В.В. КРАСИЛЬНИКОВ, М.М. МОСКОВСКИЙ, В.С. ТОИСКИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В СРЕДЕ EXCEL-

ОБЪЕКТ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и молодежной политики
Ставропольского края
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный педагогический институт»

**В.В. Красильников, М.М. Московский,
В.С. Тоискин**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В СРЕДЕ EXCEL-

ОБЪЕКТ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

•

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Ставрополь, 2017

УДК 004.414.3
ББК 32.973.26-018.2
К 78

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт.

Рецензенты: **В.П. Пашинцев,** доктор технических наук, профессор (ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»);

Е.С. Кулевская, кандидат педагогических наук (МБОУ СОШ № 21, г. Ставрополь).

Красильников В.В., Московский М.М., Тоискин В.С.

К 78 Математические модели и методы в среде Excel – объект профессиональной компетенции учителя математики и информатики : учебно-методическое пособие. – Ставрополь : Изд-во СГПИ, 2017 ; Дизайн-студия Б. – 176 с.

ISBN 978-5-6040510-8-5

Учебно-методическое пособие рассчитано на повышенный уровень сложности владения MS Excel при реализации математических моделей из разделов геометрии, алгебры, дискретной математики, основ математического анализа, теории вероятности и математической статистики, хотя включает в кратком изложении и ряд базовых положений работы с программой. В пособии приведены примеры использования MS Excel и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для учителей математики и информатики общеобразовательных учреждений, педагогов образовательных учреждений среднего профессионального образования, может быть использовано при обучении студентов направления 44.03.05 «Педагогическое образование профилей подготовки «Информатика», «Математика», а также в системе повышения квалификации педагогических кадров.

УДК 004.414.3
ББК 32.973.26-018.2

ВВЕДЕНИЕ

Человека нельзя «сделать», «произвести», «вылепить» как вещь, как продукт, как пассивный результат воздействия извне, но можно только обусловить его включение в деятельность, вызвать его собственную активность и исключительно через механизм этой его собственной (совместно с другими людьми) деятельности он формируется в то, что делает его эта деятельность.

Г.С. Батищев

Методологической основой ФГОС среднего общего образования является системно - деятельностный подход, который предполагает ориентацию на результаты образования как системообразующий компонент стандарта, где развитие личности обучающегося на основе усвоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира составляет цель и основной результат образования. Основой формирования личностных характеристик являются личностные, метапредметные и предметные результаты, которые, на наш взгляд, могут быть эмерджентными с возможным проявлением синергетического эффекта только при обеспечении системных взаимосвязей между изучаемыми предметами в средней школе. При этом метапредметные связи должны формироваться таким образом, чтобы выявить закономерности развития обучающихся и обнаруживать «точки роста», выявить свойства учебного предмета в системе его отношений с предметными, метапредметными и личностными результатами. Выявление метапредметных отношений возможно при интеграции традиционных и инновационных механизмов реализации стандарта. Одним из основным критериев, обеспечивающих системный подход при формировании указанных связей является уровень профессионализма личности педагога. Именно профессионализм педагога позволит при формировании метапредметных связей выявить промежуточные звенья между структурными элементами.

В настоящее время в школьном курсе математики в качестве содержательно-методической линии предлагается использование экспериментальной математики. Под линией экспериментальной математики понимают частично-выявленную содержательно – методологическую линию школьного курса математики, ведущим понятием которой является понятие математического эксперимента. Сценарии реализации дидактической модели исследовательского обучения математике на основе компьютерных визуализаций и компьютерных экспериментов позволяют обеспечить взаимодействие таких предметов как «Математика» и «Информатика и ИКТ» на основе системного подхода, при котором основной целью объединения является формирование «портрета выпускника школы», а не использование знаний одного предмета для решения задач другого.

К основным элементам содержания экспериментальной математики в старшей школе можно отнести: стереометрию, начала математического анализа, элементы математической статистики.

В литературе по экспериментальной математике в качестве основного компьютерного средства математического эксперимента предлагается использование бесплатной динамической математической среды GeoGebra (https://www.geogebra.org), включающей в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику. Достоинством программы является ее бесплатность и кроссплатформенность. В то же время, программа требует дополнительного освоения ее интерфейса, приемов работы. Кроме того, она в большей степени носит иллюстративный характер и слабо связана с содержанием дисциплины «Информатика и ИКТ».

Одним из наиболее распространённых программных продуктов при изучении предмета «Информатика и ИКТ» является пакет MS Office, в состав которого входят электронные таблицы. Возможности электронных таблиц позволяют реализовать все элементы содержания экспериментальной математики. При этом важно то, что математический эксперимент в электронных таблицах позволяет более полно сформировать предметные результаты по дисциплине «Информатика и ИКТ».

Одним из универсальных средств реализации межпредметных связей более чем двух дисциплин, для формирования навыков исследовательской деятельности обучающихся является компьютерное моделирование. К средствам компьютерного моделирования относятся языки программирования, математические пакеты символьных и аналитических преобразований, системы имитационного моделирования и т.д. Однако это требует приобретения дорогостоящих систем компьютерной математики (MATLAB, Maple, Mathematica, Macsyma, MuPAD, S-PLUS, Stadia, SPSS и др.) и дополнительного изучения на достаточно высоком уровне соответствующих программных продуктов, что в условиях современной школы практически неосуществимо.

Многие задачи содержательного, методического, исследовательского характера могу с успехом решаться на базе общедоступного программного обеспечения – электронных таблиц Excel. Материал, представленный в пособии может быть использован при преподавании соответствующих разделов математики и информатики, а также как основа факультативного курса и для самообразования. Основная цель пособия – повышение уровня профессиональной компетентности учителей математики и информатики в области математической обработки информации, компьютерного моделирования. Этим определяется и основная целевая аудитория – учителя математики и информатики общеобразовательных учреждений, студенты педагогических вузов соответствующих профилей подготовки.

1. ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ – ИНСТРУМЕНТ КОМПЬЮТЕРНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Любому человеку в ходе практической деятельности приходится совершать операции над количественными данными, которые осуществляются в соответствии с математическими законами. Поэтому для человека, который не свяжет дальнейшую жизнь с математикой, наиболее важным является практический аспект математики. Для него это прикладная наука, близкая к технологии. Здесь наиболее важным является умение провести необходимые вычисления. Математическая теория изменяется сравнительно медленно, однако технология применения математических методов претерпела значительно более существенные изменения. Буквально за последние пять-шесть десятилетий пройден путь от расчетов в уме и на бумаге к применению счетов, арифмометров, калькуляторов и далее — к расчетам на компьютере. Поэтому в настоящее время специалист, даже хорошо знающий математику, но не умеющий реализовывать математические методы на компьютере, не может считаться специалистом современного уровня.

Использование компьютера при проведении расчетов сдвигает акценты в математической подготовке специалиста. Если раньше основное внимание было сосредоточено на математических методах, которые предусматривали проведение расчетов вручную, то теперь, с появлением специализированных математических программ, необходимо научиться проводить требуемые вычисления на компьютере.

Для решения задач на компьютерах чаще всего применяется метод решения «в лоб», опирающийся на основное определение и использующий самый общий подход. Снижается значение частных случаев, различных свойств описываемых математических объектов, ориентированных на облегчение решений вручную.

Например, при решении вручную квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ помимо общего решения требовалось знать решения для частых случаев: когда квадратное уравнение разлагается на множители, когда b – четное, когда $a = 1$, по формулам Виета. При этом было принято считать, что решение «рационально», если для него используется подходящая частная формула. В настоящее время при применении компьютера, по-видимому, рациональным следует считать решение с использованием общих подходов, по общей формуле. В то же время традиционное преподавание классической математики все еще ориентировано на дальнейшую работу с карандашом и бумагой.

Современный межпредметный подход к обучению с применением вычислительных возможностей компьютера заключается в акцентировании внимания на реализации способов решения математических задач, на том, как решать типовые задачи, но с обязательным пониманием сущности решаемой задачи, что предполагает обязательный этап формализации и моделирования. При этом и изучение собственно проблем информатики ориентируется не на путь «от пакетов программ и их возможностей для решения задач», а «от математических моделей и задач к способам их решения на компьютере».

Компьютерный математический анализ данных предполагает некоторое математическое преобразование данных с помощью определенных программных средств. Следовательно, необходимо иметь представление как о математических методах обработки данных, так и о соответствующих программных средствах, то есть необходимо опираться на определенный программный пакет.

Существует значительное количество специализированных математических пакетов, таких как MATLAB, Mathcad, Maple, Mathematica, Macsyma, MuPAD, S-PLUS, Stadia, SPSS, Math, и др. Все они охватывают основные разделы математики и позволяют производить подавляющее большинство необходимых математических расчетов. Однако освоение этих пакетов самостоятельно - достаточно трудоемкая задача. В то же время в курс как школьной так и вузовской информатики включено изучение электронной таблицы Excel. Поэтому представляется оправданным реализовать в старших классах подход, основанный на применении математических методов именно с помощью пакета Excel. Конечно, Excel сильно уступает специализированным математическим пакетам. Тем не менее, большое количество математических задач может быть решено с его помощью.

И все-таки, почему Excel?

Использование электронных таблиц Excel обусловлено следующими причинами:

функциональные возможности программы Excel заведомо перекрывают все потребности по автоматизации обработки данных эксперимента, построению и исследованию моделей;

универсальная программа Excel обладает стандартным интерфейсом;

изучение Excel предусматривается программами общего образования по информатике, следовательно, возможно эффективное использование Excel в условиях осуществления межпредметных связей с информатикой и другими учебными дисциплинами, преимущественно с математикой, физикой;

данная программа отличается доступностью в изучении и простотой в управлении, что принципиально важно как для ученика, так и для учителя;

результаты деятельности на рабочем листе Excel (тексты, таблицы, графики, формулы) «открыты» пользователю;

численные методы, реализуемые в Excel позволяют решать весьма сложные задачи, не поддающиеся аналитическому решению;

среди всех известных программных средств Excel обладает едва ли не самым богатым инструментарием для работы с графиками, что обеспечивает наглядность результатов;

внушительная по объему библиотека функций обеспечивает возможность решения задач их разнообразных предметных областей.

электронные таблицы наиболее эффективно могут использоваться при проведении научного и демонстрационного эксперимента; лабораторных работ; физического практикума; решения задач по различным темам курсов математики и физики; контроля знаний.

Следует отметить, что одной из важнейших проблем в обучении в старшей школе является проблема мотивации. Обучение компьютерному математическому моделированию и его использование в учебном процессе помогает приблизить изучение предмета к реальной жизни, изучению жизненных процессов, с точки зрения информатики, а также увидеть ее прикладное значение, то есть способствовать достижению цели образования - подготовки человека к будущей деятельности в обществе. Моделирование дает общий алгоритм, как исследования объектов, процессов, явлений, так и изучения учебного материала. Моделирование позволяет целенаправленно воздействовать на разные виды мышления обучаемого, формирование же мышления является процессом познания, связанным с открытием субъективно нового знания, решением проблемных задач, творческим преобразованием действительности.

Использование возможностей компьютерного математического моделирования различных систем и процессов позволяет максимально задействовать межпредметные связи информатики, с одной стороны, и математики, физики, биологии, экономики и других наук, с другой стороны, причем связи эти базируются на хорошо апробированной методологии математического моделирования, которая делает предмет целостным. Метод математического моделирования является с давних времен одним из фундаментальных методов познания, а появление и развитие информационных технологий дало новый толчок его совершенствованию. Чтобы получить полноценное научное мировоззрение, развить свои творческие способности, учащиеся должны овладеть основами компьютерного математического моделирования, уметь применять полученные знания в учебной и профессиональной деятельности. Этапы компьютерного математического моделирования приведены на рис. 1.1.

