения закон изменения угла поворота со временем при $\varepsilon = const$: $\varphi = \varphi_0 + \omega t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}.$

Кинетическая энергия вращающегося тела.

Мы уже упоминали об аналогии между движением материальной точки (поступательным движением твёрдого тела) и вращением твёрдого тела. Без вывода формулы *кинетической энергии вращающегося тела* (см. вывод формулы для материальной точки) дадим формулу:

$$T = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (9)$$

Примечание. Теорема об изменении кинетической энергии выполняется и для вращающегося тела, правда работу теперь будут совершать не силы, а моменты сил.

Работа момента силы (или пары сил) равна

$$A\left(M\right)=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}Md\varphi\,, \tag{10}$$

или для постоянного момента

$$A(M) = M(\varphi\text{-}\varphi_0).$$

7. Динамика плоскопараллельного движения.

В кинематике уже упоминалось о том, что плоскопараллельное движение тела рассматривается как совокупность поступательного движения тела и его поворота относительно точки, называемой полюсом.

В динамике рассматривается движение центра масс тела и поворот тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение. Уравнения движения тела в плоскости образуют систему:

$$\begin{cases} ma_{cx}=\sum\limits_i F_{ix}^e \\ ma_{cy}=\sum\limits_i F_{iy}^e \\ I_{cz}\varepsilon=\sum\limits_i M_{iz}^e \end{cases}. \tag{11}$$

Пример 1. Диск скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом при основании φ. Найти ускорение центра масс цилиндра.

Решение. На диск действуют сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

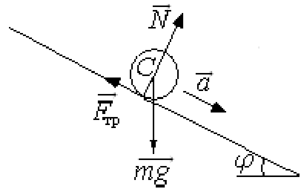


Рис. 3

Вектор ускорения направлен вдоль ската наклонной плоскости. Запишем систему, состоящую из уравнения движения центра масс C в проекции на скат наклонной плоскости и уравнения вращения диска вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$\begin{cases} ma_C = mg\sin\varphi - F_{тр} \\ I_C\varepsilon = M_C \end{cases}.$$

Для сплошного диска $I_C = 0{,}5mr^2$. Точка соприкосновения диска и плоскости является мгновенным центром скоростей, тогда $v_C = \omega r$, где ω – угловая скорость. Ускорение центра диска равно $a_C = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}r = \varepsilon r$, а угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{a_C}{r}$. Только момент силы трения относительно оси, проходящей через центр масс, отличен от нуля и равен $M_C = F_{тр}r$. Итак,

$$\begin{cases} ma_C = mg\sin\varphi - F_{тр} \\ \dfrac{mr^2}{2}\cdot\dfrac{a_C}{r} = F_{тр}r \end{cases},$$

откуда

$$a_C = \frac{2}{3} mg\sin\varphi.$$

Ответ: $a_C = \frac{2}{3} mg\sin\varphi$.

Пример 2. Горизонтальный однородный стержень подвешен за концы к двум нитям. Как изменится натяжение одной из нитей, в момент обрыва второй?

Решение. Когда стержень висит на нитях (рис.4), натяжение каждой из них, очевидно, равно:

$$T_1 = T_2 = T = \frac{1}{2} mg.$$

Запишем уравнения, описывающие движение стержня в момент обрыва одной из нитей (рис. 5); первое уравнение описывает движение центра масс C по вертикали, а второе – уравнение поворота стержня относительно центра масс по часовой стрелке:

$$\begin{cases} ma_C = mg - T^* \\ I_{Cz}\varepsilon = T^* \dfrac{l}{2} \end{cases}.$$

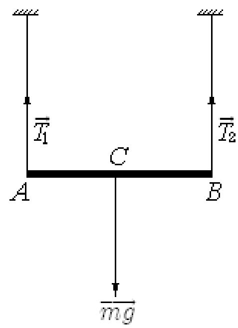


Рис. 4

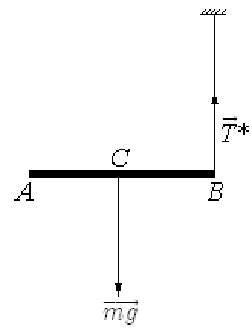


Рис. 5

При движении стержня точка B является мгновенным центром скоростей, тогда скорость центра масс $v_C = \omega AB \; = \omega\dfrac{l}{2}$. Ускорение центра масс $a_C = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{l}{2} = \varepsilon\dfrac{l}{2}$, откуда $\varepsilon = \dfrac{2a_C}{l}$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к стержню равен $I_{Cz} = \dfrac{ml^2}{12}$. Подстановка величин ускорения и момента инерции стержня в систему даёт:

$$\begin{cases} ma_C = mg - T^* \\ \dfrac{ml^2}{12}\cdot\dfrac{2a_C}{l}\varepsilon = T^*\dfrac{l}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} ma_C = mg - T^* \\ ma_C = 3T^* \end{cases}.$$

Вычитая из одного уравнения другое, после преобразований получаем $T^* = \dfrac{1}{4}mg$.

Мы пришли к парадоксальному выводу: при обрыве одной из нитей натяжение оставшейся не увеличивается в два раза, а уменьшается в два раза!

Теорема Кёнига. *Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в её относительном движении относительно центра масс:*

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_{ir}^2}{2} \tag{12}$$

Следствие из теоремы Кёнига. *Кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение, равна*

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cx}\omega^2}{2} \tag{13}$$

и складывается из кинетической энергии точки, расположенной в центре масс тела и имеющей массу тела, и кинетической энергии вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела, перпендикулярно плоскости движения.

Пример 3. Определить кинетическую энергию катящегося по горизонтали без проскальзывания диска массой m, если центр диска имеет скорость v.

Решение. По формуле (13) вычисляется кинетическая энергия диска, совершающего движение в плоскости.

Напомним, что при отсутствии проскальзывания точка P является мгновенным центром скоростей (рис. 6), тогда если радиус диска равен R, скорость точки C и угловая скорость диска связаны соотношением $v = \omega R$, откуда $\omega = \dfrac{v}{R}$.

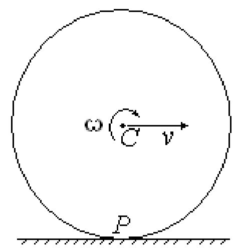


Рис.6

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости равен $I_{\mathrm{C}} = \dfrac{mR^2}{2}$.

Подстановка полученных величин в формулу (12) даёт:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{Cx}\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3mv^2}{4}.$$

Пример 4. Диск радиуса R из состояния покоя скатывается по наклонной плоскости, имеющей угол наклона φ, под действием силы тяжести. Какую угловую скорость он приобретёт, если центр диска переместится вдоль ската наклонной плоскости на расстояние S? Качение происходит без проскальзывания.

Решение. На диск действуют сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

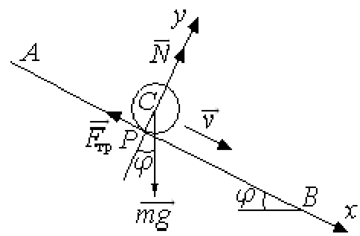


Рис. 7

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_i^e. \qquad (*)$$

Диск начинает движение из состояния покоя, поэтому начальная кинетическая энергия его $T_0 = 0$. Из действующих сил сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ приложены в мгновенном центре скоростей P и работы не совершают. Работа силы тяжести при условии, что центр диска проходит расстояние $S=AB$ вдоль ската наклонной плоскости, равна:

$$A\left(\overrightarrow{mg}\right) = mgS\sin\varphi.$$

В задаче 3 была определена кинетическая энергия катящегося диска: $T = \dfrac{3mv^2}{4}$. С учётом соотношения $v = \omega R$ (см. решение той же задачи) кинетическая энергия диска $T = \dfrac{3m\omega^2R^2}{4}$.

Подстановка полученных величин в формулу (*) даёт после преобразований:

$$\frac{3m\omega^2R^2}{4} = mgS\sin\varphi; \qquad 3\omega^2R^2 = 4gS\sin\varphi;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4gS\sin\varphi}{3R^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{gS\sin\varphi}{3}}$$

Ответ: $\omega = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{gS\sin\varphi}{3}}$

Примечание. Достаточно подробное изложение динамики плоскопараллельного движения позволит читателям избежать ошибок при решении задач, которые достаточно часто сводятся к задачам на чистый поворот. Напомню, что мгновенные центры скоростей и ускорений для тела, как правило, не совпадают!

8. Динамика относительного движения материальной точки. Неинерциальные системы отсчёта.

В разделе «Кинематика» при рассмотрении сложного движения точки (подраздел 3) вводятся понятия относительного, переносного и абсолютного движения. Пусть имеются неподвижная система координат *Oxyz*, система координат $\Omega\xi\eta\zeta$, движущаяся относительно неподвижной системы координат, и движущаяся точка *M*.

Движение точки *M* относительно подвижной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$ называется относительным, движение точки *M* относительно системы координат *Oxyz* называется абсолютным. Движение той точки относительной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка *M*, называется переносным.

В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки $\vec{a}_{а}$ равно геометрической сумме относительного $\vec{a}_{отн}$, переносного $\vec{a}_{пер}$ и кориолисова (поворотного) $\vec{a}_{кор}$ ускорений:

$$\vec{a}_{a} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \tag{14}$$

Пусть переносное движение системы *Ωξηζ* известно, известны и силы, действующие на точку. Общее уравнение динамики для абсолютного движения точки *M* имеет вид

$$m\vec{a}_{a} = \sum_{i} \overrightarrow{F_i}, \tag{15}$$

где $\vec{a}_{а}$ – абсолютное ускорение материальной точки, а $\sum_{i} \overrightarrow{F_i}$ - геометрическая сумма приложенных к точке сил.

Подстановка (14) в основное уравнение динамики (15) даёт:

$$\vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор} = \sum_{i} \overrightarrow{F_i}. \tag{16}$$

Из полученного уравнения определим произведение массы точки на её относительное ускорение:

$$m\vec{a}_{a} = \sum_{i} \overrightarrow{F_i} - m\vec{a}_{пер} - m\vec{a}_{кор}. \tag{17}$$

Введём два вектора $\vec{\Phi}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$ и $\vec{\Phi}_{кор} = -m\vec{a}_{кор}$, численно равные произведениям $ma_{пер}$ и $ma_{кор}$ и направленные противоположно ускорениям $\vec{a}_{отн}$ и $\vec{a}_{пер}$. Эти векторы назовём *переносной и кориолисовой силами инерции.*

Подставим эти векторы в уравнение (17):

$$m\vec{a}_{отн} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{\Phi}_{пер} + \vec{\Phi}_{кор}\,. \tag{18}$$

Уравнение (18) представляет собой *основное уравнение динамики относительного движения материальной точки.*

Правило. *В случае непоступательного переносного движения относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку активным силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции.*

Сопоставление уравнений (15) и (18) показывает, что в инерциальной системе отсчёта ускорение материальной точки является лишь результатом действия на неё сил, т.е. взаимодействия с другими телами; в неинерциальной системе ускорение материальной точки является как результатом действия на неё сил, так и результатом движения самой системы отсчёта.

Если действие сил является динамической причиной движения материальной точки с некоторым ускорением, то движение системы отсчёта является кинематической причиной установления такого ускорения. В случае если рассматривается движение какой-либо материальной точки относительно различных неинерциальных систем отсчёта, силы, действующие на точку со стороны других тел, определяются соответствующими физическими законами взаимодействия, а потому они имеют одни и те же значения независимо от того, относительно какой системы отсчёта рассматривается движение точки.

Ускорения же материальной точки в её движениях относительно различных систем отсчёта зависят как от действующих на материальную точку сил, так и от движения этих систем, а потому они различны. Этим и объясняется то обстоятельство, что в неинерциальных системах отсчёта зависимость, связывающая ускорения материальной точки, и действующие на неё силы различны.

8.1. Случаи относительного покоя. Сила тяжести.

Рассмотрим случай, когда материальная точка под действием приложенных к ней сил находится в состоянии относительного покоя, т.е. не совершает движения относительно подвижной системы отсчёта $\Omega\xi\eta\zeta$, движущейся относительно неподвижной системы координат. При отсутствии относительного движения абсолютное ускорение точки равно её переносному ускорению, т.е.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер.}}$$

Тогда уравнение (15) принимает вид

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер.}}$$

$$m\vec{a}_{\text{пер}} = \sum_i \vec{F}_i ,$$

или

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} \text{-} m\vec{a}_{\text{пер}}=0,$$

откуда

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} + \vec{\Phi}_{\text{пер.}}=0. \tag{19}$$

Таким образом, в случае, *когда материальная точка находится в состоянии относительного покоя, геометрическая сумма приложенных к точке сил и переносной силы инерции равна нулю.*

В качестве примера рассмотрим относительный покой материальной точки (тела) на поверхности Земли (рис 8).

Условие относительного покоя точки *M* выражается равенством (19) в виде

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}^{\omega}_{пер} = 0,$$

где $\vec{P}$ - сила притяжения Земли, направленная к её центру, $\vec{N}$ - реакция опоры; $\vec{\Phi}^{\omega}_{пер}$ - переносная сила инерции, которая вследствие равномерного вращения Земли представляет собой центробежную силу инерции. Её модуль

$$\Phi^{\omega}_{пер} = mMK\omega^2_{пер},$$

где $\omega_{пер} = 2\pi/(24 \cdot 3600)$с$^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли.

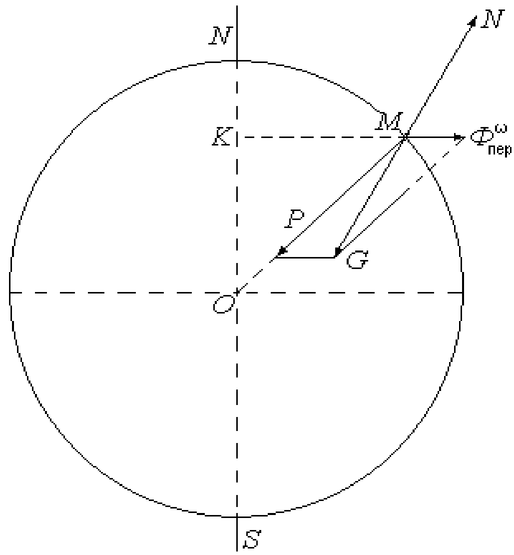


Рис. 8

Очевидно, что действие тела на опору выражается силой $\vec{G} = -\vec{N}$, т.е. $\vec{G} = \vec{P} + \vec{\Phi}^{\omega}_{пер}$, причём сила $\vec{G}$ - равнодействующая силы притяжения Земли и переносной силы инерции – представляет собой силу тяжести, т.е. вес тела. Направление силы тяжести $\vec{G}$ определяет направление вертикали в данной точке земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная силе $\vec{G}$, является горизонтальной плоскостью.

По модулю центробежная сила инерции $\vec{\Phi}^{\omega}_{пер}$ всегда мала по сравнению с весом тела $\vec{G}$. Найдём отношение их модулей:

$$\frac{\Phi^{\omega}_{пер}}{G} = \frac{mMK\omega^2_{пер}}{mg} = \frac{OM\omega^2_{пер}\cos\varphi}{g} = \frac{R\omega^2_{пер}\cos\varphi}{g},$$

где *R* – радиус земного шара, *φ* – широта, на которой находится точка *M*.

Отношение $\dfrac{\Phi^{\omega}_{пер}}{G}$ имеет максимальное значение на экваторе.

Из этого следует, что вес тела G по модулю мало отличается от силы притяжения тела к Земле P и направление вертикали составляет с направлением этой силы малый угол.

Наибольший вес тело имеет на полюсе, а наименьший – на экваторе по двум причинам:

1. сила притяжения $\vec{P}$ на полюсе имеет наименьший модуль;

2. переносная сила инерции $\vec{\Phi}^{\omega}_{пер}$ на полюсе равна нулю.

Ускорение свободного падения тела g равно 9,83 м/с^2 на полюсе и 9,78 м/с^2 на экваторе.

8.2. Примеры на относительное движение точки.

Действие сил инерции, обусловленные явлениями Кориолиса, в курсе механики средней школы, как правило, не рассматриваются. Об отклонении любого падающего тела с большой высоты к востоку, об износе рельсов, о том, что в северном полушарии все реки имеют крутой правый берег, почему бегуны движутся по беговым дорожкам против часовой стрелки, почему человек, не имеющий ориентира, всегда возвращается в исходную точку, в какую сторону вращается воронка воды, утекающей из умывальника, можно прочитать в любом учебнике по теоретической механике (см., например, [2]).

Пример. Тело весом mg = 2 Н положено на гладкую грань трёхгранной призмы, другая грань которой лежит на горизонтальной плоскости. Какое горизонтальное ускорение должна иметь призма, чтобы тело не двигалось относительно призмы, и какое давление производит тело на призму в том случае, если $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}$?

Решение.

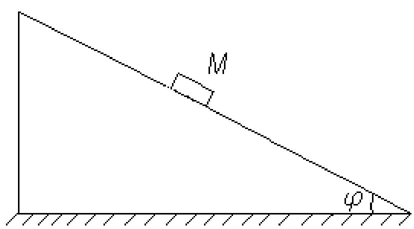


Рис. 9

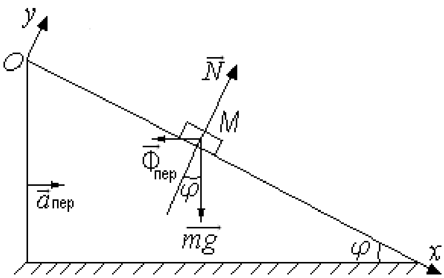


Рис. 10

Если тело M находится в состоянии относительного покоя по отношению к движущейся призме, то применимо уравнение (19), т.е. геометрическая сумма приложенных к телу сил и переносной силы инерции равна нулю. К телу приложены сила тяжести $\overrightarrow{mg}$ и реакция гладкой плоскости $\overrightarrow{N}$.

Условно приложим к телу переносную силу инерции $\vec{\Phi}_{пер}$, направленную противоположно переносному ускорению $\vec{a}_{пер}$, представляющему собой ускорение движения призмы. Модуль этой силы

$$\Phi_{пер} = ma_{пер},$$

где m – масса тела.

Составим для сил $\overrightarrow{mg}$, $\vec{N}$ и $\vec{\Phi}_{пер}$ уравнение (19):

$$\overrightarrow{mg} + \vec{N} + \vec{\Phi}_{пер} = 0. \qquad (20)$$

Проектируя векторы этого уравнения на оси x и y, связанные с движущейся призмой, получаем уравнения:

$$\begin{cases} mg\sin\varphi - \Phi_{пер}\cos\varphi = 0; \\ N - mg\cos\varphi - \Phi_{пер}\sin\varphi = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Из первого уравнения (21) найдём модуль ускорения $a_{пер}$:

$$mg\sin\varphi - ma_{пер}\cos\varphi = 0,$$

откуда

$$a_{пер} = g\,\mathrm{tg}\varphi = \frac{3}{4}g \approx 7{,}35 \text{ м/с}^2,$$

тогда

$$\Phi_{пер} = ma_{пер} = mg\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Из второго уравнения системы (21) определим модуль реакции призмы N:

$$N = mg\cos\varphi + \Phi_{пер}\sin\varphi = mg\cos\varphi + mg\,\mathrm{tg}\varphi\sin\varphi = mg\cos\varphi\,(1+\mathrm{tg}^2\varphi) =$$

$$= G\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}\left(1+tg^2\varphi\right) = mg\sqrt{1+tg^2\varphi} = 2\cdot\frac{5}{4} = 2{,}5\,\text{Н}.$$

III. Статика.

Статика – раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твёрдому телу.

В статике учитываются размеры и формы тел, и все рассматриваемые тела считаются абсолютно твёрдыми. Статика является частным случаем динамики, так как покой тел, в случае действия на них сил, есть частный случай движения.

Определение. *Сила – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.*

Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Сила изображается вектором. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется *системой сил.*

Системы сил, под действием каждой из которых твёрдое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются *эквивалентными*.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется *равнодействующей.*

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии её действия в противоположную сторону, называется *уравновешивающей силой*.

Система сил, которая, будучи приложенной к твёрдому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется *системой взаимно уравновешенных сил*.

Все силы, действующие на механическую систему, делятся на внешние и внутренние.

3.1. Аксиомы статики.

Эти аксиомы сформулированы на основе наблюдений и изучения окружающих нас явлений реального мира. Некоторые основные законы механики Галилея-Ньютона являются одновременно и аксиомами статики.

1. Аксиома инерции. *Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.*

Аксиома инерции выражает установленный Галилеем закон инерции.

2. Аксиома равновесия двух сил. *Две силы, приложенные к твёрдому телу, взаимно уравновешиваются в том случае, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны* (рис. 1).

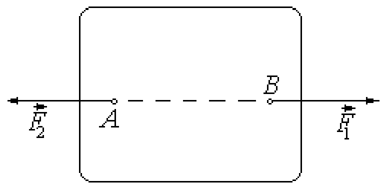


Рис. 1

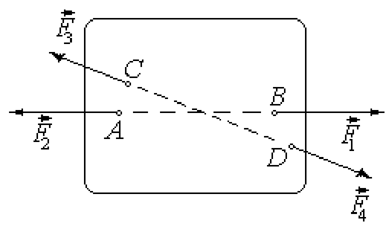


Рис. 2

3. Аксиома присоединения и исключения уравновешивающих сил. *Действие системы сил на твёрдое тело не изменится, если к ней присоединить или из неё исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.*

Пусть, например, к твёрдому телу приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, под действием которых тело находится в покое, или совершает какое-то движение (рис. 2). Приложим к телу две равные противоположно направленные силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, которые взаимно уравновешиваются.

Если тело находилось в покое, то оно сохранит его; если тело было в движении, то оно будет двигаться под действием новой системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ так же, как под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, т.е. новая система сил эквивалентна прежней.

Это же произойдет, если из заданной системы сил, приложенных к твёрдому телу, исключить взаимно уравновешивающиеся силы, входящие в её состав.

Следствие. *Не изменяя кинематического состояния абсолютно твёрдого тела, силу можно переносить вдоль линии её действия, сохраняя неизменными её модуль и направление.*

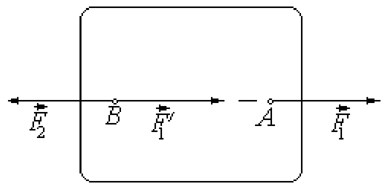


Рис. 3

Предположим, что к твёрдому телу в точка A приложена сила $\vec{F}_1$ (рис. 3). Приложим в точке B две силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю силе $\vec{F}_1$ и направленные по линии её действия в противоположные стороны. Затем отбросим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как взаимно уравновешивающиеся. Тогда к телу в точке B будет приложена сила $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, эквивалентная силе $\vec{F}_1$ в точке A.

Таким образом, силу можно переносить в любую точку по линии действия, не изменяя её модуля и направления. Поэтому в статике твёрдого тела ***сила*** рассматривается как ***скользящий вектор.***

4. Аксиома параллелограмма сил. *Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке пересечения их линий действия и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах* (рис. 4).

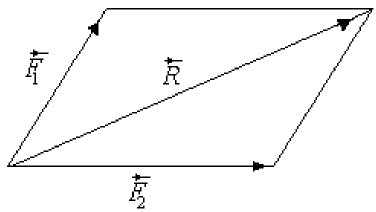


Рис. 4

Это положение выражается следующим геометрическим равенством:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Модуль равнодействующей определяется по хорошо известной формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi},$$

где φ – угол между линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

5. Аксиома равенства действия и противодействия. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

Эта аксиома утверждает, что силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, в природе не существует одностороннего действия силы. ***Будучи приложенными к разным телам, эти силы не уравновешиваются!***

Эта аксиома установлена Ньютоном и известна как один из основных законов классической механики.

6. Аксиома сохранения равновесия сил, приложенных к деформирующемуся телу при его затвердевании. *Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании.*

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформирующемуся телу. Однако в случае деформирующегося тела эти условия необходимы, но недостаточны. Так, например, условие равновесия двух сил, приложенных к твёрдому стержню на его концах, состоит в том, что силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (при этом стержень можно как растягивать, так и сжимать). Для нити силы должны нить только растягивать, поскольку на сжатие нить в отличие от стержня не работает.

3.2. Несвободное твёрдое тело. Связи. Реакции связей.

Определение 1. Твёрдое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Определение 2. Тело, ограничивающее свободу движения данного твёрдого тела, является по отношению к нему *связью*.

Все силы, действующие на несвободное твёрдое тело, наряду с делением на внешние и внутренние силы, можно также разделить на *задаваемые* или *активные* силы и *реакции связей*.

Задаваемые силы выражают действие на твёрдое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело.

Одним из основных положений механики является ***принцип освобождаемости твёрдых тел от связей,*** согласно которому *несвободное твёрдое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей.*

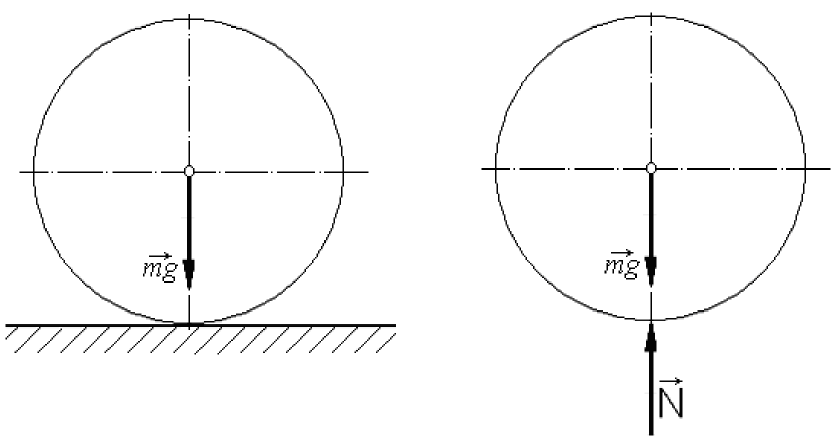


Рис. 5

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 5). Плоскость, ограничивая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удерживания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу $\vec{N}$, равную весу шара $\overrightarrow{mg}$ по модулю и противоположную ему по направлению.