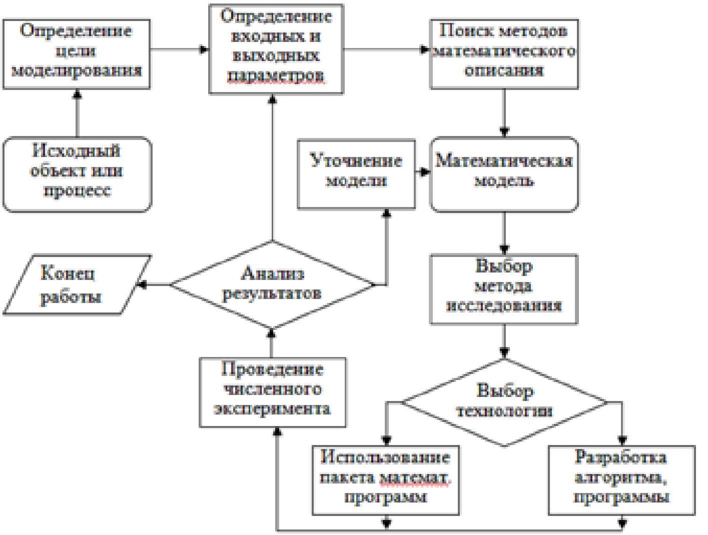


Рис.1.1. Этапы компьютерного математического моделирования

Технологически процесс компьютерного математического моделирования включает построение модели на языке математических соотношений, выбор математического метода ее реализации, выбор технологического средства, проведение численного эксперимента и анализ результатов.

Владение знаниями и навыками учителями математички и информатики в этой области в полно мере соответствует требованиям, предъявляемым профессиональным стандартом «Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель). В частности, в разделе «Трудовая функция» модуля «Предметное обучение. Математика» указано, что к трудовым действиям относятся: «Формирование у обучающихся умения пользоваться заданной математической моделью, в частности, формулой, геометрической конфигурацией, алгоритмом, оценивать возможный результат моделирования (например – вычисления). … Формирование у обучающихся умения применять средства информационно-коммуникационных технологий в решении задачи там, где это эффективно. … Формирование и поддержание высокой мотивации и развитие способности обучающихся к занятиям математикой, предоставление им подходящих заданий, ведение кружков, факультативных и элективных курсов для желающих и эффективно работающих в них обучающихся». Современный учитель должен владеть основными математическими компьютерными инструментами: визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; вычислений – численных и символьных; обработки данных (статистики).

В рамках данного пособия не представляется возможным подробно рассмотреть все этапы компьютерного математического моделирования, знание которых составляет базис профессиональной подготовки учителя, да это и не является целью пособия. Рамки пособия предполагают, что математическая модель разработана, технология реализации модели базируется на программном продукте – электронной таблице Excel. Общая задача заключается в демонстрации применения набора функций Excel для реализации той или иной математической модели. Решение задачи предполагает наличие у пользователей первичных навыков работы с программным продуктом и знание сущности реализуемых математических моделей, хотя минимальный объем математических сведений по каждому рассматриваемому разделу приводится в виде краткой справки.

2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ EXCEL

2.1. Синтаксис функций

Функция в Excel – это предустановленная формула, которая выполняет вычисления, используя заданные значения в определенном порядке.

Каждая функция имеет следующую базовую структуру (синтаксис):

=*ФУНКЦИЯ* (*аргумент*1; *аргумент*2; …).

Запись любой функции начинается со знака равенства.

ФУНКЦИЯ — это непосредственное название функции (уникальное имя), которое всегда вводится заглавными буквами. При этом не обязательно использовать заглавные буквы при вводе функции, Excel автоматически произведёт необходимую конвертацию.

В скобках вводятся элементы, называемые аргументами функции (входные значения – информация, необходимая для работы функции). Аргументы разделяются точкой с запятой без пробелов.

Функции могут не иметь аргументов, либо иметь как строго фиксированное, так и неопределённое количество аргументов. Например, функции *И*, *СУММ* и *ПРОИЗВЕД* могут иметь до 255 аргументов, разделенных точкой с запятой. Даже если функция не имеет аргументов необходимо после названия функции ставить открывающую и закрывающую скобки. Например, функция *СЕГОДНЯ*() возвращает текущую дату и не требует ввода аргументов.

Аргументы делятся на обязательные и опциональные. Обязательные аргументы должны присутствовать в необходимом количестве в скобках, иначе Excel сгенерирует ошибку. Опциональные, или необязательные, аргументы могут использоваться по мере необходимости. Например, функция *LOG*() вычисляет значение логарифма по заданному основанию. Структура (синтаксис) функции: *LOG* (*число*; *основание*)

число – это необходимое значение для вычисления логарифма;

основание – необязательный параметр, указывает основание, по которому происходит вычисление логарифма (по умолчанию параметр равен 10).

В качестве аргументов функций можно использовать константы, ссылки на ячейки и диапазоны ячеек, имена, математические выражения, массивы значений, а также другие функции.

Константы – готовое (не вычисляемое) значение, которое всегда остаётся неизменным – числа или текстовые значения. Если функция содержит один аргумент, то использование константы в качестве аргумента не рационально, поскольку формула всегда возвращает одно и то же значение. Например, формула =*SIN*(0) всегда возвращает одно и то же значение – 0. В подобных случаях аргумент функции лучше задать в виде ссылки на ячейку. При этом изменение содержимого ячейки приводит к перерасчету функции.

Использование констант в качестве аргументов оправдано в случае, если функция имеет два и более аргументов. Например, функцию =ПОВТОР(A1;5) повторяет текст из ячейки A1 5 раз.

В качестве аргументов многих функций можно использовать ссылки на совокупность ячеек или на диапазон ячеек. Например, в качестве аргументов функций =СУММ(A1;A2;A3;A4) используются числовые данные, записанные в соответствующих ячейках, результатом будет сумма этих данных. Аналогичный результат будет получен, если функцию записать в следующем виде: =СУММ(A1:A4). Здесь используется ссылка на диапазон ячеек.

В качестве аргументов функции можно использовать имена. К примеру, если диапазону A2:C3 присвоить имя Данные, то вместо ссылок на диапазон в формуле =*СУММ*(A2:C3) можно использовать имя этого диапазона: =*СУММ*(*Данные*).

В качестве аргумента функции могут использоваться математические выражения. Например, в формуле =SIN(A5) используется ссылка на ячейку A5. Если эта ячейка содержит формулу =A1+A3/A4, то ее можно использовать в качестве аргумента функции *SIN*. В результате получим формулу =SIN(A1+A3/A4). Excel сначала вычисляет значение выражения в скобках, а затем использует полученный результат в качестве значения аргумента.

Математические выражения, используемые в качестве аргументов функции, в свою очередь, могут содержать другие функции. Например, в формуле =КОРЕНЬ(СУММ(A2:C3)–A4) в качестве аргумента функции *КОРЕНЬ* используется математическое выражение, которое содержит функцию *СУММ*, вычисляющую сумму своих аргументов; в качестве аргументов функции *СУММ* используется ссылка на диапазон ячеек A2:C3. Функции, которые используются внутри других функций, называются вложенными. В рассматриваемом примере с формулой вложенной является функция *СУММ*. При вычислении формулы, содержащей вложенные функции, Excel сначала вычисляет вложенную функцию. Если функция содержит несколько уровней вложенных функций, первым вычисляется выражение с наибольшей глубиной вложения. В Excel формула может содержать до 64 уровней вложенных функций. Если формула содержит больше 64 уровней вложенных функций, Excel выдаст сообщение об ошибке. Не рекомендуется использовать вложенность более пяти-семи уровней, поскольку это затрудняет написание и чтение формулы. Если задача предполагает большую вложенность, то следует провести корректировку алгоритма решения.

В Excel в качестве аргумента функции можно использовать массив констант. При использовании массива констант в качестве аргумента функции элементы массива должны быть разделены точкой с запятой или двоеточием и заключены в фигурные скобки. Формула =ИЛИ(A1={1;3;5;7;9;11}) вычисляет значение *ИСТИНА*, если в ячейке A1 содержится одно из значений – 1, 3, 5, 7, 9 или 11.

2.2. Категории функций

Все встроенные функции Excel разделены на несколько категорий.

Логические функции

Категория Логические содержит шесть или семь функций в зависимости от версии Excel. Использование логических функций делает формулы более гибкими, а использование функции *ЕСЛИ* наделяет формулу способностью «принимать решения».

Текстовые функции

Текстовые функции предназначены для обработки текста.

Функции категории Проверка свойств и значений

Функции этой категории часто называют информационными и предназначены для определения типа данных, хранимых в ячейке. Они проверяют выполнение какого-то условия и возвращают в зависимости от результата значение *ИСТИНА* или *ЛОЖЬ*.

Функции Дата и время

Функции, принадлежащие к этой категории, предназначены для работы со значениями даты и времени. По сути, эти функции работают с числовыми значениями, потому что дата и время в Excel являются числами, к которым применен один из числовых форматов даты и времени.

Математические функции

Математические функции позволяют выполнять простые и сложные вычисления. В категорию Математические входят: тригонометрические функции; функции, выполняющие арифметические действия; функции, позволяющие работать с массивами значений или матрицами, и многие другие.

Статистические функции

Статистические функции предназначены для проведения статистического анализа. С помощью статистических функций можно вычислить статистические характеристики набора данных, построить статистический ряд, вычислить доверительные интервалы, проверить статистические гипотезы, выполнить вычисления известных статистических распределений, провести корреляционный и регрессионный анализ.

Функции Ссылки массивы

Осуществляют поиск в списках или таблицах; извлекают данные, хранящиеся в сводной таблице, позволяют получать дополнительную информацию о массивах и манипулировать данными.

Финансовые функции

Осуществляют такие типичные финансовые расчеты, как вычисление суммы платежа по ссуде, объем периодической выплаты по вложению или ссуде, стоимость вложения или ссуды по завершении всех отложенных платежей и т.д.

Функции для работы с базами данных

Функции этой категории используются для анализа данных, содержащихся в обычных электронных таблицах (списках данных) и таблицах Excel. С помощью функций баз данных можно быстро получить нужную информацию, например подсчитать количество записей в базе данных или вычислить сумму значений, удовлетворяющих некоторому условию и др.

Инженерные функции

Функции для выполнения инженерного анализа. Их можно разделить на три группы: функции для работы с комплексными числами; функции для преобразования чисел из одной системы счисления в другую; функции для преобразования величин из одной системы мер и весов в другую.

2.3. Общие правила работы с функциями

Ввести функцию в формулу можно несколькими способами, но, независимо от способа ввода функций, необходимо – правильно ввести имя функции и правильно задать аргументы функции.

Для многих функций также важен порядок следования аргументов. Для таких функций необходимо ввести аргументы в правильной последовательности.

Ввод функций вручную

Ввести функцию в формулу можно вручную, и во многих случаях этот способ оказывается наиболее эффективным.

Чтобы ввести ее следует выполнить следующие шаги: щелчком левой кнопки мыши выделить ячейку, где будет отображаться результат; нажать знак равенства на клавиатуре; ввести выражение в выделенной ячейке или в строке ввода формул; нажать Enter.

Пример .1. Предположим, в ячейку D1 требуется ввести формулу =СУММ(A1:D1;A2:C2). Для этого необходимо выполнить следующие действия (рис. 2.1, а):

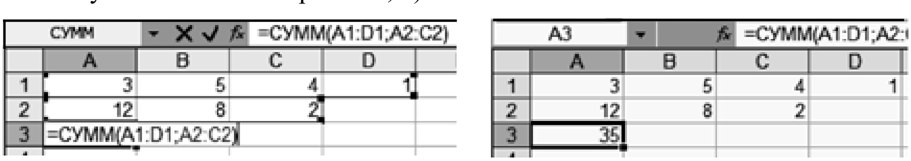
1. Выделите ячейку D1.
2. Введите знак «=» и имя функции строчными буквами либо в выделенной ячейке, либо в строке ввода формул.
3. Введите открывающую скобку.
4. Задайте аргументы функции:

– выделите диапазон ячеек A1:D1, введите точку с запятой, затем выделите диапазон A2:C2 или

– выделите диапазон A1:D1; нажмите клавишу <Ctrl> и, удерживая ее нажатой, выделите диапазон D1:D4.

4. Введите закрывающую скобку и нажмите клавишу <Enter>.

Результат показан на рис. 2.1, b).



a) *b*)

Рис. 2.1. Ввод функции вручную

Работа с мастером функций

Мастер функций (в последних версиях Excel – Вставка функций) – это последовательность диалоговых окон, посредством которых Excel ведет пользователя от выбора нужной функции до настройки всех аргументов.

Использование мастера функций является наилучшим решением при написании сложных формул, особенно использующих вложенные функции. Он очень облегчает и ускоряет ввод формул: автоматически вставляет знак «=», имя функции, круглые скобки, расставляет точки с запятой, позволяет просматривать значение ссылок и результаты промежуточных вычислений.