Сила $\overrightarrow{N}$ и будет реакцией плоскости. Тогда шар, освобождённый от связи, будет свободным телом, на которое действуют задаваемая сила $\overrightarrow{mg}$ и реакция плоскости $\overrightarrow{N}$.

Гладкая плоскость не противодействует перемещению тела вдоль плоскости под действием задаваемых сил (рис. 6), но не допускает его перемещения в направлении, перпендикулярном к плоскости. Поэтому действие плоскости на тело выражается нормальной реакцией $\overrightarrow{N}$.

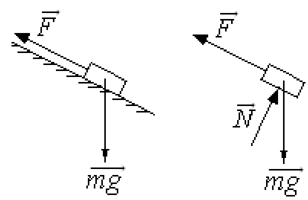


Рис. 6

Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно к плоскости.

Если к концу *B* нити *AB*, прикреплённой в точке *A*, подвесить груз весом $\overrightarrow{mg}$ (рис. 7.), то реакция $\vec{S}$ нити будет приложена к грузу в точке *B*, равна по модулю его весу $\overrightarrow{mg}$ и направлена вертикально вверх.

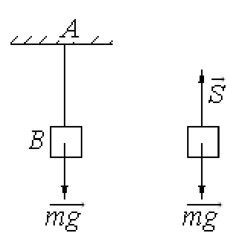


Рис. 7

Реакция нити направлена вдоль нити.

Пусть балка весом $\overrightarrow{mg}$ в точке B опирается на гладкую поверхность, а в точках A и D – на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 8). Тогда реакции опорной поверхности и опорных плоскостей будут иметь указанные на рис.8 направления.

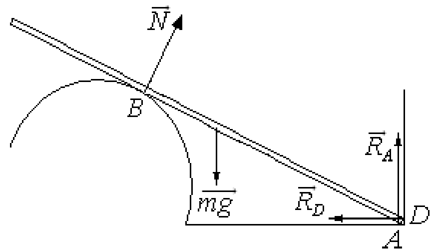


Рис. 8

Для определения каждой реакции (как и для каждой силы) нужно знать три элемента: модуль, направление и точку приложения. Заметим, что точка приложения реакции, как правило, известна; направление же реакций известно только для ограниченного числа связей.

Правило. *Если существуют два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом нет, то направление реакции противоположно первому направлению.*

3. Условия нахождения тела в покое.

Очевидно, что тело может покоиться только по отношению к одной определённой системе координат. В статике изучаются условия равновесия тел именно в такой системе. В покое скорости и ускорения всех участков (элементов) тела равны нулю. Учитывая это, можно установить одно из необходимых условий равновесия тел, используя теорему о движении центра масс (см. раздел 4 в динамике).

Внутренние силы не влияют на движение центра масс, так как их сумма всегда равна нулю. Определяют движение центра масс тела (или системы тел) лишь внешние силы. Поскольку в состоянии покоя тела ускорение всех его элементов равно нулю, равно нулю и ускорение центра масс. Но ускорение центра масс определяется векторной суммой внешних сил, приложенных к телу. Поэтому в состоянии покоя эта сумма должна равняться нулю.

Действительно, если сумма внешних сил $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^e$ равна нулю, то и ускорение центра масс $a_C = 0$. Отсюда следует, что скорость центра масс $\vec{v}_C = \overrightarrow{const}$. Если в начальный момент скорость центра масс равнялась нулю, то и в дальнейшем центр масс остаётся в покое.

Полученное условие неподвижности центра масс является необходимым (но недостаточным) условием нахождения твердого тела в покое.

Первое условие равновесия. *Для равновесия твёрдого тела необходимо, чтобы сумма внешних сил, приложенных к нему, была равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^e = 0 \tag{1}$$

Если сумма сил равна нулю, то равна нулю и сумма проекций сил на три координатные оси. Обозначая внешние силы через $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3,\ldots,$ $\vec{F}_n$, получаем систему трёх уравнений, эквивалентную уравнению (1):

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{nz} = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Для того чтобы тело покоилось, необходимо еще (напомню), чтобы начальная скорость центра масса была равна нулю.

Примечание. Условие (2) является достаточным условием равновесия только для системы сходящихся сил (линии действия всех сил пересекаются в одной точке).

Пример 1. На гладкой плоскости *AB*, образующей с горизонтом угол $\varphi = 30^0$, при помощи верёвки *DE*, параллельной плоскости *AB*, удерживается однородный шар весом $mg = 4$ Н. Определить давление шара на плоскость и натяжение верёвки.

Решение. 1. Воспользуемся аналитическим способом решения.

Введём для плоской системы сходящихся сил прямоугольную систему координат как, показано на рисунке 9, и запишем уравнения проекций внешних сил на оси координат:

$$\begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0 \\ \sum\limits_i F_{iy} = 0 \end{cases}; \begin{cases} T - mg\sin 30^0 = 0 \\ N - mg\cos 30^0 = 0 \end{cases}.$$

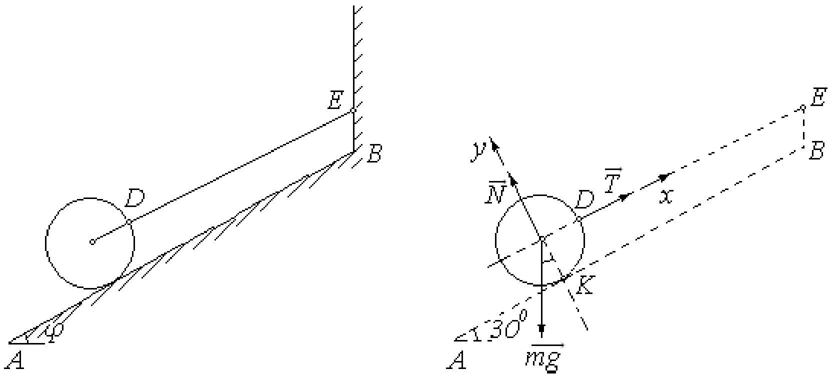


Рис. 9

Из первого уравнения $T = mg\sin 30^0 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ Н., из второго –

$N = mg\cos 30^0 = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ Н.

2. Построим силовой треугольник и убедимся, что он является замкнутым (шар находится в покое), а реакции равны ранее полученным величинам:

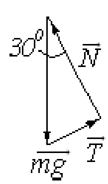


Рис. 10

Очевидно, что в прямоугольнике треугольнике соотношения между катетами и гипотенузой получаются достаточно просто.

Равенство нулю суммы всех сил, действующих на тело, необходимо для неподвижности центра масс, но недостаточно для покоя всего тела. В этом нетрудно убедиться.

Приложим к стержню в разных точках равные по модулю силы, направленные вдоль параллельных прямых в разные стороны (рис. 12). Две такие силы называются парой сил.

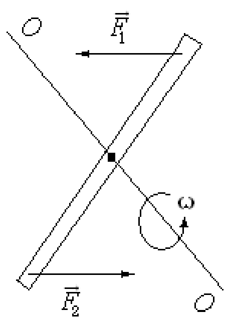


Рис. 12

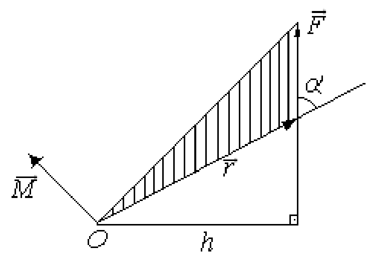


Рис. 13

Сумма этих сил равна нулю:

$$\vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = 0.$$

Но стержень будет поворачиваться. В покое находится только центр его масс, если начальная скорость его (скорость центра масс до приложения сил) была равной нулю.

Вращательное свойство пары сил и силы (см. раздел 6 динамики) характеризуется физической величиной, которая называется *моментом силы* *($\vec{M}$).*

Момент силы $\overrightarrow{M}$ относительно неподвижной точки (оси) равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\overrightarrow{F}$ (рис. 13):

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F},$$

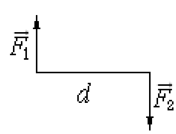
где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый из неподвижной точки O в точку приложения силы $\overrightarrow{F}$.

Модуль момента силы

$$M = r \cdot F \sin\alpha = F \cdot h,$$

где $h = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

Примечание. *Момент пары сил равен по модулю произведению модуля одной из сил, входящих в пару, на расстояние между линиями действия этих сил.* Это расстояние d называется плечом пары.



1. *Момент пары сил не зависит от точки, или оси, относительно которых он рассматривается.*

2. *Пара сил не имеет равнодействующей!*

Если в начальный момент угловая скорость тела равнялась нулю, то и в дальнейшем тело не будет поворачиваться. Следовательно, равенство

$$\sum_i \overrightarrow{M_i} = 0 \qquad (3)$$

(при ω=0) является ***вторым условием равновесия*** твёрдого тела: *при равновесии твёрдого тела сумма моментов всех внешних сил, действующих на него относительно любой оси, равно нулю.*

Примечание. Правило рычага является простым следствием равенства (3).

При действии произвольного числа внешних сил условия равновесия твёрдого тела запишутся в виде:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = 0 \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Данная система двух векторных уравнений эквивалентна системе шести уравнений проекций на координатные оси.

Условия (4) необходимы и достаточны для равновесия любого твёрдого тела в пространстве. Если они выполняются, то векторная сумма сил (внешних и внутренних), действующих на каждый элемент тела, равна нулю.

Для сил, произвольно расположенных на плоскости условие равновесия запишется в виде:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 \\ \sum_i F_{iy} = 0 \\ \sum_i m_A\left(F_i\right) = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

где A – произвольная точка, относительно которой находится сумма моментов внешних сил и реакций связей.

Пример 1. К телу приложены две разные по модулю параллельные силы. Найти модуль и точку приложения их равнодействующей.

Решение. Пусть к телу приложены две параллельные силы F_1 и F_2, а расстояние между линиями действия этих сил равно d.

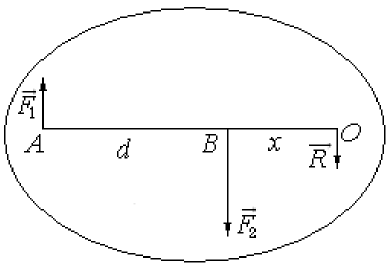


Рис. 14

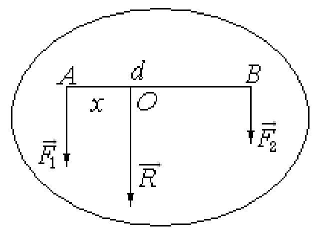


Рис. 15

Перенесём силы вдоль линии действия каждой из них так, чтобы точки их приложения находились в точках A и B, а отрезок $AB=d$ был перпендикулярен линиям действия сил.

1. Пусть силы F_1 и F_2 направлены в разные стороны (рис. 14), тогда очевидно, что модуль их равнодействующей равен $R = F_2 - F_1$ и направлен в сторону действия большей по модулю силы. Для того чтобы тело не разворачивалось, необходимо, чтобы относительно точки приложения O равнодействующей суммарный момент сил F_1 и F_2 был равен нулю:

$$\sum_i m_O\left(F_i\right) = 0: F_1(d+x)-F_2x=0,$$

откуда

$$x = \frac{F_1}{F_2 - F_1} d.$$

Ясно, что точка O расположена ближе к точке приложения меньшей силы и лежит вне отрезка AB.

Примечание. Если линейные размеры тела меньше AO, то (таков парадокс!) равнодействующая $\vec{R}$ приложена к точке, которая не принадлежит телу: невозможно заменить две силы равнодействующей, приложенной к данному телу.

2. Пусть силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону (рис. 15), тогда очевидно, что модуль их равнодействующей равен $R = F_2 + F_1$ и направлен в сторону действия обеих сил. Для того чтобы тело не разворачивалось, необходимо, чтобы относительно точки приложения O равнодействующей суммарный момент сил F_1 и F_2 был равен нулю:

$$\sum_i m_O\left(F_i\right) = 0 : F_2(d-x)-F_1x=0,$$

откуда

$$x = \frac{F_2}{F_1 + F_2} d .$$

Очевидно, что точка O расположена ближе к точке приложения большей силы и лежит на отрезке AB.

Пример 2. Параллелепипед, находящийся в поле сил тяжести, и имеющий массу m, помещен на шероховатую наклонную плоскость. При каком условии тело опрокинется?

Решение. Очевидно, что тело находится под действием силы тяжести $\overrightarrow{mg}$, силы трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальной реакции $\vec{N}$.

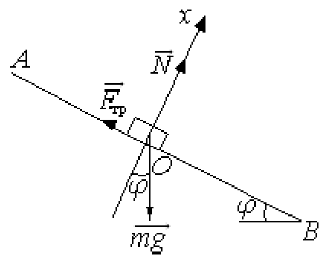


Рис. 16

Сила трения только удерживает тело от соскальзывания с наклонной плоскости.

Реакция $N = mg\cos\varphi$. Этот результат даёт проекция сил на ось x. Очевидно, что тело опрокинется при условии, когда момент реакции $\overrightarrow{N}$ относительно точки O больше момента силы тяжести $\overrightarrow{mg}$ относительно той же самой точки (обратное невозможно), момент силы трения $\overrightarrow{F}_{тр}$ относительно этой точки равен нулю. Если линия действия силы тяжести $\overrightarrow{mg}$ проходит через точку O, её момент относительно этой точки обращается в нуль, параллелепипед опрокидывается (он находится с так называемом неустойчивом равновесии); при выходе линии действия силы тяжести за пределы основания тела оно тем более опрокидывается.

Примечание. Обратим внимание на то, что результат не зависит от линейных размеров параллелепипеда. Чем больше линейный размер тела вдоль ската наклонной плоскости и меньше угол наклона плоскости, тем устойчивее тело.

IV. Избранные разделы механики

1. Задачи на движение: простые и не очень.

Вспомним, что впервые мы встретились с «задачами на движение» на уроках математики. Математикам хорошо известно так называемые «текстовые задачи». Эти задачи встречаются на разных этапах обучения и не всегда требуют даже составления уравнений, хотя традиционно «задачи на движение» относят к классу задач на составление уравнений или их систем.

Начнём с рассмотрения задач, в которых необходимо чётко уяснить смысл самой задачи, а уже потом пытаться её решить. Это, скорее, задачи логические. Самое интересное, что они могут быть заданы и учителями физики.

Задача 1. Крокодил Гена с Чебурашкой плыли вверх по течению реки. Гена сидел на вёслах, а Чебурашка, сидя на корме, ел апельсины. В момент, когда лодка проплывала под мостом, а Крокодил Гена был поглощён движением, Чебурашка заснул и нечаянно столкнул ящик с апельсинами в воду. Через полчаса Гена обнаружил пропажу ящика с апельсинами, развернул лодку по течению реки и стал догонять уплывающий ящик; ещё через полчаса выловил его на расстоянии двух километров ниже моста по течению реки. Какова скорость течения реки?

& Ясно, что нужно просто внимательно прочитать условия задачи. За час ящик проплыл 2 километра, следовательно, скорость течения реки – 2км/час. &

Задача 2. Автобус, в котором находились 38 пассажиров, сломался на трассе. Проезжающий мимо водитель легковой машины согласился «подбросить» пассажиров автобуса до ближайшего населённого пункта. Сколько раз водителю легковушки придётся съездить туда и обратно, если в автомобиль кроме водителя могут сесть ещё четыре пассажира.

& Эта задача интересна тем, что необходимо рассмотреть два случая; решение зависит от того, в какую сторону едет по своим делам водитель автомобиля.

Если водитель едет в сторону населённого пункта, то «туда и обратно» он съездит 9 раз (при этом отвезёт $4 \cdot 9=36$ пассажиров), ещё двух пассажиров довезёт до населённого пункта и возвращаться не будет, т.е. «туда и обратно» водитель съездит 9,5 раз.

Если водитель едет из ближайшего населённого пункта, то после поездки с последней парой он вернётся, т.е. «туда и обратно» водитель съездит 10 раз. &

Следующая задача хорошо известна, она встречается в книге «Живая математика» Я.И. Перельмана.

Задача 3. Охотник, войдя в лес, видит на дереве белку. Белка выглядывает из-за ствола, смотрит на охотника, а сама охотнику не показывается. Охотник начинает медленно обходить дерево вокруг. Белка, цепляясь коготками за кору дерева, перемещается по стволу так, что всё время, выглядывая из-за ствола, смотрит на охотника, но свою спинку и хвостик охотнику не показывает. Охотник три раза обошёл вокруг дерева, сколько раз он обошёл вокруг белки?

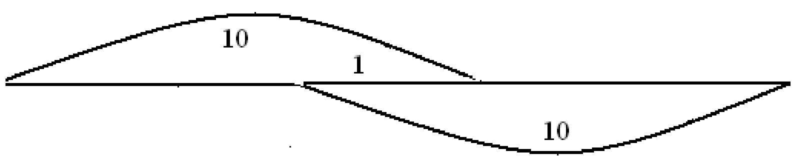
& Решая задачи подобного типа (а именно такие задачи появляются на олимпиадах для младших классов) нужно чётко понимать, что в задачу нельзя добавлять «от себя» ни одного слова, поскольку при этом мы невольно производим подмену условия задачи. Обратим внимание на то, что из условия задачи нельзя понять, что означает фраза «обойти вокруг белки». Эта задача, как и задача 2, допускает два варианта подхода.

Если мы будем считать, что «обойти вокруг белки» - это увидеть спинку белки, то охотник не обошёл вокруг белки ни разу. Если же «обойти вокруг белки» - обойти вокруг того места, где сидит белка (дерево), то охотник обошёл вокруг белки три раза. Полный ответ на вопрос, поставленный в задаче, состоит в разборе двух рассмотренных вариантов. &

Следующая задача принадлежит М. Гарднеру и носит название «Бронкс или Бруклин».

Задача 4. У студента университета две подружки, к которым он относится абсолютно одинаково. Чтобы не обижать подруг он придумал систему, по которой ездит на свидания. Подруги живут в противоположных концах города в районе двух конечных станций метро, линия которого проходит мимо университета. Ежедневно после занятий студент спускается на станцию метро (каждый раз в разное время) и садится в первый, подошедший на станцию поезд. В конце года наш студент с удивлением обнаруживает, что у одной из подруг он бывал в 9 раз чаще, чем у другой. Может ли такое быть, если интервалы движения поездов метро в каждом из направлений равны между собой и равны 10 минутам?

& Эта задача имеет явно выраженный вероятностный характер. По условию задачи интервал в движении поездов, идущих в одном направлении, равен 10 минутам для обоих направлений движения. Предположим, что график движения поездов, следующих в одном направлении, сдвинут по времени по отношению к графику движения в другом направлении на 1 минуту.



Очевидно, что вероятность попадания в минутный промежуток ожидания поезда ровно в 9 раз меньше, чем вероятность попадания в девятиминутный промежуток ожидания поезда. Именно поэтому к одной из подружек студент ездил в гости в девять раз чаще. &

Теперь обратимся к решению задач на движение нескольких путников вдоль одной и той же трассы и на сложение движений. Разновидностью таких задач являются задачи на встречное движение. При решении задач на составление уравнений необходимо прежде всего в условии задачи выделить величины, которые остаются постоянными (тогда постоянными будут и их отношения). Все моменты встречи, обгона одного путника другим дают возможность составления уравнений. Обратим внимание на то, что при решении задач часто вводятся вспомогательные величины, которые в процессе решения или уничтожаются, или сразу дают возможность упростить систему уравнений.

Задача 5. Если человек с постоянной скоростью спускается по эскалатору, едущему вниз, он проходит 30 ступенек эскалатора. Поднимаясь с той же скоростью по опускающемуся эскалатору, человек проходит 150 ступенек. Сколько ступенек при той же скорости движения человек пройдёт по неподвижному эскалатору.

Решение. Пусть длина эскалатора (расстояние, которое вверх и вниз проходит человек) равна S, скорости движения эскалатора и человека равны соответственно u и v. Длину эскалатора будем измерять в ступеньках (мы этим упрощаем решение задачи).

При движении вниз со скоростью $u+v$ человек пройдёт расстояние S за то же время, за которое со скоростью v пройдёт 30 ступенек, первое уравнение системы: $\frac{S}{u+v}=\frac{30}{v}$.(1)

При движении вверх со скоростью v-u человек пройдёт расстояние S за то же время, за которое со скоростью v пройдёт 150 ступенек, второе уравнение системы: $\frac{S}{v-u}=\frac{150}{v}$.(2)

$\begin{cases} \frac{S}{u+v}=\frac{30}{v} \\ \frac{S}{v-u}=\frac{150}{v} \end{cases}$. Разделив первое уравнение системы на второе, получим $\frac{v-u}{u+v}=\frac{1}{5}$, откуда $v=\frac{3}{2}u$. Подстановка соотношения между скоростями в уравнение (1) или (2) даёт S=50.

Ответ: человек по стоящему эскалатору пройдёт 50 ступенек.

Примечание. В данной задаче получается система двух уравнений с тремя неизвестными. Обратим внимание на то, что в этой и последующей задачах соотношения между скоростями позволяет уменьшать число неизвестных.

Задача 6. Из пункта А в пункт В выехали одновременно «Жигули», «Москвич» и «Запорожец». «Жигули», доехав до В повернули назад и встретили «Москвич» в 18 км, а «Запорожец» в 25 км от В. «Москвич», доехав до В, также повернул назад и встретил «Запорожец» в 8 км от В. Найдите расстояние от А до В. (Скорости автомобилей постоянны).

Решение. Пусть расстояние между А и В равно S. По смыслу задачи ясно, что $v_ж>v_м>v_з$. Каждый момент встречи двух автомобилей даёт возможность составить уравнение. Получаем систему трёх уравнений с четырьмя неизвестными: $\begin{cases} \dfrac{S+18}{v_ж}=\dfrac{S-18}{v_м} \\ \dfrac{S+25}{v_ж}=\dfrac{S-25}{v_з} \\ \dfrac{S+8}{v_м}=\dfrac{S-8}{v_з} \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе, а из третьего уравнения выразим отношение скоростей «Москвича» и «Запорожца». Очевидно, что отношения скоростей автомобилей при этом уничтожаются, а в уравнении остаётся одна неизвестная величина S – расстояние между А и В. Последовательно получаем:

$$\frac{S+18}{(S-18)(S-8)}=\frac{S+25}{(S-25)(S+8)};(S+18)(S-25)(S+8)=(S+25)(S-18)(S-8).$$

Дальнейшие вычисления не представляют сложности.

Ответ: расстояние между А и В равно 60 км.

Рассмотрим задачу на движение, в которой участвуют два путника, но движения путников взаимозависимы.

Задача 7. Два человека, у которых есть один велосипед на двоих, должны попасть из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии 40 км. от А. Первый передвигается пешком со скоростью 4км/час, на велосипеде – 30 км/час. Второй – пешком со скоростью 6км/час, на велосипеде – 20 км/час. За какое наименьшее время они могут добраться в пункт В (велосипед можно оставлять без присмотра)?

Решение. Для решения задачи сделаем два очень важных вывода. Минимальное время перемещения путников возможно только в одном случае – оба путника прибывают в конечный пункт одновременно (вот Вам и задача на «экстремум»)! Пусть из 40 км первый путник x км пройдёт пешком, тогда 40-x км он проедет на велосипеде, а второй путник 40-x км пройдёт пешком, а x км проедет на велосипеде (изменять характер движения путники могут сколько угодно раз: от этого смысл задачи не меняется).

Пусть первый путник находится в пути $\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}$часов, а второй - $\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}$ часов. Как было сказано выше, путники должны прибыть в пункт В одновременно, имеем уравнение: $\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}=\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}$, из которого x=16 км.

Наименьшее время, за которое путники доберутся до пункта В равно $T = \frac{x}{4} + \frac{40-x}{30} = \frac{x}{20} + \frac{40-x}{6} = 4{,}8$ часа.

Ответ: 4,8 часа.

Задачи на встречное движение либо основаны на сложении скоростей, либо на соотношениях расстояний и особой сложности не представляют. Рассмотрим задачу, решение которой для учащихся не всегда очевидно.

Задача 8. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от В. Прибыв в А и В, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 18 км от А. Найдите расстояние между А и В.

Решение. Пусть скорости велосипедистов постоянны и равны соответственно v_1 и v_2. Решение задачи основано на очень простом соображении: отношение пройденных каждым из велосипедистов расстояний за один и тот же промежуток времени равно отношению их скоростей. Пусть расстояние между А и В равно x. Запишем соотношения, позволяющие составить уравнения: $v_1 = \frac{S_1}{t}; v_2 = \frac{S_2}{t}; \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2}$.

$\frac{x-30}{30} = \frac{2x-18}{x+18}$, откуда после решения квадратного уравнения получаем x=72 км.

Ответ: 72 км.

Не всегда хорошо решаются школьниками и абитуриентами задачи на движение по замкнутой траектории.

Задача 9. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 секунд меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 секунд. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях.

Решение. Пусть длина замкнутой дорожки равна S, на пробег этой дорожки первый бегун тратит t секунд, а второй – t+5 секунд. Очевидно, что скорости бегунов равны соответственно $v_1 = \frac{S}{t}$ и $v_2 = \frac{S}{t+5}$

Если бегуны начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то они окажутся рядом, когда более быстрый бегун обгонит своего товарища ровно на круг длиной S, по условию задачи составим уравнение: $30\frac{S}{t} - 30\frac{S}{t+5} = S$. Решая записанное уравнение, после почленного деления на S получаем, что бегуны пробегают дорожку соответственно за t_1=10 секунд и t_2=15 секунд.

Если бегуны побегут навстречу друг другу с общей линии старта, то всю длину дорожки S они пробегут со скоростью $v_1 + v_2 = \frac{S}{10} + \frac{S}{15}$ м/с. Время забега до встречи $T = \frac{S}{\frac{S}{10} + \frac{S}{15}} = \frac{150}{25} = 6$ секунд.

Учащихся может удивить результат вычислений: для большинства из них спортсмены должны бегать по дорожке стадиона. А кто сказал, что они не могут бегать вокруг клумбы в парке?

Ответ: 6 секунд.