Существуют следующие способы запуска мастера функций:

– с помощью кнопки в строке формул ;

– с помощью команды «Другие функции...» кнопки ;

– с помощью пункта меню «Вставка» → «Функция».

После выполнения одного из этих действий откроется окно мастера функций (рис. 2.2):

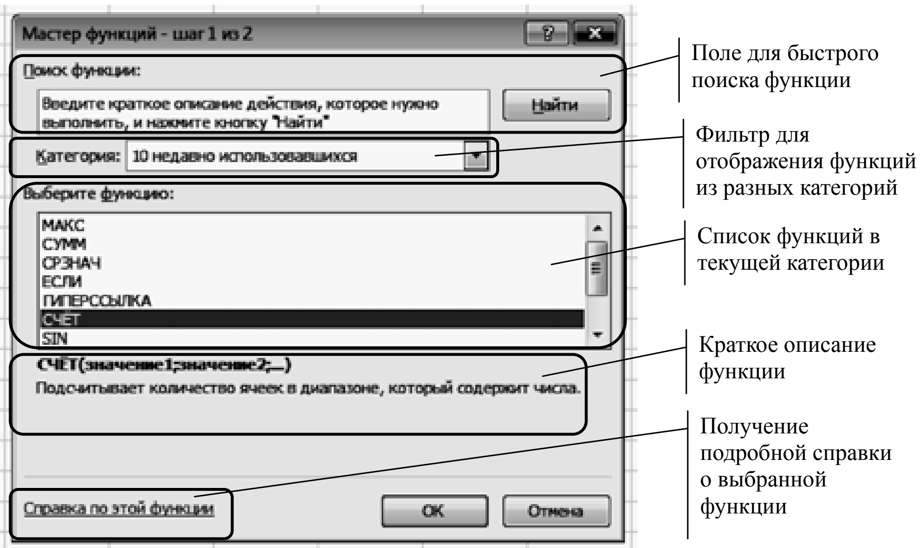


Рис.2.2. Окно Мастера функций (шаг 1)

На первом шаге выбирается нужная функция, пользуясь поиском или фильтром категорий. После выбора функций нажать <ОК>, откроется окно второго шага (рис. 2.3).

Мастер функций позволяет записывать и встроенные функции (рис. 2.4).

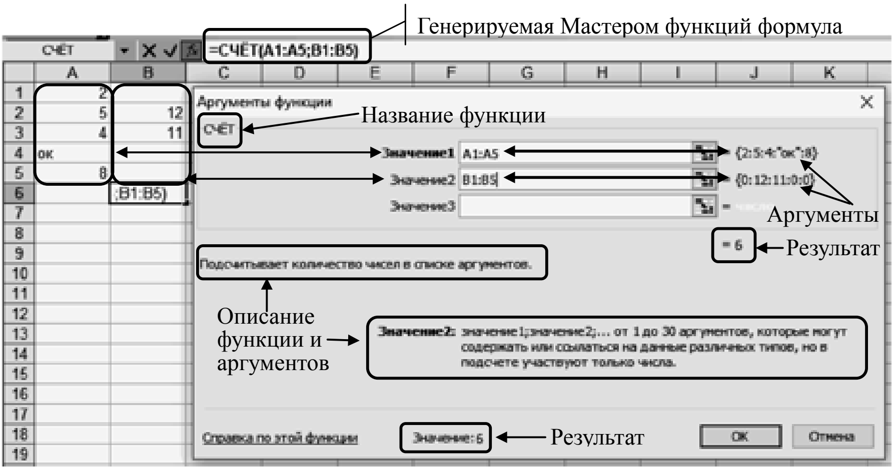


Рис. 2.3. Окно Мастера функций (шаг 2)

После выбора нужной функции из выпадающего списка Excel вставит название функции и круглые скобки в указанное место в формуле (в активное текстовое поле аргумента). Окно Мастера функций для предыдущей функции (в этом примере «СУММ») сменится на окно для вставляемой функции «КОРЕНЬ» и ее название в формуле сделается жирным (рис. 2.5).

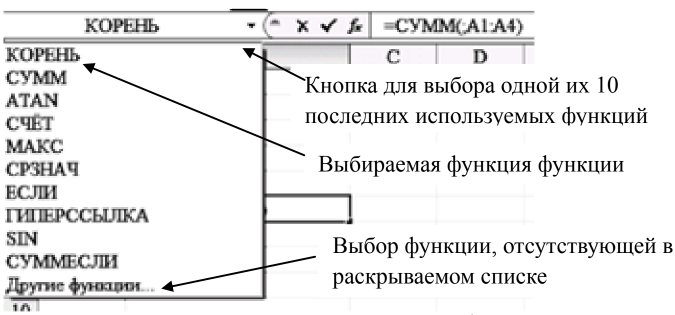


Рис. 2.4. К записи встроенных функций

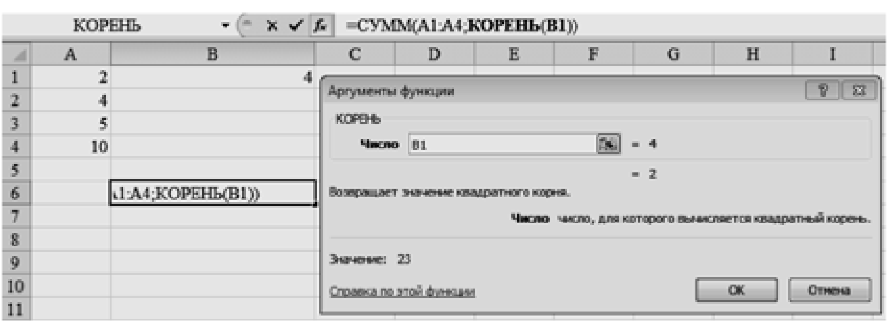


Рис. 2.5. Вставка функции

Если на рабочем листе имеется ячейка, значение которой начинается со знака #, то это свидетельствует об ошибке содержащейся в этой ячейке формулы. Информация о всех возможных кодах ошибок и вместе рекомендациях по их устранению, представлена в таблице. 2.1.

Табл. 2.1. Коды возможных ошибок при использовании формул Excel

Код ошибки	**Смысл кода**	**Предположения и рекомендации**
#####	Столбец недостаточно широк или дата и время являются отрицательными числами	Расширить столбец: проверить значения даты или времени
#ДЕЛ/0	Попытка деления на нуль или на значение из пустой ячейки	Проверить делитель в формуле и убедиться, что он не ссылается на пустую ячейку. Возможно, чтобы исключить подобное, потребуется использовать в формуле функцию ЕСЛИ
#Н/Д	Значение недоступно для использования формулой в качестве аргумента	Если используются функция ГПР, ПРОСМОТР, ПОИСКПОЗ или ВПР, проверьте, нет ли с ней проблем
#ИМЯ?	Формула содержит текст, не являющийся именем ни функции, ни диапазона	Вероятно, имеется опечатка в имени функции или имени диапазона
#ПУСТО!	Задано пересечение двух областей, которые в действительности не имеют общих ячеек	Измените ссылки таким образом, чтобы диапазоны пересекались
#ЧИСЛО!	Значение слишком велико или слишком мало, мнимое или не обнаружено	Excel может манипулировать числами от 10^{-308} до 10^{308}. Поэтому такая ошибка обычно свидетельствует о неправильном использовании функции — например, чтобы вычислить квадратный корень для отрицательного значения
#ССЫЛКА!	Формула содержит неверную ссылку	Возможно, данные, на которые имеется ссылка в формуле, были удалены
#ЗНАЧ!	Формула содержит аргумент недопустимого типа	Возможно, формула пытается выполнить арифметическое или логическое действие, например, над текстом

Приведём некоторые рекомендации, упрощающие процедуру ввода формул.

1. Окно мастера функций можно перетаскивать за любую точку.

2. В окне мастера функций, выделяя ссылку и нажимая F4 один, или несколько раз, можно поменять тип ссылки (сделать абсолютной или смешанной);

3. Если в окне мастера функций нажать F3, откроется окно для вставки именованных ссылок (если они существуют).

4. Если какую-то функцию в формуле нужно заменить на другую, выделить эту функцию в строке формул и вставит нужную функцию. Выделенная функция заменится на вставляемую.

5. Клавиша Tab служит для переключения на следующий аргумент (текстовое поле), а сочетание Shift+Tab – на предыдущее.

6. Если выделить ячейку, содержащую формулы с функциями и нажать кнопку f_x, то откроется окно мастера функций для одной из функций в формуле.

7. Для того, чтобы написать формулу типа =СУММ(C1:C3)/КОРЕНЬ(C4), необходимо открыть Мастер функций, выбрать функцию *СУММ*, выделить нужный диапазон, затем щёлкнуть мышкой в строку формул и в ней вручную набрать «/», затем нажать на кнопку для вставки функции, и вставить вторую функцию *СУММ*.

8. Если в текстовом поле нужно ввести ТОЛЬКО текст, не обязательно вручную ставить двойные кавычки. Можно написать текст без кавычек и нажать < Tab>, или просто щёлкнуть в другое поле. Excel проставит кавычки автоматически (работает не во всех текстовых полях).

9. В тех полях, где требуется ввести логическое значение ЛОЖЬ или ИСТИНА, достаточно ввести 0 для ЛОЖЬ, и любое ненулевое значение для ИСТИНА (принято использовать 1).

3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В EXCEL

3.1. Основные математические функции

Понятие функции охватывает все разделы математики. Это одно из фундаментальных математических понятий, поэтому изучение свойств функций и их графиков занимает значительное место в школьном курсе математике.

Функция в математике – это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент из другого множества (каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества).

Часто под термином «функция» понимается числовая функция, то есть функция, которая ставит одни числа в соответствие другим. Способы представления функции:

1. В виде аналитического выражения (формулой). В этом случае её обозначают как соответствие в форме равенства записью $y=f(x)$, где x есть переменная, пробегающая область задания функции, а соответствующее значение переменной y принадлежит области значения функции.

2. Графическое представление. Пусть $y=f(x_1, x_2,\dots x_n)$ – вещественная функция n переменных. Тогда ее графиком является множество точек в n+1-мерном пространстве $\{x_1, x_2,\dots x_n, f(x_1, x_2,\dots x_n)\}$. В частности, при $n=1$ график функции может быть в ряде случаев изображен кривой в двумерном пространстве. График двумерной функции – это ее графическое построение из множества значений, где ось абсцисс - это значения аргумента x, а ось ординат - значения функции при этом значении аргумента $f(x)$.

3. Табличное представление. При экспериментальном исследовании какой-либо новой закономерности, когда еще неизвестны ни формула, ни график, этот способ будет единственно возможным.

Рассмотрим элементарные функции, которые изучаются в школьном курсе и примеры построение графиков этих функций.

Линейная функция $y= kx+b$.

Свойства линейной функции:

– область определения функции – вся числовая прямая;

– множество значений линейной функции – вся числовая прямая;

– если k (угловой коэффициент) больше 0, то функция возрастает, а если k меньше 0, то линейная функция убывает.

Угловой коэффициент определяет угол между графиком линейной функции и положительным направлением оси абсцисс.

График линейной функции есть прямая.

Квадратичная (квадратная) функция $y = ax^2 + bx + c, a\neq 0$;

Графиком квадратичной функции является парабола.

Свойства квадратичной функции:

– область определения функции – вся числовая прямая;

– область значений функции зависит от знака коэффициента a; при $a>0$ ветви параболы направлены вверх, функция имеет наименьшее (y_{min}), но не имеет наибольшего значения; при $a<0$ ветви параболы направлены вниз, функция имеет наибольшее (y_{max}), но не имеет наименьшего значения;

– функция непрерывна на всей области определения;

– асимптот не имеет.

Парабола имеет вершину, ось, проведенная через вершину и параллельная оси Oy, делит параболу на две симметричные части. Вершиной параболы называется точка с координатами $(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a})$.

Для построения графика квадратичной функции общего вида в качестве характерных точек удобно брать координаты её вершины, нули функции (корни уравнения), если они есть, точку пересечения с осью ординат (при $x=0, y=c$) и симметричную ей относительно оси параболы точку $(-b/a;c)$.

Функция обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — число, отличное от нуля.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола.

Свойства функция обратной пропорциональности;

– область определения состоит из всех значений x, кроме нуля;

– область значений – все значения y, кроме нуля;

– функция не имеет нулей;

– при $k>0$ ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, при $k<0$ ветви гиперболы расположены во II и IV координатных четвертях;

– оси Ox и Oy являются асимптотами – прямыми, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются (но никогда их не достигнут);

– функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0; 0).