До настоящего времени мы останавливались на задачах, встречающихся в задачниках для учащихся основной (а иногда и младшей школы). Теперь обратимся к заданием для старшеклассников. Для примера хочу рассмотреть задание №5 варианта 96 сборника заданий для проведения письменного экзамена за курс средней школы (умышленно беру задание из изд. 3).

Задача 10. Тело движется по прямой так, что расстояние до него от некоторой точки А этой прямой изменяется по закону $S=0{,}5t^2-3t+4$ (м), где t – время движения в секундах. Найдите минимальное расстояние, на которое тело приблизится к точке А.

Решение. Попытаемся решить данную задачу как классическую задачу «на экстремум».

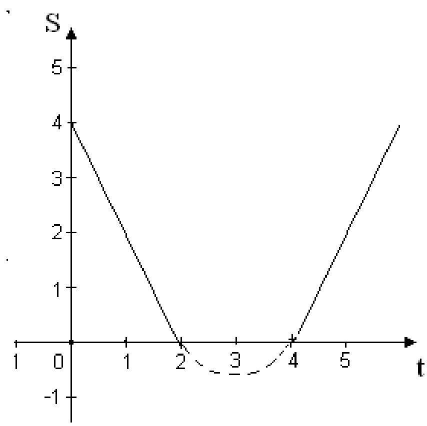
$S'(t)=t-3$. $S'(t)=0$; $t=3$.

Далее $S(3)=-0{,}5$ м. «Расстояние» отрицательно, что противоречит физическому смыслу понятия «расстояние».

Ясно, что когда тело находится в точке А, расстояние между точкой и телом минимально (оно равно 0). Решение квадратного уравнения $0{,}5t^2-3t+4=0$ даёт моменты времени 2 с. и 4 с.

Примечание. Несложно проверить, что в интервале времени с 2 с. по 4 с. «расстояние» отрицательно. Задача имеет реальный физический смысл только первые 2! секунды движения. Данное задание во всех знакомых мне «решебниках» выполнено с ошибкой (мне пришлось держать в руках более десятка «опусов»). Авторы сборника в издании 5 исправили ошибку условия: теперь $S=0{,}5t^2-3t+8$ (м). При таких условиях задача решается как задача на экстремум.

Напомню, что расстояние есть функция неотрицательная, непрерывная. Дадим иллюстрацию к рассмотренной задаче. S терпит разрыв! S становится отрицательным при $2<t<4$.



Для усвоения некоторых механических понятий предлагаю рассмотреть задачу.

Задача 11. Точка движется по прямой так, что её координата изменяется по закону $x=t^2-4t+10$ (м), где t – время движения в секундах. Для момента времени t=5с. найти координату точки. Найти перемещение точки, совершённое за первые пять секунд движения, и расстояние, пройденное за это время.

Решение.

Координата точки при t=5 с.: $x(5)=25-20+10=15$ м.

Начальная координата точки при t_0=0 с. $x(0)$=10 м.

Перемещение найдём как разность конечной и начальной координат точки: $x=x(5)-x(0)$=15-10=5 м.

Найдём закон изменения скорости с течением времени: $v=x'$=2t-4 м/с.

Очевидно, что первые две секунды движения точка движется в сторону, противоположную направлению оси оX (v<0), останавливается ($v(2)$=0 м/с), а потом движется в направлении координатной оси.

Найдём координату остановки (поворота): $x(2)$=4-8+10=6 м.

В первые две секунды был пройден путь $|x(2)-x(0)|$=4 м. при уменьшении координаты точки.

В последующие три секунды был пройден путь $|x(5)-x(2)|$=9 м.

Пройденное за пять секунд расстояние составит S=4+9=13 м.

Автор не ставил целью рассмотреть все возможные типы задач на движение. Он хотел остановиться на не очень трудных, но (с его точки зрения) интересных задачах.

2. Об аналогии формул механических и электромагнитных явлений.

При обобщающем повторении в 11 классе при рассмотрении полей центральных потенциальных сил любой преподаватель физики обращает внимание учащихся на внешнюю схожесть силы взаимодействия двух точечных зарядов в законе Кулона

$$F_k = k\frac{q_1q_2}{R^2} \qquad (1)$$

и силы взаимодействия двух материальных точек в законе всемирного тяготения:

$$F_г = G\frac{m_1m_2}{R^2} \qquad (2).$$

Ремарка о том, что две массы всегда притягиваются; одноименные заряды отталкиваются, а разноимённые – притягиваются, легко запоминается.

Задание 1. Маховик начинает вращение из состояния покоя с угловой скоростью 2 рад/с. Сколько оборотов он совершит за 5 секунд, если угловое ускорение составляет 4 рад/с^2?

Все задания предлагаются для самостоятельного выполнения учащимися. Ответы, решения и комментарии к ним даются в конце главы.

Реже разбирается аналогия между кинематическими и динамическими характеристиками в механике материальной точки и вращающегося относительно неподвижной оси твёрдого тела.

Таблица 1

Движение точки по прямой	Вращательное движение твёрдого тела
x - координата	φ – угол поворота
$x=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$ - закон движения по прямой	$\varphi=\varphi_0+\omega_0t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$ - закон вращения относительно неподвижной оси
v – скорость движения; a - ускорение	ω – угловая скорость вращения; ε - угловое ускорение
$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\varepsilon t$
m – масса материальной точки; F - сила	I – момент инерции тела относительно оси вращения; M – момент сил вращения
$F=ma$ – второй закон Ньютона	$M=I\varepsilon$ – уравнение вращательного движения
A – работа силы $A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$	A – работа вращающего момента $A=M\varphi$
Теорема об изменении импульса $m\mathbf{v}-m\mathbf{v}_0=\mathbf{F}t$	Теорема об изменении момента импульса $I\omega-I\omega_0=Mt$
Кинетическая энергия	
$E=\frac{mv^2}{2}$	$E=\frac{I\omega^2}{2}$

Пример 1. Ведро воды поднимается при помощи ворота из колодца глубиной 4 м. Какая работа совершается при подъёме, если к вороту радиуса 0,3 м приложен вращающий момент 30 Н·м?

Решение. Совершаемая работа - работа момента M при повороте на угол φ: $A = M\cdot\varphi$. Если верёвка длиной S полностью намотается на ворот радиуса R, то он повернётся на угол $\varphi=\frac{S}{R}$. При этом будет совершена работа

$$A=M\cdot\varphi=M\frac{S}{R}=30\frac{4}{0,3}=400 \text{ Дж.}$$

Примечание. Для решения задачи традиционным способом в условии «не хватает» массы ведра с водой.

Пример 2. По условию примера 1 определить массу поднимаемого ведра с водой.

Решение. Очевидно, что работа вращающего момента $A_\varphi = M \cdot \varphi$ равна работы силы тяжести с противоположным знаком $A_{mg} = F_T \cdot S$ (явно видна аналогия формул). Далее $F_T \cdot S = M \cdot \varphi$; $mgS = M\dfrac{S}{R}$; $m = \dfrac{M}{gR}$=10 кг.

Внимательный ученик найдёт ещё не одну аналогию в формулах, встречающихся в школьном курсе физики. Одни формулы хорошо известны, другие, наиболее сложные из них, появляются в задачах повышенного уровня сложности заданий ЕГЭ и задачах олимпиад…

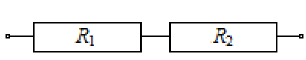
Пример 3. Определить сопротивление двух параллельно и двух последовательно соединённых сопротивлений R_1 и R_2.

Решение. Для вывода формул нам необходима формула закона Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R}, \tag{3}$$

и, быть может, правило Кирхгофа для ветвления токов.

При последовательном соединении (рис. 1) через каждое из двух сопротивлений протекает ток I, а падение напряжения на участке U равно сумме падений напряжений U_1 и U_2 на каждом из сопротивлений. Если сопротивление участка равно R^*, то $U=U_1+U_2$; $IR^*=IR_1+IR_2$, откуда $R^*=R_1+R_2$.



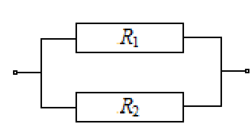


Рис. 1 Рис. 2

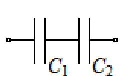
При параллельном соединении (рис. 2) оба сопротивления находятся под напряжением U, ток I, протекающий через сопротивления, разветвляется: $I=I_1+I_2$. В соответствии с законом Ома для участка цепи с сопротивлением R^* имеем $\frac{U}{R^*}=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}$; $\frac{1}{R^*}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$; $R^*=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Пример 4. Определить ёмкость двух параллельно и двух последовательно соединённых конденсаторов C_1 и C_2.

Решение. Ёмкость конденсатора C связана с напряжением на его обкладках U и зарядом q соотношением

$$q = CU. \tag{4}$$

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 3) $q = q_1 = q_2$, то есть заряды на обкладках конденсаторов равны. Равенство $U = U_1 + U_2$ приводит к соотношениям $\frac{q}{C}=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}$ и даёт ёмкость батареи двух конденсаторов $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$; $C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$.



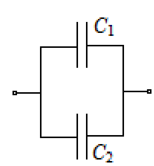


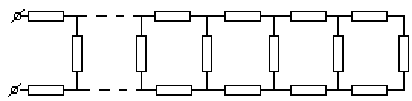
Рис. 3 Рис. 4

Параллельно соединенные конденсаторы (рис. 4) имеют на обкладках одинаковое напряжение, а заряды на обкладках суммируются. Поэтому $U = U_1 = U_2$; $q = q_1 + q_2$. Равенство (4) приводит к соотношению

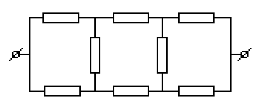
$CU = C_1U + C_2U$, откуда ёмкость батареи параллельно соединённых конденсаторов $C = C_1 + C_2$.

Задачи не расчет цепочек сопротивлений и конденсаторов встречаются во всех известных учебниках физики. Предлагаю решить несколько простых задач «с изюминкой» [11].

Задание 2. Вычислить сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений (каждое величиной r):



Задание 3. Вычислить сопротивление цепочки сопротивлений (каждое величиной r):



Задание 4. Между каждой парой из n данных точек включен конденсатор ёмкостью C. Определить ёмкость системы между двумя произвольными точками.

Примечание. Достаточно часто при решении задач на определение сопротивления или ёмкости соединённых в батареи элементов используется равенство потенциалов отдельных точек цепи (см. задания 3, 4).

Многие обращали внимание на аналогию формул для вычисления параллельного и последовательного соединения сопротивлений и конденсаторов. А как ведут себя соединённые параллельно и последовательно пружины? Рассмотрим пример.

Пример 5. Груз весом *mg* подвешен на двух пружинах с различными коэффициентами жёсткости k_1 и k_2. Определить периоды свободных колебаний груза при последовательном и параллельном соединении пружин при условии, что удлинения параллельно соединённых пружин одинаковы.

Решение. Периоды свободных колебаний груза определим по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^*}}, \qquad (5)$$

где k^* – коэффициент жёсткости пружины, эквивалентной двум исходным.

В случае последовательного соединения пружин общее статическое удлинение связи, поддерживающей груз, равно сумме удлинений двух пружин. По закону Гука $F=kx_{cm}$, $F=mg$.

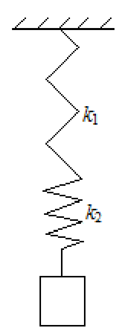


Рис. 5

Определяем эти удлинения по формуле:

$$x_{\text{ст}}=x_{1\text{ст}}+x_{2\text{ст}}=\frac{mg}{k^*}=\frac{mg}{k_1}+\frac{mg}{k_2}.$$

Таким образом, при последовательном соединении пружин приведённый коэффициент жёсткости

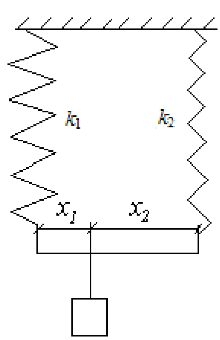
$$\frac{1}{k^*}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}; \qquad k^*=\frac{k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}. \tag{6}$$

Период колебаний

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m\left(k_1+k_2\right)}{k_1\cdot k_2}}. \tag{7}$$

В случае параллельного соединения пружин (рис. 6) силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, растягивающие пружины, определяются как параллельные составляющие силы тяжести $\overrightarrow{mg}$:

$$\overrightarrow{mg}=\vec{F}_1+\vec{F}_2; \quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{x_2}{x_1}\,(*).$$



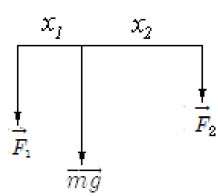


Рис. 6 Рис. 7

По условию задачи удлинения обеих пружин должны быть одинаковыми:

$$x_{1\text{ст}} = x_{2\text{ст}}.$$

Как и в случае последовательного соединения определяем удлинения по формуле

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2}\,(**).$$

Условие, обеспечивающее одинаковые удлинения пружин, получается из пропорций (*) и (**) (при этом не происходит разворота стержня, к которому прикреплены пружины):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Величина удлинения каждой из пружин определяется отношением

(**):

$$x_{\text{ст}} = \frac{mg}{k^*} = \frac{F_1 + F_2}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{k_1 + k_2},$$

При параллельном соединении пружин коэффициент упругости эквивалентной пружины равен

$$k^* = k_1 + k_2. \qquad (8)$$

Период колебаний груза

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}. \qquad (9)$$

Рассмотрим несколько задач на интегрирование линейной функции. Мы не раз с ними сталкивались.