Функция корня $y=\sqrt[n]{x}$.

Свойства функции:

– область определения – промежуток $[0; +\infty)$;

– область значения – промежуток $[0; +\infty)$;

– функция $y=\sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y=x^n$;

– на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает;

– сверху функция не ограничена, но она ограничена снизу;

– на всей области определения функция выпукла вверх;

– наименьшее значение функции 0, а наибольшего значения она не имеет.

Функция модуля $y=|x|$.

По определению модуля $y=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$.

График функции $y=|x|$ состоит из двух лучей – биссектрисы I и биссектрисы II координатных углов.

Свойства функции:

– область определения — множество действительных чисел: $(-\infty; \infty)$;
– область значений – множество неотрицательных чисел: $[0; \infty)$;
– функция имеет один нуль при $x=0$;
– график функции модуль x симметричен относительно оси Oy;
– функция убывает при $x\in(-\infty; 0)$ и возрастает при $x\in(0; \infty)$.

Дробно-рациональная функция $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$**,** где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

С использованием Excel график дробно-рациональной функции может быть построен табличным способом с предварительным анализом характерных точек.

Тригонометрические функции - элементарные функции, которые возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов при гипотенузе (или, что равнозначно, зависимость хорд и высот от центрального угла (дуги) в круге).

К тригонометрическим функциям относятся:

– прямые тригонометрические функции: синус ($\sin(x)$), косинус ($\cos(x)$);
– производные тригонометрические функции: тангенс ($\mathrm{tg}(x)$), котангенс ($\mathrm{ctg}(x)$);
– другие тригонометрические функции: секанс ($\sec(x)$), косеканс ($\mathrm{cosec}(x)$).

Синус и косинус вещественного аргумента представляют собой периодические, непрерывные и бесконечно дифференцируемые вещественнозначные функции. Остальные четыре функции на вещественной оси также вещественнозначные, периодические и бесконечно дифференцируемые в области определения, но не непрерывные. Тангенс и секанс имеют разрывы второго рода в точках $\pm\pi n+\dfrac{\pi}{2}$, а котангенс и косеканс – в точках $\pm\pi n+\dfrac{\pi}{2}$.

Тригонометрическим функциям присуще понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T)=f(x)$, где T – период).

Свойства функции $y=\sin(x)$:

– область определения вся числовая ось;
– функция ограниченная, множество значений – отрезок $[-1;1]$;
– функция нечетная;
– функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.

Свойства функции $y=\cos(x)$:

– область определения вся числовая ось;
– функция ограниченная; множество значений – отрезок $[-1;1]$;

– функция четная;

– функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.

Свойства функции $y=\mathrm{tg}(x)$:

– область определения вся числовая ось, за исключением точек вида $x=\pi/2+\pi k$, где k – целое;

– функция неограниченная; множество значение вся числовая прямая;

– функция нечетная;

– функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.

Свойства функции $y=ctg(x)$:

– область определения вся числовая ось, за исключением точек вида $x=\pi k$, где k – целое;

– функция неограниченная; множество значение вся числовая прямая;

– функция нечетная;

– функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.

Логарифмические функции $y=log_a x$ с основанием a $(a>0, a\neq 1)$.

Логарифмическая функция $y=log_a x$ является обратной к показательной функции $y=a^x$. Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y=x$.

Свойства функции:

– область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел: $(0;+\infty)$;

– множество значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел: $(-\infty;+\infty)$;

– логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$;

– логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной; не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; не ограничена сверху, не ограничена снизу;

– график любой логарифмической функции $y=log_a x$ проходит через точку (1;0).

Показательные функции $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ с основанием a.

Свойства функции:

– область определения – множество действительных чисел;

– область значений – множество всех положительных действительных чисел;

– при $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0<a<1$ функция убывает на множестве действительных чисел;

– показательная функция является монотонной.

Свойства показательной функции с основанием меньшим единицы:

– показательная функция убывает на всей области определения;

– функция вогнутая, точек перегиба нет;

– горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$ при x стремящемся к плюс бесконечности;

– функция проходит через точку (0;1).

Свойства показательной функции с основанием большим единицы:

– показательная функция, основание которой больше единицы, возрастает на всей области определения;

– функция вогнутая, точек перегиба нет;

– горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$ при x стремящемся к минус бесконечности;

– функция проходит через точку (0;1).

3.2. Построения графиков одномерных функций на плоскости

В общем виде одномерная функция в декартовой системе координат записывается следующим образом: $y = f(x)$. Отсюда следует, что для построения графика необходимо определить область значений переменной x, протабулировать функцию, то есть выбрать шаг $x_{i+1}–x_i$ изменения переменной x в пределах области значений, вычислить значение функции $y_i = f(x_i)$ для каждого значения x_i и результаты в виде пар значений (x_i, y_i) представить в таблице на листе Excel.

1. Создайте два столбца (строки). В первом необходимо записать значения аргумента. Во втором - значения функции.

2. Впишите в первый столбец, то есть в столбец x, такие значения x, которые бы наиболее полно описывали требуемую функцию (характерные точки, значения находятся в области определения функции и т.д.) Определить конечный диапазон значений аргумента, на котором будет построена функция.

3. Во второй столбец необходимо вписать формулу функции. Согласно этой формуле и будет построен график. Используйте свойства копирования формул для заполнения значений функции для всех значений аргументов.

4. Для построения графика необходим выбор точечных диаграмм. Другие виды диаграмм не позволят создать на одном графике и аргумент в виде значений оси $0x$, и функцию.

5. Для изучения свойств функции можно при составлении таблицы использовать абсолютные ссылки на постоянные коэффициенты при заполнении второго столбца, а их значения ввести в отдельные ячейки.

6. Возможно введение в таблицу дополнительных столбцов для других значений коэффициентов. В этом случае появляется возможность построение нескольких графиков

При определении по графику свойств функций целесообразно использование следующего алгоритма:

– находится область определения функции;

– определяется область значений функции;

– определяются промежутки x, в которых функция принимает положительные значения $f(x)>0$ и промежутки x, в которых функция принимает отрицательные значения $f(x)<0$;

– определяются промежутки монотонности функции (промежутки возрастания, убывания функции);

– определяются нули функции;

– определяются чётность, нечётность функции.

– определяются наибольшие и наименьшие значения функции.

Пример.

Построить график функции

$$y=\begin{cases}3-2x^2, x\in[-1,1]\\ |x|-2, x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

на отрезке [-3,3] с шагом 0,2

Для построения сложных функций или функций с разрывом в столбце значений функций целесообразно использование функции *ЕСЛИ*(), которая позволит корректно построить сложную функцию и (или) исключить из графика точки разрыва первого и второго родов.

Для рассматриваемого примера функция *ЕСЛИ*() для данных в ячейке B3 будет иметь вид

=ЕСЛИ(И(B2>=-1;B2<=1);3-2*B2*B2;ABS(B2)-2)/

Таблица состоит из двух строк (при заполнении элементов первой строки можно использовать автозаполнение.

B3 fx =ЕСЛИ(И(B2>=-1;B2<=1);3-2*B2*B2;ABS(B2)-2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1																						
2	X	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
3	Y	0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	1	1,72	2,28	2,68	2,92	3	2,92	2,68	2,28	1,72	1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0
4																						

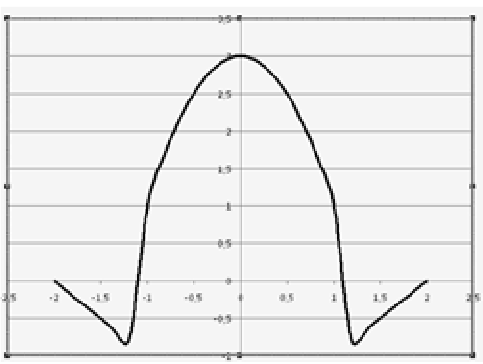


Рис. 3.1. График функции

$$y=\begin{cases}3-2x^2, x\in[-1,1]\\ |x|-2, x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

Выделяем ячейки B3-V3 и выбираем вид диаграммы «Точечная со сглаживающими линиями с маркерами» получим график, представленный на рис. 3.1.

Для построения требуемых значений по оси *Ox* выделяем область построения диаграммы правой кнопкой и из контекстного меню выбираем пункт «Выбрать данные…». В появившемся окне в поле «Значение X» вводим $B$2:$V$2 и щелкаем на кнопке «ОК».

3.3. Построение кривых второго порядка на плоскости

Кривая второго порядка на плоскости - это множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению второй степени:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где *x,y* – переменные, *a,b,c,d,e,f* – числовые коэффициенты, для которых $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

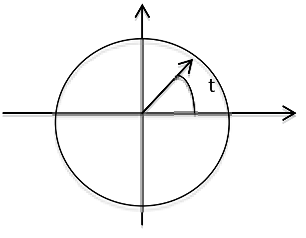
К кривым второго порядка относятся, в частности, окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружностью – геометрическое место точек плоскости, которые удалены от одной точки, называемой центром, на одно и то же расстояние, равное радиусу *R*.

Каноническое уравнение окружности с центром в точке $A(x_0, y_0)$ и радиусом *R,* имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Параметрические уравнения окружности радиуса *R* с центром в начале координат: $x=R\cos(t)$, $y=R\sin(t)$, $0< t<2\pi$ $(\mathrm{mod}2\pi)$.



Параметр *t* представляет собой угол между осью *Ox* и радиус-вектором точки окружности.

Эллипс – геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами эллипса (F_1 и F_2), есть величина постоянная. Отрезки, соединяющие точку эллипса с фокусами, называются фокальными радиусами точки. Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс является окружностью.

Каноническое уравнение эллипса с центром симметрии в начале координат: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где *a* - большая полуось эллипса, *b* - малая полуось эллипса.

Если $a = b$, то имеем окружность с радиусов $R = a = b$: $x^2 + y^2 = R^2$.

Если центр эллипса находится не в начале координат, а в некоторой точке $C(x_0;y_0)$, оси эллипса параллельны осям координат, то каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Параметрические уравнения эллипса с полуосями *a*, *b*:

$x=a\cos(t)$, $y=b\sin(t)$, $0<t<2\pi$ $(mod2\pi)$.

Здесь параметр t не является углом между осью Ox и радиус-вектором точки окружности.

Предположим, что функциональная зависимость y от x не задана непосредственно $y = f(x)$, а через промежуточную величину t. Тогда формулы $x = \phi(t); y = \psi(t)$ задают параметрическое представление функции одной переменной.

Гипербола – множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 (называемых фокусами) – есть величина постоянная, численно равная расстоянию между вершинами этой гиперболы: $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a,b – положительные действительные числа. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Гипербола состоит из двух отдельных кривых, которые называют ветвями.

Для построения окружности и эллипса в Excel возможны два подхода:

1. Получение уравнений окружности и эллипса в явном виде и использование стандартного подхода к построению графиков.

Недостатком данного подхода является необходимость построения кривых из двух полуокружностей, так как квадратное уравнение, которое описывает кривую второго порядка, имеет, в общем случае, два корня.

2. Использование при построении параметрического задания окружности и эллипса. Данный способ при работе с Excel является предпочтительным.

Для получения явного выражения y в функции x необходимо решить уравнение $x=f(t)$ относительно t (что не всегда удается) и подставить найденное выражение в уравнение $y=\varphi(t)$.

Построение окружности

Параметрические уравнения окружности рассмотрим для значений параметра, пробегающих полный оборот вокруг начала координат:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad h = \pi/16, \text{ где } h \text{ – величина шага.}$$

После заполнения данными фрагмент таблицы будет иметь вид:

C2 fx =COS(C1)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	AE	AF	AG	AH
1	0	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,37	1,57	1,77	1,96	2,	5,69	5,89	6,09	6,28
2	1,00	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,38	0,20	0,00	-0,20	-0,38	-0,56	0,83	0,92	0,98	1,00
3	0,00	0,20	0,38	0,56	0,71	0,83	0,92	0,98	1,00	0,98	0,92	0,83	-0,56	-0,38	-0,20	0,00
4	0,19635															

В ячейку B4 введем формулу =ПИ()/16. В ячейку B1 –0, в ячейку C1 – формулу =B1+$B$4, в ячейку B2 – формулу =COS(B1) и в ячейку B3 – формулу =SIN(B1). Скопируем формулы из ячеек B1:B3 в ячейки вправо до AH1:AP3.

Выделим диапазон B2:AH3. Вызовем Мастер диаграмм – тип *Точечная* – вид *Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров*

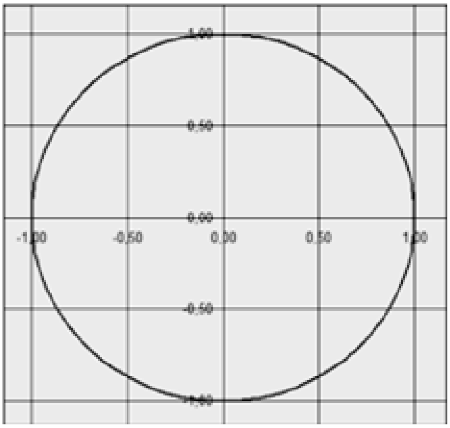


Рис. 3.2. График окружности.

В процессе построения можно задать заголовки диаграммы и осей, убрать легенду, назначить линии сетки. Выполним растяжение-сжатие диаграммы, так чтобы получилась окружность, а не эллипс. Результат построения показан на рисунке.

Построение эллипса

Уравнение эллипса в параметрической форме $x = a\cos(t), y = b\sin(t)$ где a – большая полуось, b – малая полуось. Заполним таблицу.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	Координаты точек эллипса					Координаты центра	
5	№ точки	t, рад	X	Y		Xo	Yo
6	1	0	7	5,000		4	5
7	2	0,314	6,853	6,235			
8	3	0,628	6,428	7,350		Полуоси	
9	4	0,942	5,765	8,235		a	b
10	5	1,256	4,929	8,803		3	4
11	6	1,57	4,002	9,000			
12	7	1,884	3,076	8,805		Шаг параметра t	
13	8	2,198	2,239	8,239		0,314	
14	9	2,512	1,575	7,355			
15	10	2,826	1,148	6,242			
16	11	3,14	1,000	5,006			
17	12	3,454	1,145	3,771			
18	13	3,768	1,570	2,655			
19	14	4,082	2,232	1,769			
20	15	4,396	3,067	1,199			
21	16	4,71	3,993	1,000			
22	17	5,024	4,920	1,193			
23	18	5,338	5,757	1,758			
24	19	5,652	6,422	2,640			
25	20	5,966	6,850	3,752			
26	21	6,28	7,000	4,987			

Выберем тип диаграммы *Точечная с гладкими кривыми и маркерами/*

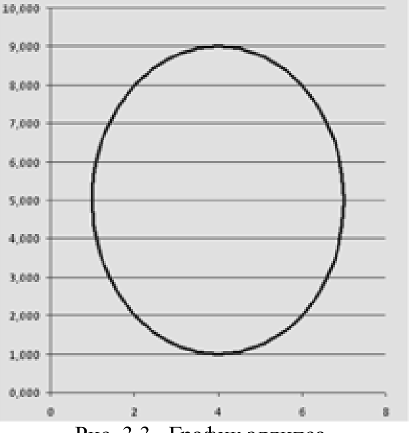


Рис. 3.3. График эллипса.

Построение гиперболы

В школьном курсе математики уравнение гиперболы определяется как график обратной пропорциональности: $xy=k$. Для канонической записи выразим k через значение полуоси a в виде $k = \pm\frac{a^2}{2}$, тогда уравнение примет вид $xy = \pm\frac{a^2}{2}$.

Введем новую систему координат, получающуюся поворотом (вокруг начала координат) на 45 градусов против часовой стрелки старой системы координат. Тогда старые координаты (x,y) выражаются через новые (x^1,y^1) следующими формулами:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^1 - y^1),\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^1 - y^1).$$

Если подставить эти значения в формулу $xy = \pm\frac{a^2}{2}$, то уравнение этих же гипербол в новой системе координат будет иметь вид: $(x^1)^2 - (y^1)^2 = \pm a^2$, то есть вид канонической гиперболы

В общем случае – график обратной пропорциональности представляет собой равностороннюю гиперболу, уравнение которой можно привести к каноническому виду.

Рассмотрим построение гиперболы $y=2/x$ в диапазоне $x \in [-10;10]$с шагом x=0,5. Так как функция не определена в точке x=0 при записи функции в таблице Excel целесообразно использовать функцию *ЕСЛИ*() следующего вида (для рассматриваемого примера): ЕСЛИ(B1=0; «Функция не определена»; 2/B1)

Заполним таблицу значениями в соответствии с исходными данными, значения функции ограничим двумя знаками после запятой.

B2 =ЕСЛИ(B1=0;"Функция не определена";2/B1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	x	-10	-9,5	-9	-8,5	-8	-7,5	-7	-6,5	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
2	y=2/x	-0,20	-0,21	-0,22	-0,24	-0,25	-0,27	-0,29	-0,31	-0,33	-0,36	-0,40	-0,44	-0,50	-0,57	-0,67	-0,80	-1,00	-1,33	-2,00	-4,00	Функция не определена	4,00	2,00	1,33
3																									

График будет состоять из двух частей: [-10;-05] и [0,5;10]

Сначала стандартным образом строим кривую для первого диапазона [-10;-05], выбирая Точечную диаграмму со сглаженными линиями и устанавливая в качестве значений для оси *Ox* соответствующие значения из первой строки (для всех значений *x*, от – 10 до -0,5 (диапазон B1:U1). Получаем график следующего вида

Рис. 3.4. График ветви гиперболы

К построенному графику добавляем второй ряд, указывая в качестве значений *y* значения в диапазоне [W2:AP2] и значений *x* – значения в диапазоне [W1:AP1]. Получаем график гиперболы

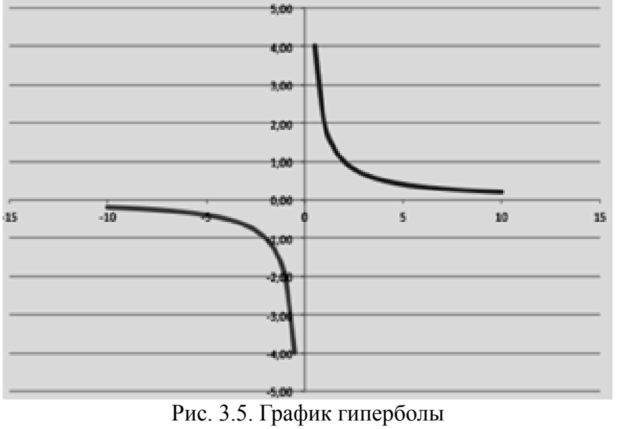


Рис. 3.5. График гиперболы

В качестве дополнительного материала рассмотрим построение более сложных кривых второго порядка.

Для построения графика функций целесообразно использование полярной системы координат.

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, является точка *O* - полюс и ось *OP*, которая называется полярной осью.

Если *M* - произвольная точка плоскости, несовпадающая с полюсом *O*, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: *r* - ее расстояния от полюса, выраженного в единицах масштаба, и φ - угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом *OM*. Числа *r* и φ называются полярными координатами точки *M*. Координата *r* называется полярным радиусом точки *M* (иногда радиус-вектором точки *M*), а координата φ - ее полярным углом (полярный угол измеряется в радианах). Полярные координаты точки записываются в скобках справа от ее обозначения, причем на первом месте в скобках записывается координата *r;* а на втором - координата φ, например, *M (r; φ)*. Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

Полярные координаты являются наиболее употребительными после декартовых. Это нелинейные координаты. При построении кривых, заданных в полярных координатах, полярные координаты переводят в декартовы. Если полюс имеет координаты (x_0, y_0), то формулы преобразования таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos(\varphi) \\ y = y_0 + \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

Для функций, заданных в полярных координатах формула имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где φ – полярный угол.

Таблица должна содержать данные для построения кривой в полярной системе координат. Затем надо перевести данные из полярных координат в декартовы. Данные для построения точечного графика должны быть представлены в декартовой системе координат.

Архимедова спираль

Рассмотрим Архимедову спираль, ее уравнение в полярных координатах: $\rho = a\varphi$, где a — постоянная.

Составим таблицу для *a=3*, значение полярного угла меняется с шагом 0,2 от 0 до 6π. Такой диапазон выбран для того, чтобы увидеть несколько витков спирали. Фрагмент таблицы представлен на рисунке.

	A	B	C	D
1		a	2	
2	φ	ρ = a *φ	x=ρ *cos(φ)	y=ρ *sin(φ)
3	0	0	0,00	0,00
4	0,2	0,4	0,39	0,08
5	0,4	0,8	0,74	0,31
6	0,6	1,2	0,99	0,68
7	0,8	1,6	1,11	1,15
8	1	2	1,08	1,68
9	1,2	2,4	0,87	2,24
10	1,4	2,8	0,48	2,76
11	1,6	3,2	-0,09	3,20
12	1,8	3,6	-0,82	3,51
13	2	4	-1,66	3,64
14	2,2	4,4	-2,59	3,56
15	2,4	4,8	-3,54	3,24
16	2,6	5,2	-4,46	2,68
17	2,8	5,6	-5,28	1,88
18	3	6	-5,94	0,85
19	3,2	6,4	-6,39	-0,37

Для построения графика выделим столбцы x и y таблицы и выберем тип диаграммы *Точечная* со сглаживающими линиями

Результат построения по данным, представленным в таблице, приведен на рис. 3.6.

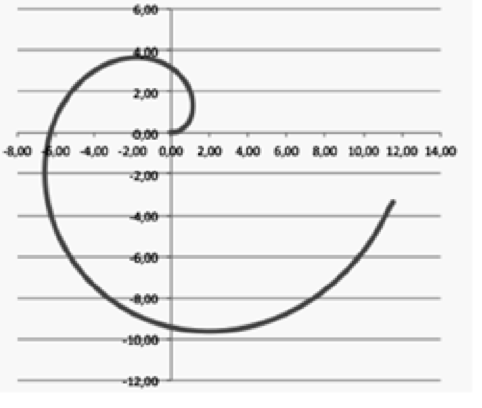


Рис. 3.6. График спирали Архимеда

Улитка Паскаля (кардиоида)

Уравнение кардиоиды в полярных координатах имеет вид $r = a \times \cos(\phi) + b$.

Фрагмент таблицы представлен на рисунке. Ссылки на значения a и b в формулах должны быть абсолютными.

	A	B	C	D	E
1		a	2	b	3
2	φ	ρ = a *φ+b	x=ρ *cos(φ)	y=ρ *sin(φ)	
3	0	3	3,00	0,00	
4	0,2	3,4	3,33	0,68	
5	0,4	3,8	3,50	1,48	
6	0,6	4,2	3,47	2,37	
7	0,8	4,6	3,20	3,30	
8	1	5	2,70	4,21	
9	1,2	5,4	1,96	5,03	
10	1,4	5,8	0,99	5,72	
11	1,6	6,2	-0,18	6,20	
12	1,8	6,6	-1,50	6,43	
13	2	7	-2,91	6,37	
14	2,2	7,4	-4,35	5,98	
15	2,4	7,8	-5,75	5,27	
16	2,6	8,2	-7,03	4,23	
17	2,8	8,6	-8,10	2,88	
18	3	9	-8,91	1,27	
19	3,2	9,4	-9,38	-0,55	

График представлен на рис. 3.7.

Рис. 3.7. График улитки Паскаля

3.4. Построение плоскости

В пространстве плоскость можно задавать разными способами (одной точкой и вектором, двумя точками и вектором, тремя точками и др.). С учетом этого уравнение плоскости может иметь различные виды. Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три её точки, не лежащие на одной прямой, например, точки пересечения плоскости с осями координат.

Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где коэффициенты A,B,C одновременно не равны нулю.

Коэффициенты A, B и C в общем уравнении плоскости представляют собой координаты нормального вектора плоскости.

Уравнение плоскости в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве – это уравнение с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты любой точки заданной плоскости и не удовлетворяют координаты точек, лежащих вне данной плоскости.

Если все коэффициенты A, B, C и D в общем уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ отличны от нуля, то оно называется полным. Плоскость пересекает все три координатные оси. В противном случае, общее уравнение плоскости называется неполным.

Неполными уравнениями задаются плоскости, параллельные координатным осям, проходящие через координатные оси, параллельные координатным плоскостям, перпендикулярные координатным плоскостям, совпадающие с координатными плоскостями, а также плоскости, проходящие через начало координат.