Пример 6. Чему равна потенциальная энергия деформированной пружины жёсткостью k?

Решение. Вычислим работу, затраченную на растяжение недеформированной пружины жёсткостью k на величину x. Воспользуемся определением работы силы в механике:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx \tag{10}$$

В нашем случае направление действия внешней силы совпадает с направлением деформации. По величине внешняя сила равна силе упругости kx, тогда

$$A = \int_0^x kx\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}. \tag{11}$$

Нами получена формула для вычисления потенциальной энергии деформированной пружины

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \tag{12}$$

Примечание. Формула для вычисления кинетической энергии материальной точки

$$E = \int_0^v mv\,dv = \frac{mv^2}{2} \tag{13}$$

получается при интегрировании основного уравнения механики $\vec{F} = m\vec{a}$ и разделении переменных. Кинетическая энергия так же является интегралом от линейной функции.

Пример 7. Вычислить энергию электрического поля уединённого заряженного проводника. Найти энергию заряженного конденсатора.

Решение. Уединённый незаряженный проводник можно зарядить до потенциала φ, многократно перенося порции заряда dq из бесконечности на проводник.

Элементарная работа, которая совершается против сил поля $dA = \varphi dq$. Перенос заряда dq из бесконечности на проводник изменяет его потенциал на $d\varphi$, тогда $dq = Cd\varphi$, где C – электроёмкость проводника.

Следовательно, $dA = C\varphi d\varphi$, т.е. при переносе заряда dq из бесконечности на проводник увеличивается потенциальная энергия поля на

$$dW = d\Pi = dA = C\varphi d\varphi.$$

Проинтегрировав данное выражение, находим потенциальную энергию электрического поля заряженного проводника при увеличении его потенциала от 0 до φ:

$$\Pi = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (14)$$

Если имеется система двух заряженных проводников (конденсаторов), то полная энергия системы равна сумме собственных потенциальных энергий проводников и энергией их взаимодействия:

$$W = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}. \qquad (15)$$

Формула (15) справедлива при любой форме обкладок конденсаторов и показывает, что ***энергия электрического поля конденсатора*** *зависит* *только от его ёмкости и разности потенциалов между обкладками.* Она чаще в школьных учебниках имеет вид $W = \frac{CU^2}{2}$, при этом говорится о напряжении на обкладках конденсатора.

Пример 8. Вычислить энергию магнитного поля контура с индуктивностью L, по которому течёт ток силой I.

Решение. Если в контуре с индуктивностью L течёт ток силой I, то в момент размыкания цепи возникает индукционный ток, и им совершается работа. Эта работа совершается за счёт энергии уменьшающегося при размыкании цепи магнитного поля. На основании закона сохранения и превращения энергии энергия магнитного поля превращается, главным образом, в энергию электрического поля, за счёт которой происходит нагревание проводников. Работа может быть определена из соотношения

$$dA = \varepsilon_{iS} I dt,$$

где эдс самоиндукции $\varepsilon_{iS} = -L\frac{dI}{dt}$. Тогда $dA = -LIdI$.

Уменьшение энергии магнитного поля равно работе тока, поэтому

$$W = \int_I^0 dA = -L\int_I^0 IdI = \frac{LI^2}{2}. \qquad (16)$$

Формула (16) справедлива для любого контура и показывает, что ***энергия магнитного поля*** *зависит от индуктивности контура и силы тока, протекающего по нему.*

В рассмотренных примерах 6-8 мы столкнулись с интегрирование линейной функции. Попытаемся дать ответ на тестовое задание с выбором ответа.

Задание 6. (Центр тестирования, 2003) Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = kt$, где $k = 10$ А/с. Заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время $t = 5$ с от момента включения тока, равен

1) 25 Кл; 2) 50 Кл; 3) 75 Кл; 4) 125 Кл; 5) 250 Кл.

Не только сравнением законов Кулона и всемирного тяготения, но и сравнением собственных энергий конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$ и соленоида $W = \frac{LI^2}{2}$ с потенциальной энергией $\Pi = \frac{cx^2}{2}$ пружины и кинетической энергией $E = \frac{mv^2}{2}$ можно провести аналогию между механическими и электромагнитными явлениями…

Следуя учебнику Физика 11 под редакцией А.А. Пинского [10] , отметим, что аналогии между механическими и электромагнитными колебательными процессами с успехом используются в современных исследованиях и расчётах. При расчёте сложных механических систем часто прибегают к электромеханической аналогии, моделируя механическую систему соответствующей электрической (и наоборот).

Пример 9. Так, для электрического поля величина $\frac{1}{C}$, обратная ёмкости конденсатора, аналогична упругости пружины, а для магнитного поля индуктивность L аналогична массе m тела: индуктивность является мерой инертности контура по отношению к изменению в нём тока. Далее обратим внимание на формулы для периодов колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ и колебательного контура $T = 2\pi\sqrt{LC}$, подтверждающие высказанную аналогию.

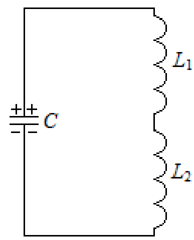
Перечень аналогий может быть продолжен, достаточно часто он помогает лучшему пониманию физических явлений.

Таблица 2

Механические величины	Электромагнитные величины
x - координата	q – заряд
$v_x = x'$ - скорость	$I = q'$ – сила тока
$a_x = v_x'$ - ускорение	I' – скорость изменения силы тока
m – масса	L – индуктивность
k – жёсткость пружины (коэффициент упругости)	$\frac{1}{C}$ - величина, обратная ёмкости конденсатора
F - сила	U– напряжение
r - вязкость	R -сопротивление
mv - импульс	LI – поток магнитной индукции
$\frac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия	$\frac{LI^2}{2}$ - энергия магнитного поля катушки
$\frac{kx^2}{2}$ - потенциальная энергия деформированной пружины	$\frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ - энергия электрического поля конденсатора

Рассмотрим ряд задач к параграфу 10 из учебника [10, стр. 36], используя ранее рассмотренные примеры и таблицу аналогий 2.

Пример 10. Изобразите механические системы, аналогичные электрическим цепям, изображённым на рисунках 8 и 9.



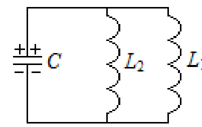
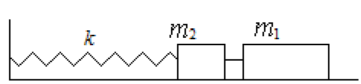


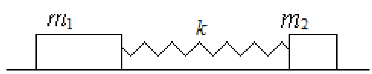
Рис. 8 Рис. 9

Решение. Обратим внимание при рассмотрении аналогии с механической системой на наличие в задаче двух масс и одной пружины. Для исключения влияния внешних сил расположим массы m_1 и m_2 на гладкой горизонтальной поверхности (при этом сила тяжести уравновешивается нормальной реакцией поверхности).

Последовательно соединённые катушки с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 8) (через них течёт один и тот же ток) будут вести себя как соединённые между собой массы m_1 и m_2, прикреплённые к пружине с жёсткостью k, один конец которой закреплён. Ток, текущий через катушки, при перезарядке конденсатора будет периодически изменять свой модуль и направление вне зависимости от соотношения между величинами индуктивностей.



Через параллельно соединённые катушки с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 9) при перезарядке конденсатора будут течь различные по величине, в том числе и по амплитуде (при различных индуктивностях), но одинаковые по направлению периодически изменяющие свои модули и направления токи. При наличии одной пружины с жёсткостью k массы m_1 и m_2 будут перемещаться с разными амплитудами, но одинаковой периодичностью, что, очевидно, реализуется в случае, когда пружина находится между двумя массами, двигающимися без трения по горизонтальной плоскости. Отметим, что при одинаковом направлении токов в катушках массы, прикреплённые к пружине, будут двигаться в разных направлениях; сохраняется только периодичность процесса.



Примечание. Обратим внимание, что в данной задаче при параллельном соединении катушек, в отличие от последовательного, речь может идти только о частичной аналогии.

Задание 6. Рассчитайте максимальную скорость груза массой m, удерживаемого двумя последовательно соединёнными пружинами жёсткостью k каждая, если одну из пружин сжать на величину x.

Пример 11. Рассчитайте период собственных электрических колебаний в цепи, представленной на рисунке 9. Используйте для решения механическую аналогию.

Решение. Период колебаний колебательного контура равен $T = 2\pi\sqrt{L^{*}C}$, где L^{*} - индуктивность эквивалентной катушки. Из таблицы 2 следует, что индуктивность аналогична массе; в данном случае при параллельности соединения (см. решение примера 10) $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$;

$m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда $\frac{1}{L^*} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$; $L^* = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$, и период собственных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}C}$.

Задание 7. Какое количество теплоты выделяется при разрядке конденсатора электроёмкостью C от заряда q_1 до заряда q_2?

Пример 12. Вывести дифференциальное уравнение, описывающее колебания пружинного маятника $x'' + \frac{k}{m}x = 0$, воспользовавшись законом Гука и вторым законом Ньютона.

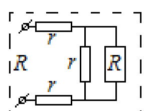
Решение. x'' - вторая производная от закона движения по времени. По второму закону Ньютона для движения по прямой $F = ma$, по закону Гука $F = -kx$. Приравняв правые части двух уравнений, получим $ma = -kx$; $ma + kx = 0$.

С учётом того, что ускорение a является первой производной от скорости по времени: $a = v'$, а скорость v – первая производная от координаты по времени: $v = x'$, имеем $mx'' + kx = 0$ тогда $x'' + \frac{k}{m}x = 0$, что и требовалось доказать.

Ответы, комментарии и решения заданий для самостоятельной работы.

Задание 1. ***Решение.*** Угол поворота тела относительно неподвижной оси задается формулой $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$. По условию задачи $\varphi_0 = 0$, начальная угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 4$ рад/с^2. Подстановка исходных данных даёт угол поворота $\varphi = 2\cdot 5 + \frac{4\cdot 5^2}{2} = 10+50 = 60$ рад. Один оборот тело совершает при $\varphi = 2\pi$ рад, тогда число оборотов тела равно $n = \frac{60}{2\pi} \approx \frac{30}{3,14} \approx 9,6$ оборотов.

Задание 2. ***Решение.*** Пусть сопротивление всей цепочки равно R. Поскольку цепочка бесконечна, будем считать, что сопротивление правой (отделённой штриховкой) части равно R: ведь цепочка бесконечна!



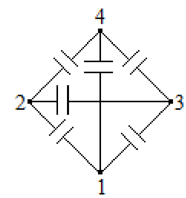
Далее подсчитать сопротивление цепочки (оно так же равно R) не составляет труда. Получим квадратное уравнение относительно R и решим его:

$$R = 2r + \frac{rR}{r+R}; R^2 + rR = 2r^2 + 2rR + rR; R^2 - 2rR - 2r^2 = 0; R = r \pm r\sqrt{3}.$$

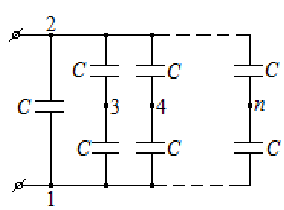
С учётом положительности сопротивления имеем $R = r(1+\sqrt{3})$.

Задание 3. ***Комментарий.*** При решении задачи обратим внимание на то, что через вертикально расположенные сопротивления ток не течёт (они соединяют точки с одинаковыми потенциалами). Остаётся рассчитать сопротивление двух параллельно соединённых цепочек сопротивлением $3r$: $R = 1{,}5r$.

Задание 4. ***Комментарий.*** Нарисуем сначала схему для случая четырёх точек.



Определим ёмкость между точками 1 и 2. В силу симметрии точки 3 и 4, очевидно, имеют одинаковый потенциал. Такой же потенциал имеет и любая другая точка. Поэтому заряженными будут только те конденсаторы, которые подключены одним из выводов к точке 1 или 2. Поэтому цепь с n точками эквивалентна цепочке.



Ёмкость такой цепи равна $\frac{C}{2}(n-2)+C=\frac{Cn}{2}$.

Задание 5. ***Решение.*** Для решения задачи достаточно вспомнить, что сила тока I - заряд q, протекающий через сечение проводника в единицу времени, т.е. $I = q'$, откуда заряд q – первообразная от линейной функции тока

$$q=\int_0^5 Idt=\int_0^5 ktdt=\frac{kt^2}{2}\Big|_0^5=\frac{10\cdot 25}{2}=125 \text{ Кл.}$$

Задание 6. ***Решение.*** При решении примера 5 для случая последовательного соединения двух пружин с коэффициентами жёсткости $k = k_1 = k_2$ коэффициент жёсткости эквивалентной пружины равен $k^* = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2}$. Если одна из пружин сжата на величину x, а вторая не деформирована, общая деформация пружины $x^* = x + 0 = x$. Потенциальная энергия сжатой пружины $\frac{k^*\left(x^*\right)^2}{2} = \frac{kx^2}{4}$ при снятии деформации переходит в кинетическую энергию $\frac{mv_{\max}^2}{2}$: $\frac{kx^2}{4} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$, откуда $v_{\max} = x\sqrt{\frac{k}{2m}}$.