Уравнение плоскости вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a, b и c – отличные от нуля действительные числа, называется уравнением плоскости в отрезках.

Абсолютные величины чисел a, b и c равны длинам отрезков, которые отсекает плоскость на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно, считая от начала координат. Знак чисел a, b и c показывает, в каком направлении (положительном или отрицательном) следует откладывать отрезки на координатных осях.

Общее уравнение плоскости вида $Ax+By+Cz+D=0$ называют нормальным уравнением плоскости, если длина вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ равна единице, то есть, $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=1$, и $D\le 0$.

Уравнение плоскости в нормальном виде позволяет находить расстояние от точки до плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку, перпендикулярно вектору нормали. Чтобы составить уравнение плоскости, зная координаты точки плоскости $M(x_0, y_0, z_0)$ и вектора нормали плоскости $n = \{A; B; C\}$ можно использовать следующую формулу.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Если заданы координаты трех точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, лежащих на плоскости, то уравнение плоскости можно найти по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Использование Excel для построения плоскости

Общие рекомендации.

Для построения диаграммы используется три оси: горизонтальная ось (категорий), вертикальная ось (значений), ось Z (рядов значений).

Таблица заполняется следующим образом.

1. В первый столбец вводятся значения x в заданном диапазоне с заданным шагом.

2. В первую строку вводятся значения y в заданном диапазоне с заданным шагом.

3. Остальные свободные ячейки, начиная со второй строки и второго столбца вводятся значения $z=-(Ax+By+D)/C$. Важно! При вводе формулы необходимо указывать абсолютные значения для столбца A и строки 1. Например, в ячейке B2 должна быть формула следующего вида:
=-((A/C)*$A2+(B/C)*B$1+(D/C)).

4. В качестве диаграммы выбирается: тип диаграммы — Поверхность, и вид — Проволочная (прозрачная) поверхность.

5. При задании данных в качестве данных для таблицы выбираются все значения z. В качестве данных для оси Ox выбираются элементы первого столбца.

6. Заполнение данных для оси Oy осуществляется по рядам: для каждого значения x выделяется соответствующая строка значений z в заполненной таблицы. Вид «проволока» предполагает, что на диаграмме будут отображаться прямые, соответствующие каждому заданному значению x. Возможно и построение диаграммы для каждого значения y.

Рассмотрим построение плоскости в Excel на примере уравнения $4x+8y-4z+8=0$. Пусть необходимо построить часть плоскости, лежащей в I квадранте ($x\in[0;6]$ с шагом $\Delta=1$, $y\in[0;6]$ с шагом $\Delta=0,5$).

Необходимо разрешить уравнение относительно переменной z. Для рассматриваемого примера $z=x+2y+2$.

Заполняем таблицу следующим образом.

1. В первый столбец (столбец A), начиная с ячейки A2, вводим значения x в заданном диапазоне ($x\in[0;6]$) и с заданным шагом ($\Delta=1$).

2. В первую строку, начиная с ячейки B1 вводим значения y в заданном диапазоне и с заданным шагом ($y\in[0;6]$, $\Delta=0,5$).

3. Во вторую строку, начиная с ячейки B2, вводим выражение для $z=x+2y+2$ для заданного x и соответствующих значений y. Важно: при вводе формул необходимо указывать абсолютные значения для столбца A и строки 1 (то есть в ячейке B2 должна быть формула следующего вида: =$A2+2*B$1+2).Копируем формулу на все значения x (в диапазоне B2:N2)

4. Выделяем вторую строку (B2:N2) и копируем формулы до 8 строки (B2:N8)

В результате имеем таблицу следующего вида

B2 | =$A2+2*B$1+2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
2	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9														

Селектор находится в ячейке B2.

5. Не выделяя ячеек, запускаем *Мастер диаграмм*. В появившемся диалоговом окне *Мастер диаграмм* выбираем: тип диаграммы — Поверхность, и вид — Проволочная (прозрачная) поверхность (правую верхнюю диаграмму в правом окне). После чего нажимаем кнопку Далее в диалоговом окне.

6. В диалоговом окне *Мастер диаграмм* (шаг 2 из 4)выбираем: источник данных диаграммы вкладка Диапазон данных и в поле Диапазон данных мышью указать интервал данных B2:N8.

7. Указываем в строках или столбцах расположены ряды данных. Это определит ориентацию осей *x* и *y*. Переключатель Ряды в с помощью указателя мыши установим в положение столбцах.

8. Выбираем вкладку Ряд и в поле Подписи оси X указываем диапазон подписей оси x — A2:A8.

9. Далее вводим значения подписей оси y. Для этого в рабочем поле Ряд указываем первую запись Ряд у и вводим значения переменных из столбца B (B2:B8). Затем в поле Ряд указываем вторую запись Ряд 2 и вводим значения переменных из столбца C (C2:C8). Повторяем таким образом до последней записи — Ряд 12 в который вводятся данные из последнего столбца N (N2:N8).

10. В третьем окне Мастера диаграмм при необходимости ввести заголовок диаграммы и названия осей.

График плоскости будет иметь вид, представленный на рис. 3.8.

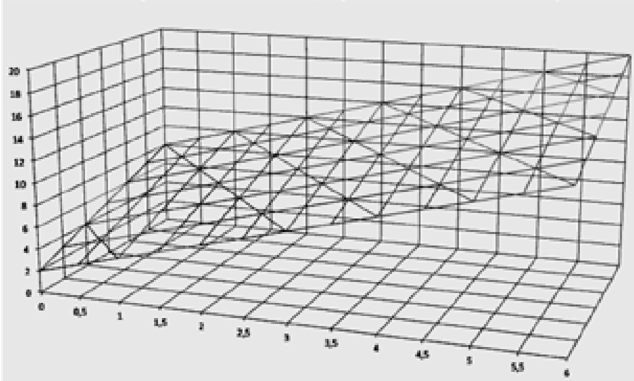


Рис. 3.8. График плоскости

3.5. Построение поверхностей второго порядка в пространстве

Общее уравнение поверхностей второго порядка имеет вид уравнения второй степени:

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0.$

Причем коэффициенты a, b, c, d, e, f не могут быть равны нулю одновременно.

Частными случаями уравнения являются основные поверхности второго порядка: эллипсоид, гиперболоид, параболоид и конус.

Эллипсоид — поверхность в трёхмерном пространстве, полученная деформацией сферы вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей. Каноническое уравнение эллипсоида в декартовых координатах, совпадающих с осями деформации эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a,b,c — произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $a \geq b \geq c$.

Величины a, b, c называют полуосями эллипсоида.

Если $a \neq b, b \neq c, c \neq a$, то эллипсоид называется трехосным.

Эллипсоид, у которого две полуоси равны, называется эллипсоидом вращения (или сфероидом).

Если все полуоси эллипсоида равны ($a=b=c=R$), то он представляет собой сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$ радиуса R, которую можно получить, например, вращая окружность такого же радиуса вокруг любого диаметра.

Гиперболоид - это вид поверхности второго порядка в трёхмерном пространстве, задаваемый в декартовых координатах уравнениями:

– однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где a и b действительные полуоси, а c – мнимая полуось;

– двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где a и b мнимые полуоси, а c – действительная полуось.

Если $a = b$, то такая поверхность называется гиперболоидом вращения. Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двуполостный — вокруг действительной.

Параболоид – это незамкнутая нецентральная (то есть не имеющая центра симметрии) поверхность второго порядка.

Канонические уравнения параболоида в декартовых координатах:

$z = tx^2 + uy^2$, где t и u – действительные числа, не равные нулю одновременно.

При этом, если:

- t и u одного знака, то параболоид называется эллиптическим;
- $t = u$, то поверхность принято называть параболоидом вращения;
- t и u разного знака, то параболоид называется гиперболическим;

- если один из коэффициентов равен нулю, то параболоид называется параболическим цилиндром.

Эллиптический параболоид — поверхность, задаваемая функцией вида: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Эллиптический параболоид можно описать как семейство параллельных парабол с ветвями, направленными вверх, вершины которых описывают параболу, с ветвями, также направленными вверх.

Если $a=b$, то эллиптический параболоид представляет собой поверхность вращения, образованную вращением параболы вокруг её оси симметрии.

Гиперболический параболоид — седловая поверхность, описываемая в прямоугольной системе координат уравнением вида: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Гиперболический параболоид может быть образован движением параболы, ветви которой направлены вниз, по параболе, ветви которой направлены вверх.

Конус – тело в евклидовом пространстве, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность. В месте пересечения образуется основание конуса. Основание конуса - это плоскость, образованная в результате пересечения плоской поверхности и всех лучей, исходящих из вершины конуса. У конуса могут быть такие основания, как круг, эллипс, гипербола и парабола.

Если основание конуса представляет собой многоугольник, такой конус является пирамидой.

Уравнение прямого кругового конуса в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Уравнение прямого эллиптического конуса в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

При вращении прямоугольного треугольника вокруг своего катета на 360^0 образуется прямой круговой конус.

Построения объемных графиков в декартовой системе координат

Объемный трехмерный график представляют собой графическое изображения функции двух переменных вида $z = f(x, y)$, где x и y — координаты точки на плоскости, а z — значение функции.

Построение функции с использованием Excel продемонстрируем на примере построения параболоида вращения $a^2 z = x^2 + y^2$

Порядок построения параболоида вращения рассмотрим для случая, когда $a=1$: $z = x^2 + y^2$.

1. Определяются интервалы изменения значений аргументов x и y и величину шага изменения аргументов.

Выберем для x и y интервал [–5; 5] с шагом 1.

2. Столбец А, начиная с ячейки А3, заполним значениями y в заданном диапазоне и с заданным шагом, ячейки А3:А13

3. Вторую строку, начиная с ячейки В2, заполним значениями x в заданном диапазоне и с заданным шагом, ячейки В2:L2.

4. В ячейку В3 введем формулу для параболоида вращения. При заполнении таблицы значениями z величины x всегда должны браться из первого столбца, а значения y – из второй строки. Следовательно в вводимых формулах при вводе значений x необходимо использовать абсолютную адресацию по номеру строки, а по номеру столбца — относительную адресацию. При вводе значений y необходимо использовать абсолютную адресацию по номеру столбца, а по номеру строки — относительную. Например: для ячейки В3 формула выглядит следующим образом: ==$A3*$A3+B$2*B$2.

5. Путем копирования заполняем формулами строку А3.

6. Выделяем ячейки В3:L3 и копируем формулы до 13 строки.

Получаем массив данных

B3 fx =$A3*$A3+B$2*B$2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
3	-5	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	50
4	-4	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	41
5	-3	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	34
6	-2	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	29
7	-1	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26
8	0	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
9	1	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26
10	2	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	29
11	3	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	34
12	4	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	41
13	5	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	50
14												

7. Для построения трехмерного графика выделяем весь диапазон ячеек (А1:L13) В *Мастере диаграмм* выбрать тип диаграммы – *Поверхность*, а вид – по умолчанию.