Задание 7. ***Решение.*** Заряженный конденсатор имел энергию $\frac{q_1^2}{2C}$, после разрядки его энергия стала равной $\frac{q_2^2}{2C}$. Изменение энергии представляет собой выделенное количество теплоты $Q = \frac{q_1^2}{2C} - \frac{q_2^2}{2C} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{2C}$.

Предложенные 7 заданий могут быть домашним заданием для школьников (с последующим разбором и комментарием учителя).

3. Элементы небесной механики.

Сила гравитационного взаимодействия (сила тяготения) двух точечных масс m_1 и m_2, находящихся на расстоянии $r_{1,2}$, определяется по формуле

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^3}\vec{r}_{1,2}; \qquad (1)$$

$$\left|\vec{F}_{1,2}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}. \qquad (2)$$

Потенциальная энергия $E_П$ двух гравитационного взаимодействия двух материальных точек

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}}. \qquad (3)$$

Здесь $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2) – гравитационная постоянная.

Законы движения планет, открытые немецким учёным И. Кеплером в начале XVII века в современной формулировке:

I закон: *Орбита материальной точки в невозмущённом движении – это одно из конических сечений, т.е. окружность, эллипс, парабола или гипербола.*

В солнечной системе планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II закон: *Радиус-вектор планеты в равные времена описывает площади одинаковой величины* (рис. 1).

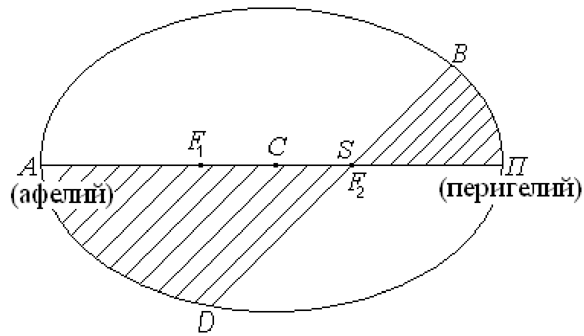


Рис. 1

Здесь F_1 и F_2 – фокусы эллипса, в одном из которых находится Солнце (*S*); *CA*=*CП* – большая полуось орбиты спутника Солнца (планеты); расстояния (дуги) *ВП* и *AD* по орбите планета проходит за равные промежутки времени; площади секторов *SВП* и *ASD* равны.

III закон: *Произведение квадратов времен обращения на суммы масс центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей их орбит:*

$$\frac{T_1^2(m_0 + m_1)}{T_2^2(m_0 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{3}$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения двух точек, m_1 и m_2 – их массы, m_0 – масса центральной точки (Солнца), a_1 и a_2 – большие полуось орбит точек (планет).

Пренебрегая массами планет m_1 и m_2 по сравнению с массой Солнца m_0, получим III закон в его первоначальной форме: квадраты периодов обращений двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3. \qquad (4)$$

Рассмотрим движение спутника в поле тяготения Земли. Оказывается, что спутник движется по параболической, эллиптической или гиперболической орбите, такой, что с центром Земли совпадает фокус эллипса, параболы или гиперболы. Самый большой интерес представляют эллиптические кеплеровские орбиты. Такая орбита изображена на рисунке 2.

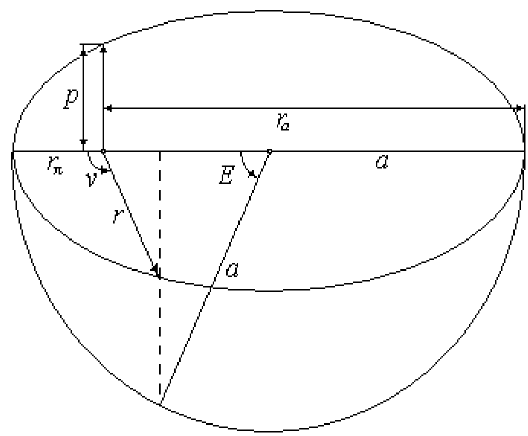


Рис. 2

В полярных координатах r, v уравнение эллипса имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \qquad (5)$$

причём угол v отсчитывается от направления r_π из центра Земли к ближайшей точке орбиты – *перигею.* Наибольшее удаление r_a спутника от Земли достигается в *апогее* – наиболее удалённой от точки Земли орбиты – при значении v=180^0. В уравнении величины p и e постоянны; p называется *фокальным параметром* орбиты, и его геометрический смысл ясен из рисунка 2; эта величина характеризует размер орбиты; вторая величина – *эксцентриситет* орбиты e – характеризует её сжатие, вытянутость. При e=0 орбита круговая, а при $e \to 1$ орбита стремится к параболической. Величины p и e можно выразить через апогейное (r_a) и перигейное (r_π) расстояния:

$$p = \frac{2r_a r_\pi}{r_a + r_\pi}; \quad e = \frac{r_a - r_\pi}{r_a + r_\pi}. \tag{6}$$

Наибольший размер эллипса характеризуется его *большой полуосью* a, при этом

$$a = \frac{r_a + r_\pi}{2}, \tag{7}$$

а между p, e, a существует связь

$$p=a(1-e^2). \tag{8}$$

Угол v в формуле (5) называется *истинной аномалией.* Зависимость $v(t)$ от времени даёт закон движения спутника по орбите. В теории кеплеровских орбит наиболее трудной задачей является отыскание явной зависимости $v=v(t)$.

Для упрощение этой задачи вводится новая переменная E, называемая *эксцентрической аномалией* (смысл её виден на том же рисунке 2), и связанная с v соотношениями:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}; \ \sin v = \frac{\sin E}{1 - e\cos E}\sqrt{1 - e^2}, \tag{9}$$

причём

$$r=a(1-e\cos E). \tag{10}$$

Эксцентрическая аномалия E связана со временем t ***уравнением Кеплера:***

$$E\text{-}e\sin E=n(t\text{-}\tau^*), \tag{11}$$

где $n=\sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$ - так называемое *среднее движение*; постоянная τ^* обозначает *момент прохождения через перигей орбиты.*

Из формулы (11) легко получить, что период обращения спутника по орбите

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,. \tag{12}$$

Если решить уравнение Кеплера (11) относительно E, т.е. определить $E(t)$, то тем самым определится по формулам (9) как явная функция времени и $v=v(t)$, а также $r=r(t)$.

Наконец, модуль скорости V движения по орбите удовлетворяет соотношению

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{1+e^2+2e\cos v}\,, \tag{13}$$

причём её радиальная и касательная проекции соответственно равны

$$V_r=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin v, \qquad V_\tau=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1+e\cos v\right), \tag{14}$$

так что в перине (v=0) скорость максимальна, а в апогее ($v=\pi$) – минимальна.

Примечание. Поскольку движение происходит в консервативном поле сил, имеет место *закон сохранения энергии.*

В астрономии и динамике космического полёта употребляются понятия трёх космических скоростей.

Первой космической скоростью v_1 называется наименьшая начальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли (ИСЗ). Она равна скорости кругового движения на данной высоте h над Землёй:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R+h}},$$

где M и R соответственно масса и радиус Земли.

При $h = 0$ $v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с.

Второй космической скоростью v_2 (параболической скоростью) называется наименьшая начальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно, начав движение вблизи поверхности Земли, преодолело земное притяжение. $v_2 = v_1\sqrt{2} \approx 11{,}2 \cdot 10^3$ м/с.

Примечание. Необходимая величина скорости не зависит от направления, в котором осуществляется запуск тела с Земли. От этого направления зависит только вид траектории, по которой тело удаляется от Земли.

Третьей космической скоростью v_3 называется наименьшая начальная скорость, при которой тело начинает движение вблизи поверхности Земли, преодолевает земное притяжение, затем притяжение Солнца и покидает Солнечную систему.

У поверхности Земли скорость v_3 зависит от направления запуска. При запуске в направлении орбитального движения Земли эта скорость наименьшая и составляет $16{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

При запуске в направлении, противоположном направлению движения Земли, эта скорость наибольшая и составляет $42{,}1 \cdot 10^3$ м/с.

4. Задача двух неподвижных центров (эйлерова задача) в движении ИСЗ.

Комплексные числа являются достаточно интересным математическим объектом. Однако при их изучении возникает вопрос, в каких реальных задачах они находят применение? Комплексные числа широко применяются в электротехнике, в отдельных задачах гидродинамики... Рассмотрим предположение, высказанной в 1961 году российскими (тогда советскими) учёными Е.П. Аксёновым, Е.А. Гребенщиковым и В.Г. Дёминым возможности использования комплексных чисел в задачах движения спутника в поле Земли.

Рассмотрим задачу о движении искусственного спутника Земли в её гравитационном поле. Земля несколько «сплюснута» в направлении полюсов (в очень малой степени также и «с боков»), не совсем симметрична, неоднородна, в результате чего поле сил, создаваемое Землёй, имеет достаточно сложную структуру. Силовая функция Земли имеет вид

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} I_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k\left(\sin\varphi\right)\right], \tag{1}$$

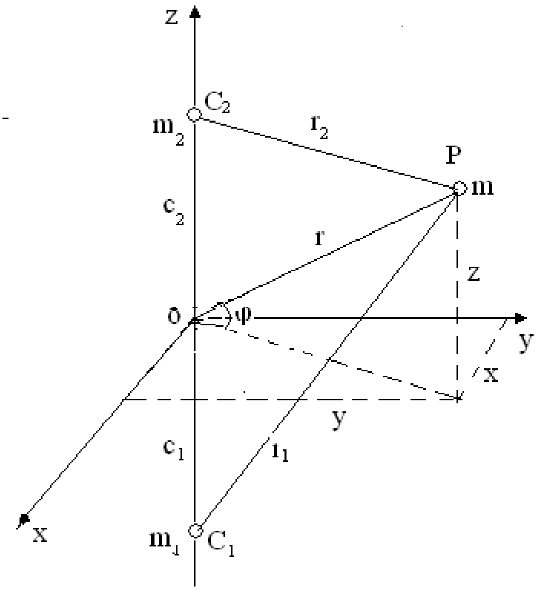
где M – масса Земли, f - универсальная постоянная тяготения, R - экваториальный радиус Земли, φ - географическая широта точки (отстоящей от центра Земли на расстояние r). Коэффициенты I_k имеют фиксированные безразмерные значения. Функции P_k представляют собой полиномы Лежандра, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned}
&P_0(x)=1;\\
&P_1(x)=x;\\
&P_2(x)=\left(3x^2-1\right);\\
&P_3(x)=\left(5x^3-3x\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{\mathrm{n}}(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.
\end{aligned}\qquad(2)$$

Таким образом, силовая функция (1) зависит не только от расстояния до центра притяжения, но и от широты места. По последним данным коэффициенты I_k имеют значения

$$I_2=-1082{,}2\cdot10^{-6},\ I_3=2{,}3\cdot10^{-6},\ I_4=2{,}1\cdot10^{-6},\ \ldots,\qquad(3)$$

так что самый большой из этих коэффициентов I_2 даёт очень малую добавку к потенциалу материальной точки, а остальные коэффициенты ещё меньше. Коэффициент I_3 характеризует заметное сжатие Земли в полярном направлении.



Эйлером была рассмотрена задача о движении точки в поле тяготения двух неподвижных центров C_1 и C_2, имеющих соответственно массы m_1 и m_2, которые располагаются на оси аппликат на расстояниях c_1 и c_2 от начала координат соответственно. Движение точки будет определяться силовой функцией, являющейся суммой силовых функций двух неподвижных центров:

$$W = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right), \tag{4}$$

где f - универсальная постоянная тяготения, r_1 и r_2 – расстояния от m_1 и m_2 соответственно:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_1)^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_1)^2}\ .$$

Рассмотрим для примера выражение $\frac{1}{r_2}$:

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2c_2z+c_2^2}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{z}{r}\cdot\frac{c_2}{r}+\left(\frac{c_2}{r}\right)^2}}, \qquad (5)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - расстояние движущейся точки от начала координат.

Обозначив $\frac{z}{r}=\sin\varphi$ (φ – широта движущейся точки), $\alpha=\frac{c_2}{r}$, используем известное в теории полиномов Лежандра разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sin\varphi+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\sin\varphi). \qquad (6)$$

Учитывая записанные ранее соотношения, получим:

$$\frac{m_2}{r_2}=\frac{m_2}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_2}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi). \qquad (7)$$

Здесь P_n – многочлен Лежандра n-го порядка.

Аналогично можно записать выражение для $\frac{m_1}{r_1}$. Тогда силовая функция задачи двух неподвижных центров принимает вид:

$$W=\frac{f(m_1+m_2)}{r}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{r_k}P_k(\sin\varphi)\right], \qquad (8)$$

где γ_k определяется из равенства

$$(m_1+m_2)\gamma_{\mathrm{k}}=m_1c_1^{\mathrm{k}}+m_2c_2^{\mathrm{k}}. \qquad (9)$$

Сравним полученную силовую функцию с силовой функцией земного сфероида (2). Вид у обеих силовых функций почти тождествен; они были бы полностью одинаковыми, если бы были равны постоянные коэффициенты в соответствующих членах разложения. Разложение (8) содержит всего четыре свободных параметра: m_1, m_2, c_1, c_2 и, значит, можно отождествить лишь четыре члена разложения (8) с четырьмя членами разложения (1). Отождествим четвёрки первых членов разложения:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = M, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = M I_2 R^2, \\ m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 = M I_3 R^3. \end{cases} \qquad (10)$$

Остальные члены разложения можно не отождествлять из-за их малости.