8. Построенный график имеет вид

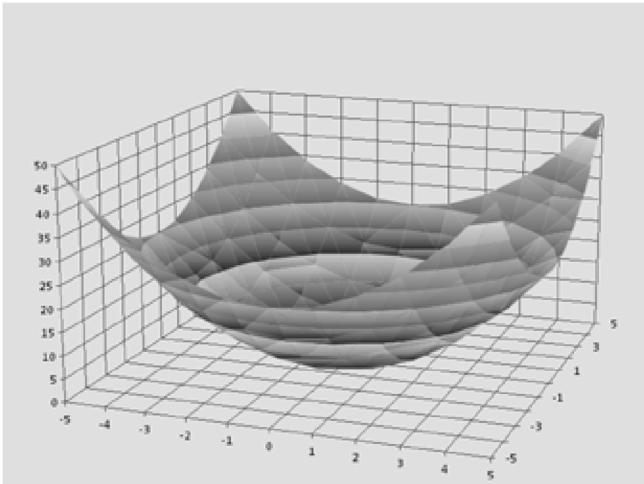


Рис. 3.9. График параболоида вращения

Рассмотрим построение эллипсоида на примере уравнения:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$$

Рассмотрим построение верхней части эллипсоида, лежащей в диапазонах: $x\in[-4;4], y\in[-3;3]$ с шагом 0,5 для обеих переменных. Решение уравнения относительно переменной z имеет вид $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}$

Заполненная таблица данных будет иметь вид

B2 =КОРЕНЬ(1-$A2*$A2/16-B$1*B$1/9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
2	-4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,000	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
3	-3,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,351	0,455	0,484	0,455	0,351	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
4	-3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,433	0,571	0,640	0,661	0,640	0,571	0,433	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
5	-2,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,406	0,599	0,706	0,763	0,781	0,763	0,706	0,599	0,406	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	-2	#ЧИСЛО!	0,236	0,553	0,707	0,799	0,850	0,866	0,850	0,799	0,707	0,553	0,236	#ЧИСЛО!
7	-1,5	#ЧИСЛО!	0,406	0,644	0,781	0,865	0,912	0,927	0,912	0,865	0,781	0,644	0,406	#ЧИСЛО!
8	-1	#ЧИСЛО!	0,493	0,702	0,829	0,909	0,954	0,968	0,954	0,909	0,829	0,702	0,493	#ЧИСЛО!
9	-0,5	#ЧИСЛО!	0,538	0,735	0,857	0,934	0,978	0,992	0,978	0,934	0,857	0,735	0,538	#ЧИСЛО!
10	0	0,000	0,553	0,745	0,866	0,943	0,986	1,000	0,986	0,943	0,866	0,745	0,553	0,000
11	0,5	#ЧИСЛО!	0,538	0,735	0,857	0,934	0,978	0,992	0,978	0,934	0,857	0,735	0,538	#ЧИСЛО!
12	1	#ЧИСЛО!	0,493	0,702	0,829	0,909	0,954	0,968	0,954	0,909	0,829	0,702	0,493	#ЧИСЛО!
13	1,5	#ЧИСЛО!	0,406	0,644	0,781	0,865	0,912	0,927	0,912	0,865	0,781	0,644	0,406	#ЧИСЛО!
14	2	#ЧИСЛО!	0,236	0,553	0,707	0,799	0,850	0,866	0,850	0,799	0,707	0,553	0,236	#ЧИСЛО!
15	2,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,406	0,599	0,706	0,763	0,781	0,763	0,706	0,599	0,406	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
16	3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,433	0,571	0,640	0,661	0,640	0,571	0,433	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
17	3,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,351	0,455	0,484	0,455	0,351	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
18	4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,000	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
19														

Особенности данной таблицы заключаются в наличии в некоторых ячейках значений #ЧИСЛО!. Это обусловлено тем, что выражение под корнем для указанных значений x и y становится отрицательным и выходит из области определения. При построении диаграммы будут учтены только значения из области определения. Выбирая тип диаграммы *Поверхность*, получим график требуемой функции.

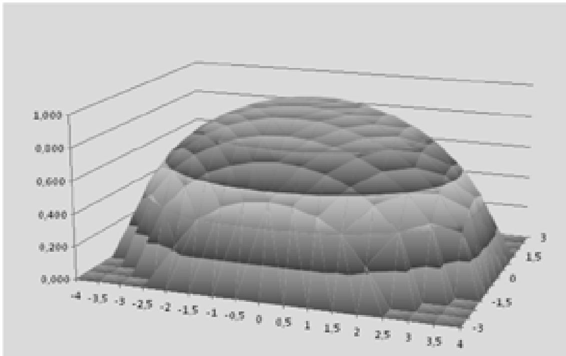


Рис. 3.10. График верхней части эллипсоида

Рассмотрим построение двуполостного гиперболоида вида

$$-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+z^2=1$$

Для построения верхней части гиперболоида выберем диапазоны $x\in[-4;4], y\in[-3;3]$ с шагом $0{,}5$ для обеих переменных.

Уравнение относительно переменной z имеет вид

$$z=\sqrt{1+\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}}$$

Таблица значений будет иметь вид (с отображением трех знаков после запятой)

B2 fx =КОРЕНЬ(1+$A2*$A2/16+B$1*B$1/9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
2	-4	1,732	1,641	1,563	1,500	1,453	1,424	1,414	1,424	1,453	1,500	1,563	1,641	1,732
3	-3,5	1,663	1,568	1,487	1,420	1,370	1,339	1,329	1,339	1,370	1,420	1,487	1,568	1,663
4	-3	1,601	1,502	1,417	1,346	1,294	1,261	1,250	1,261	1,294	1,346	1,417	1,502	1,601
5	-2,5	1,546	1,444	1,355	1,281	1,225	1,191	1,179	1,191	1,225	1,281	1,355	1,444	1,546
6	-2	1,500	1,394	1,302	1,225	1,167	1,130	1,118	1,130	1,167	1,225	1,302	1,394	1,500
7	-1,5	1,463	1,355	1,259	1,179	1,119	1,081	1,068	1,081	1,119	1,179	1,259	1,355	1,463
8	-1	1,436	1,325	1,228	1,146	1,083	1,044	1,031	1,044	1,083	1,146	1,228	1,325	1,436
9	-0,5	1,420	1,308	1,208	1,125	1,061	1,021	1,008	1,021	1,061	1,125	1,208	1,308	1,420
10	0	1,414	1,302	1,202	1,118	1,054	1,014	1,000	1,014	1,054	1,118	1,202	1,302	1,414
11	0,5	1,420	1,308	1,208	1,125	1,061	1,021	1,008	1,021	1,061	1,125	1,208	1,308	1,420
12	1	1,436	1,325	1,228	1,146	1,083	1,044	1,031	1,044	1,083	1,146	1,228	1,325	1,436
13	1,5	1,463	1,355	1,259	1,179	1,119	1,081	1,068	1,081	1,119	1,179	1,259	1,355	1,463
14	2	1,500	1,394	1,302	1,225	1,167	1,130	1,118	1,130	1,167	1,225	1,302	1,394	1,500
15	2,5	1,546	1,444	1,355	1,281	1,225	1,191	1,179	1,191	1,225	1,281	1,355	1,444	1,546
16	3	1,601	1,502	1,417	1,346	1,294	1,261	1,250	1,261	1,294	1,346	1,417	1,502	1,601
17	3,5	1,663	1,568	1,487	1,420	1,370	1,339	1,329	1,339	1,370	1,420	1,487	1,568	1,663
18	4	1,732	1,641	1,563	1,500	1,453	1,424	1,414	1,424	1,453	1,500	1,563	1,641	1,732
19														

Выбирая тип диаграммы *Поверхность*, получим график требуемой функции (рис. 3.11).

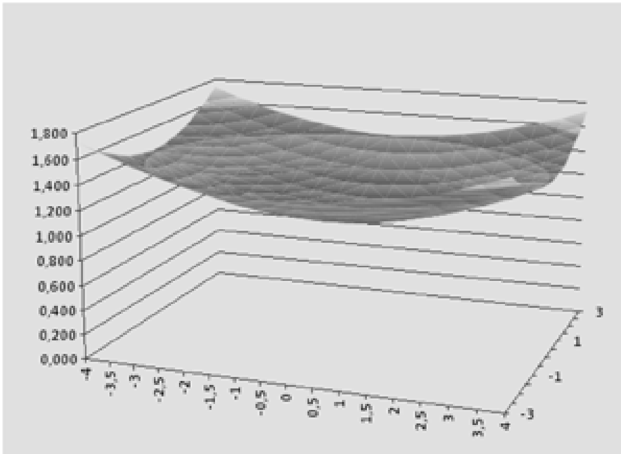


Рис. 3.11. График верхней части двуполостного гиперболоида

Рассмотрим построение конуса второго порядка, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{4}=0$$

Для построения конуса выберем диапазоны $x \in [-4;4], y \in [-3;3]$ с шагом 0,5 для обеих переменных.

Уравнение относительно переменной z имеет вид $z=-\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}}$. Знак минус перед корнем введен для того, чтобы вершина конуса была вверху

Таблица значений будет иметь вид (с отображением трех знаков после запятой):

B2 =-КОРЕНЬ($A2*$A2/4+B$1*B$1/3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	-4	-2,646	-2,466	-2,309	-2,179	-2,082	-2,021	-2,000	-2,021	-2,082	-2,179	-2,309	-2,466	-2,646
3	-3,5	-2,462	-2,268	-2,097	-1,953	-1,843	-1,774	-1,750	-1,774	-1,843	-1,953	-2,097	-2,268	-2,462
4	-3	-2,291	-2,082	-1,893	-1,732	-1,607	-1,528	-1,500	-1,528	-1,607	-1,732	-1,893	-2,082	-2,291
5	-2,5	-2,136	-1,909	-1,702	-1,521	-1,377	-1,283	-1,250	-1,283	-1,377	-1,521	-1,702	-1,909	-2,136
6	-2	-2,000	-1,756	-1,528	-1,323	-1,155	-1,041	-1,000	-1,041	-1,155	-1,323	-1,528	-1,756	-2,000
7	-1,5	-1,887	-1,627	-1,377	-1,146	-0,946	-0,804	-0,750	-0,804	-0,946	-1,146	-1,377	-1,627	-1,887
8	-1	-1,803	-1,528	-1,258	-1,000	-0,764	-0,577	-0,500	-0,577	-0,764	-1,000	-1,258	-1,528	-1,803
9	-0,5	-1,750	-1,465	-1,181	-0,901	-0,629	-0,382	-0,250	-0,382	-0,629	-0,901	-1,181	-1,465	-1,750
10	0	-1,732	-1,443	-1,155	-0,866	-0,577	-0,289	0,000	-0,289	-0,577	-0,866	-1,155	-1,443	-1,732
11	0,5	-1,750	-1,465	-1,181	-0,901	-0,629	-0,382	-0,250	-0,382	-0,629	-0,901	-1,181	-1,465	-1,750
12	1	-1,803	-1,528	-1,258	-1,000	-0,764	-0,577	-0,500	-0,577	-0,764	-1,000	-1,258	-1,528	-1,803
13	1,5	-1,887	-1,627	-1,377	-1,146	-0,946	-0,804	-0,750	-0,804	-0,946	-1,146	-1,377	-1,627	-1,887
14	2	-2,000	-1,756	-1,528	-1,323	-1,155	-1,041	-1,000	-1,041	-1,155	-1,323	-1,528	-1,756	-2,000
15	2,5	-2,136	-1,909	-1,702	-1,521	-1,377	-1,283	-1,250	-1,283	-1,377	-1,521	-1,702	-1,909	-2,136
16	3	-2,291	-2,082	-1,893	-1,732	-1,607	-1,528	-1,500	-1,528	-1,607	-1,732	-1,893	-2,082	-2,291
17	3,5	-2,462	-2,268	-2,097	-1,953	-1,843	-1,774	-1,750	-1,774	-1,843	-1,953	-2,097	-2,268	-2,462
18	4	-2,646	-2,466	-2,309	-2,179	-2,082	-2,021	-2,000	-2,021	-2,082	-2,179	-2,309	-2,466	-2,646
19														

Выбирая тип диаграммы Поверхность, получим график требуемой функции (рис. 3.12).