Алгебраическая система (10) без труда разрешается. Из первых двух уравнений получаем:

$$m_1 = -\frac{M c_2}{c_1 - c_2}, \; m_2 = \frac{M c_1}{c_1 - c_2}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в два последних уравнения системы (10), получим

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 = -\mathrm{I}_2 \mathrm{R}^2, \\ \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 (c_1 + c_2) = -\mathrm{I}_3 \mathrm{R}^3 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} \mathrm{c}_1 \mathrm{c}_2 = -\mathrm{I}_2 \mathrm{R}^2, \\ \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 = \dfrac{I_3 R}{I_2} \end{cases} \qquad (12)$$

Очевидно, что c_1 и c_2 являются корнями квадратного уравнения

$$c^2 - \frac{I_3 R}{I_2} c - I_2 R^2 = 0 \qquad (13)$$

Решая это уравнение, получим:

$$c_1 = \left(\frac{I_3}{I_2} + \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2}\right)^2 + 4 I_2} \right) \frac{R}{2}; \; c_2 = \left(\frac{I_3}{I_2} - \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2}\right)^2 + 4 I_2} \right) \frac{R}{2}. \qquad (14)$$

Подставляя полученный результат в ранее записанные уравнения, определим m_1, m_2, c_1 и c_2. Вспоминая численные значения величин I_2 и I_3, получим удивительный результат: **расстояния c_1 и c_2, массы m_1 и m_2 рассматриваемой нами задачи двух неподвижных центров являются**

комплексными! При этом силовая функция остаётся действительной, действительным остаётся и движение точки!

Коэффициент I_2 характеризует сжатие Земли, а I_3 – её асимметрию относительно плоскости экватора. Эта асимметрия очень мала, и ею можно пренебречь. Если учитывать только сжатие Земли, положив I_3=0, получим:

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}, \; c_1 = iR\sqrt{|I_2|}, \; c_2 = -iR\sqrt{|I_2|}. \tag{15}$$

Итак, движение спутника в поле тяготения сжатой, симметричной относительно экватора, Земли можно интерпретировать задачей о движении точки в поле двух неподвижных центров, имеющих одинаковую массу и расположенных на чисто мнимом расстоянии друг от друга.

Примечание.

Расстояние было бы действительным для вытянутой, а не сжатой Земли. Большинство планет Солнечной системы вытянуто.

5. Трение качения и скольжения.

Если к твёрдому телу, покоящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности, приложить горизонтальную силу $\vec{S}$, то действие этой силы вызовет появление силы сцепления $\vec{F}_c = -\vec{S}$, представляющей собой силу противодействия плоскости смещению тела. Благодаря сцеплению тело остаётся в покое при изменении модуля силы $\vec{S}$ от нуля до некоторого значения $S_{\max}$. Это означает, что модуль силы сцепления тоже изменяется от $F_c = 0$ до $F_c = F^{\max}$ в момент начала движения. Модуль максимальной силы сцепления, как показывает опыт, пропорционален нормальному давлению N на плоскость, тогда

$$F^{\max} = f_c \cdot N. \qquad (1)$$

Коэффициент f_c является отвлечённым числом и называется коэффициентом сцепления. Коэффициент сцепления зависит от физических свойств соприкасающихся поверхностей и определяется экспериментально. Его величина для материалов, используемых в технике, обычно меньше единицы. Так как максимальное значение силы сцепления равно $f_c \cdot N$, то модуль силы сцепления всегда удовлетворяет условию:

$$F_c \leq f_c \cdot N. \qquad (2)$$

Направление силы сцепления противоположно направлению того движения, которое возникло бы под действием приложенных сил при отсутствии сцепления. При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения скольжения.

Направление этой силы, противодействующей скольжению, противоположно направлению вектора скорости тела. Модуль силы трения скольжения пропорционален нормальному давлению N:

$$F = f \cdot N \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности f называется коэффициентом трения скольжения и определяется опытным путём. Коэффициент трения скольжения является величиной, не имеющей размерность, и зависит от материалов и состояния трущихся поверхностей и их свойств (так, коэффициент трения скольжения между двумя деревянными брусками будет зависеть от того, вдоль или поперёк волокна эти бруски перемещаются относительно друг друга; наличие смазки существенно облегчает скольжение, но при этом уже нельзя говорить о скольжении одного тела по другому), а также от скорости движения тела и удельного давления. Экспериментально установлено, что $f < f_c$.

Реакция реальной (шероховатой) поверхности, в отличие от идеальной (гладкой) поверхности, имеет две составляющие: нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу сцепления $\vec{F}_c$ (или силу трения $\vec{F}$ при движении тела).

Угол ϕ_c, образованный реакцией шероховатой поверхности с нормалью к поверхности в предельном состоянии покоя при $F_c = F^{max}$, называется углом сцепления. В дальнейшем везде $G = mg$ – сила тяжести.

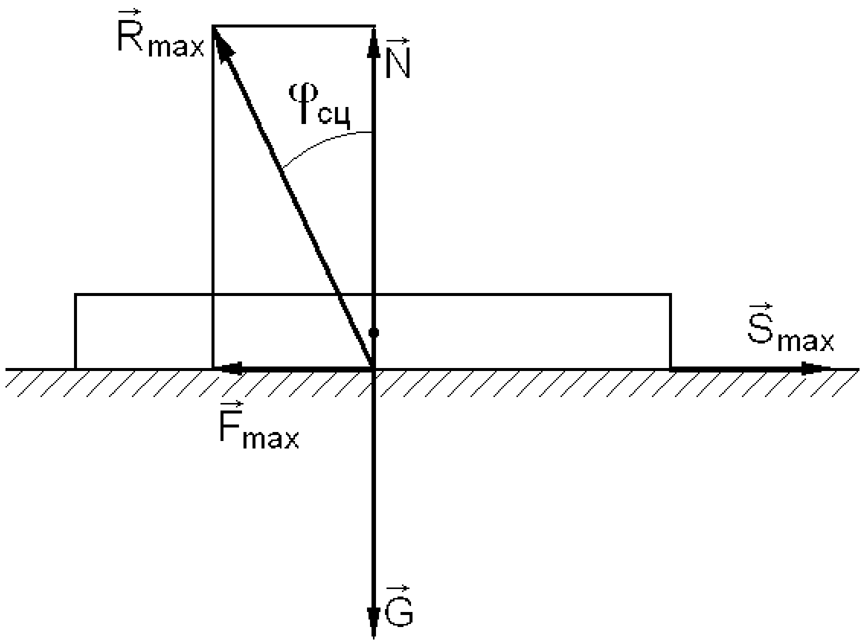


Рис. 1

Тангенс угла сцепления равен коэффициенту сцепления:

$$\operatorname{tg}\phi_{c} = \frac{F^{max}}{N} = f_{c} \text{ или } \quad \phi_{c} = \operatorname{arctg} f_{c} \qquad (4)$$

Угол, тангенс которого равен коэффициенту трения скольжения, называется углом трения. Этот угол можно определить опытным путём. Прибор для определения угла сцепления очень прост. Он представляет собой наклонную плоскость, угол наклона которой можно измерит, (длина наклонной плоскости и высота подъёма её верхнего конца уже дают все данные для необходимых расчётов). Поднимая один из концов плоскости и измеряя угол её наклона в момент, когда тело начнёт скользить по плоскости, мы имеем угол наклона плоскости, равный углу сцепления ϕ_c.

Конус с вершиной в точке касания тел (поверхность, на которой находится тело, может быть и криволинейной), образующая которого составляет угол сцепления с нормалью к поверхности тел, называется конусом сцепления.

Поверхность конуса сцепления представляет собой геометрическое место максимальных реакций опорной поверхности. Действительно, максимальная реакция поверхности может занимать различные положения на поверхности этого конуса, зависящие от направления силы $\vec{S}$, стремящейся сдвинуть тело (рис. 2).

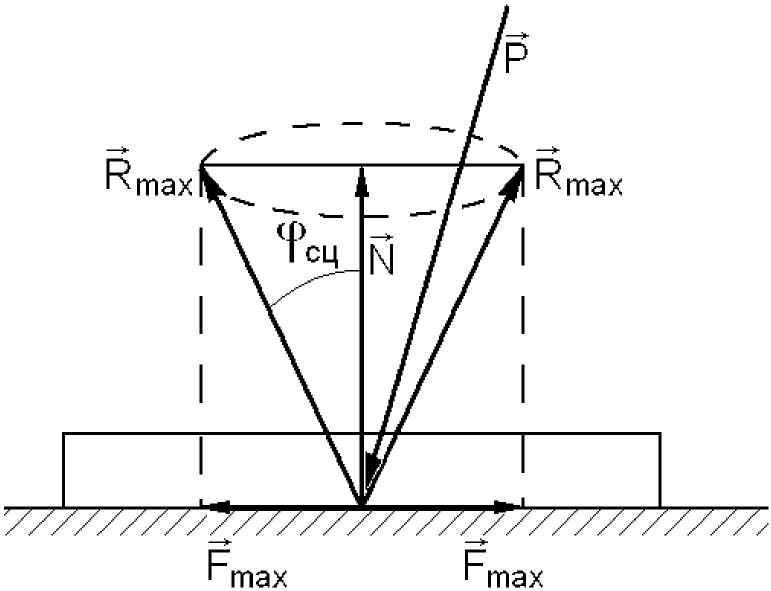


Рис. 2

Пространство внутри конуса представляет собой совокупность возможных положений реакции опорной поверхности в состоянии покоя.

Библиографический список

1. Физическая энциклопедия / гл. ред. А.М. Прохоров. Тт. I–V. М.: Советская энциклопедия, 1990. – 703 с.; ил.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. I. Статика. Кинематика. Учебник для втузов. Изд. 5-е, испр. – М.: Высш. школа, 1977. – 430 с.; ил.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика. Учебник для втузов. Изд. 5-е, испр. – М.: Высш. школа, 1977. – 430 с.; ил.
4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977 г. – 432 с.
5. Севрюков П.Ф. О некоторых понятиях и определениях школьного курса механики //Физика. Первое сентября. – М.: Чистые пруды, 2008. №19. – С. 17–18.
6. Севрюков П.Ф. Трение качения и трение скольжения // Физика. Первое сентября», М.: Чистые пруды, 2005. – №23. – С. 35–36.
7. Севрюков П.Ф. Задачи на движение: простые и не очень // Математика в школе. – М.: Школьная пресса, 2008. – №10. – С. 15-18.
8. Севрюков П.Ф. Введение в классическую механику. Классическая механика для начинающих / Palmarium academic publishing GmbH & Co KG: Saarbrucken, Germany, 1013. – 240 p.
9. Севрюков П.Ф. Классическая механика. Критическое осмысление понятий, определений, теорем школьного курса. – М.: Илекса; НИИ Школьных технологий; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 140 с.
10. Физика: Учеб. пособие для 11 кл. шк. и классов с углубл. изуч. физики / под. ред. А.А. Пинского. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 432 с.
11. Гольдфарб Н.И. Сборник вопрос и задач по физике. Учебное пособие для поступающих в вузы. – М.: Высшая школа, 1992. – 352 с.
12. Севрюков П.Ф. О некоторых понятиях и определениях школьного курса механики. // Физика. Первое сентября. – М.: Чистые пруды, 2008.

– №19. – С. 17–19.

13. Севрюков П.Ф. Кинематика плоского движения твёрдого тела // Электронная публикация в журнале Физика. Первое сентября. – М.: Чистые пруды, 2011. – №14.
14. Севрюков П.Ф. Об аналогии формул механических и электромагнитных явлений // Электронная публикация в журнале Физика. Первое сентября. – М.: Чистые пруды, 2011. – №15.
15. Севрюков П.Ф. Задача механики // Электронная публикация в журнале Физика. Первое сентября. – М.: Чистые пруды, 2012. – №4.
16. Севрюков П.Ф. Задачи на движение заряженной частицы в однородном электрическом поле // Физика в школе. – М.: Школьная пресса, 2014. – №4. – С. 62–64.
17. Севрюков П.Ф. Равновесие твёрдого тела в плоскости. Сложение параллельных сил // Физика в школе. – М.: Школьная пресса, 2014. – №5. – С. 62-64.

Научное издание

Севрюков Павел Фёдорович

МЕХАНИКА В ФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСНОЙ

Печатается в авторской редакции.

Издательство «Дизайн-студия Б».
г. Ставрополь, ул. Краснофлотская, 88. Тел. (8652) 75-06-09.

Подписано в печать 12.10.2018. Бумага мелованная 130 г. Печать офсетная. Гарнитура «Times». Формат 65 × 95 1/16. Усл. печ. л. 16,53. Тираж 000 экз.

Отпечатано в типографии ИП Бочков В.Б.
Ставрополь, Маршала Жукова, 46. Тел. (8652) 333-131.