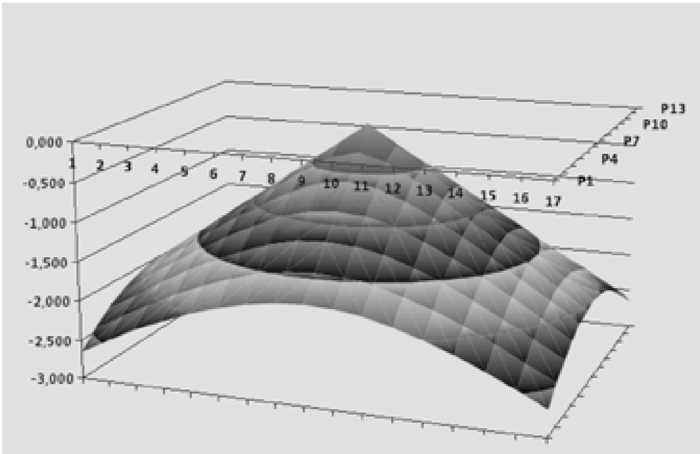


Рис. 3.12. График конуса второго порядка

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить в одной системе координат пары графиков

Функции $y = f(x)$ и $z = f(x)$	Диапазон и шаг изменения аргумента x
$y = 2x + 10$; $z = \sqrt{x} + 2$	$x \in [0..10]$, $\Delta x = 0{,}5$
$y = e^{-x}$; $z = e^{x}$	$x \in [0..2]$, $\Delta x = 0{,}05$
$y = \cos(3x)$; $z = \sin(3x)$	$x \in [0..2\pi]$, $\Delta x = \pi/8$
$y = e^{x/10}$; $z = e^{(x/10-1)}$	$x \in [10..20]$, $\Delta x = 0{,}1$
$y = \sqrt{10x}$; $z = 2\sqrt{5x}$	$x \in [10..20]$, $\Delta x = 0{,}1$
$y = 2x^2 - 3x + 1$; $z = x^2 - 2$	$x \in [0..10]$, $\Delta x = 0{,}1$
$y = \mathrm{tg}(x)$; $z = \mathrm{tg}(x/2)$	$x \in [0..\pi/4]$, $\Delta x = \pi/64$
$y = 1/\sqrt[3]{x}$; $y = 1/\sqrt[4]{x}$	$x \in [5..10]$, $\Delta x = 0{,}2$
$y = \log(x)$; $z = e^{-x/10}$	$x \in [1..6]$, $\Delta x = 0{,}2$
$y = \ln(x)$; $z = \log_{10}(x)$	$x \in [1..2]$, $\Delta x = 0{,}05$
$y = \lvert x \rvert$; $z = 2x + 4$	$x \in [-10..10]$, $\Delta x = 0{,}1$
$y = x^2 - 3x + 2$; $z = x^3 - x^2$	$x \in [-5..5]$, $\Delta x = 0{,}01$
$y = \dfrac{e^{-x^2}}{x+2}$; $z = \dfrac{x}{6}$	$x \in [0..3]$, $\Delta x = 0{,}005$
$y = \dfrac{1}{x-2}$; $z = -x - 2$	$x \in [-10..0]$, $\Delta x = 0{,}01$

2. Построить плоскость, параллельную плоскости *Oxy* и пересекающую ось *Oz* в точке *M(0, 0, 2)*. Диапазоны изменения переменных *x* и *y*: $x \in [0;6]$ с шагом $\Delta = 0{,}5$, $y \in [-1;3]$ с шагом $\Delta = 1$.

3. Построить плоскость, отсекающую на координатных осях отрезки $a=3$, $b=2$ и $c=1$. Диапазоны изменения переменных *x* и *y*: $x \in [-1;4]$ с шагом $\Delta = 0{,}5$, $y \in [-1;3]$ с шагом $\Delta = 1$.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Интерес к задаче поиска корней нелинейного уравнения с одним неизвестным появился много веков назад, однако не теряет свою актуальность и на сегодняшний день. В подавляющем большинстве случаев реализовать вычисление выражения в виде конечной формулы оказывается невозможным. Согласно теореме Абеля, даже для простейшего алгебраического уравнения пятой и более степеней нельзя найти точного решения. В таких случаях прибегают к тем или иным методам приближенного вычисления. Решение таких уравнений имеет широкое практическое применение в разделах физики, в частности, физических экспериментах, а также различных областях химии, биологии и других вопросах науки.

Любое уравнение с одним неизвестным можно записать в каноническом виде: $f(x)$=0, где $f(x)$ некоторая функция переменной x. В зависимости от того, какие функции входят в уравнение, разделяют два больших класса уравнений - алгебраические и трансцендентные. Функция называется алгебраической, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень. К трансцендентным функциям относятся показательная, логарифмическая, тригонометрические прямые и обратные и т.п.

Корнем или решением данного уравнения является такое число x^*, при подстановке которого (x=x^*) в уравнение последнее обращается в тождество $f(x^*)$=0. Число x^* называют также нулём функции y=$f(x)$. В общем случае уравнение может иметь один или несколько корней, как действительных, так и комплексных.

Найти точные значения корней можно лишь в исключительных случаях. Как правило, используются методы приближенного вычисления корней с заданной степенью точности. Это означает, что если установлено, что искомый корень лежит внутри интервала $[a,b]$, где a – левая граница, а b – правая граница интервала, и длина интервала $(b\text{-}a) \leq \varepsilon$, то за приближенное значение корня можно принять любое число, находящееся внутри этого интервала.

Решение уравнения проводят численно в два этапа (речь идёт лишь о вещественных корнях уравнения). На первом этапе производится отделение корней – поиск интервалов, в которых содержится только по одному корню. Второй этап решения связан с уточнением корня в выбранном интервале (вычисление значения корня с требуемой точностью ε).

Рассмотрим эти этапы подробнее.

4.1. Отделение корней уравнения

Для отделения корня необходимо определить промежуток аргумента x, где содержится один и только один корень уравнения. Одна из точек этого промежутка принимается за начальное приближение корня.

Графические способы отделения корней

Отделение корней во многих случая можно произвести графически. Учитывая, что действительные корни уравнения $f(x)=0$ – это есть точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс $y=0$, нужно построить график функции $y=f(x)$ и на оси OX отметить отрезки, содержащие по одному корню. Но часто для упрощения построения графика функции $y=f(x)$ исходное уравнение заменяют равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$. Далее строятся графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, а затем по оси OX отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения двух графиков.

На практике данный способ реализуется следующим образом: например, требуется отделить корни уравнения $\cos(2x)+x–5=0$ графически на отрезке [–10;10], используя Excel.

1 способ

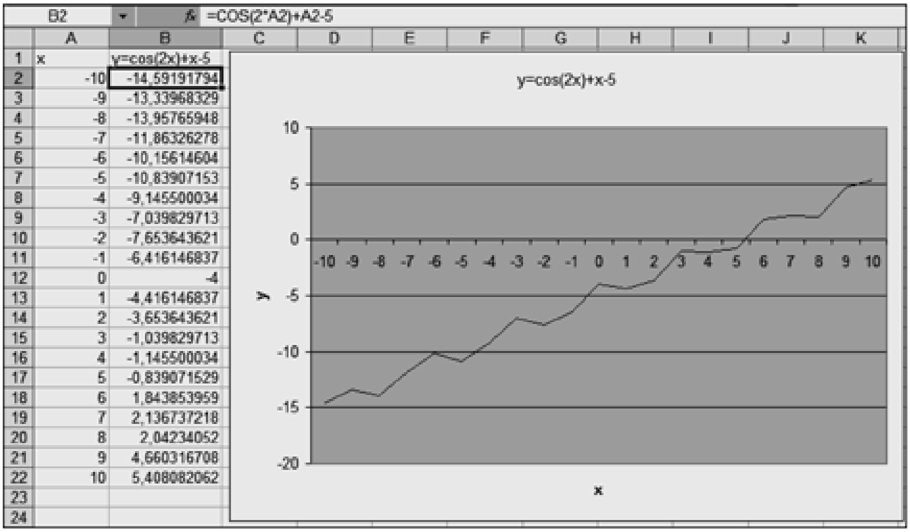
Построим график функции $f(\text{x})=\cos(2x)+\text{x}-5$ в декартовой системе координат.

Для этого нужно:

1. Ввести в ячейку A1 текст x.
2. Ввести в ячейку B1 текст $y=\cos(2x)+x–5$.
3. Ввести в ячейку A2 число -10, а в ячейку A3 число –9.
4. Выделить ячейки A2 и A3.
5. Навести указатель «мыши» на маркер заполнения в правом нижнем углу рамки, охватывающий выделенный диапазон. Нажать левую кнопку «мыши» и перетащить маркер так, чтобы рамка охватила диапазон ячеек A2:A22.
6. Ячейки автоматически заполняются числами:
7. Ввести в ячейку B2 формулу =COS(2*A2)+A2–5.
8. Методом протягивания заполнить диапазон ячеек B3:B22.
9. Вызвать "Мастер диаграмм" и выбрать диаграмму график (первый вид), нажать «далее».
10. Указать диапазон данных, для этого щёлкнуть кнопку в поле «Диапазон» и выбрать диапазон данных B2:B22.
11. Выбрать вкладку ряд, указать имя ряда, щёлкнув кнопку в поле «ряд» и выбрав B1.
12. В поле «подписи по оси X», щёлкнуть кнопку и выбрать диапазон A2:A22, нажать «далее».
13. Подписать названия осей x и y соответственно, нажать «далее».
14. Вывести диаграмму на том же листе, что и таблица, нажать кнопку «готово».

На рис. 4.1 представлен фрагмент листа книги Excel с решением рассматриваемой задачи.

Анализируя полученное изображение графика, можно сказать, что уравнение $\cos(2x)+x–5=0$ имеет один корень – это видно из пересечения графика функции $y=\cos(2x)+x–5$ с осью OX. Для уточнения значения корня может быть выбран отрезок [5;6], содержащий данный корень – отрезок локализации.



B2 =COS(2*A2)+A2-5

	A	B
1	x	y=cos(2x)+x-5
2	-10	-14,59191794
3	-9	-13,33968329
4	-8	-13,95765948
5	-7	-11,86326278
6	-6	-10,15614604
7	-5	-10,83907153
8	-4	-9,145500034
9	-3	-7,039829713
10	-2	-7,653643621
11	-1	-6,416146837
12	0	-4
13	1	-4,416146837
14	2	-3,653643621
15	3	-1,039829713
16	4	-1,145500034
17	5	-0,839071529
18	6	1,843853959
19	7	2,136737218
20	8	2,04234052
21	9	4,660316708
22	10	5,408082062
23		
24		

Рис. 4.1 – Локализация корня (способ 1)

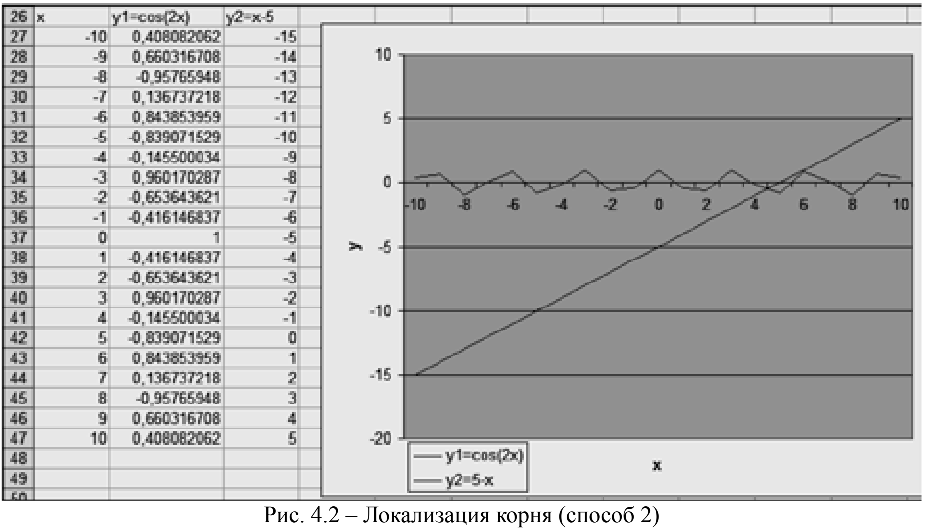
2 способ

Преобразуем уравнение cos(2*x*)+*x*–5=0 к виду: cos(2*x*)=5–*x*.

Каждую часть уравнения рассматриваем как отдельную функцию. Т. е. y_1=cos(2*x*) и y_2=5–*x*. Для решения этой задачи в Excel необходимо выполнить следующие действия:

1. Вести в ячейки A1:C1 соответственно текст: «*x*», «y_1=cos(2*x*)», «y_2=5–*x*».
2. Ячейки A2:A22 заполнить так же как при решении задачи первым способом.
3. В B2 ввести формулу =COS(2*A2).
4. Методом протягивания заполнить диапазон ячеек B3:B22.
5. В C2 ввести =5–A2.
6. Методом протягивания заполнить диапазон ячеек C3:C22.
7. С помощью Мастера диаграмм выбрать график (первый вид).
8. В данном случае диапазон данных следует указывать для построения двух графиков. Для этого нужно нажать кнопку в поле «Диапазон» и выделить ячейки B2:B22, затем нажать Ctrl (на клавиатуре) и выделить следующий диапазон C2:C22.
9. Перейти на вкладку «Ряд», где выбрать именем ряда 1 ячейку B1, а именем ряда 2 ячейку C2.
10. Подписать ось *x* , выбрав диапазон A2:A22.
11. Подписать соответственно оси *x* и *y*.
12. Поместить диаграмму на имеющемся листе.

Результат представлен на рис. 4.2. Анализируя полученный результат, можно сказать, что точка пересечения двух графиков попадает на тот же самый отрезок локализации [5;6], что и при решении задачи первым способом.



26	x	y1=cos(2x)	y2=x-5
27	-10	0,408082062	-15
28	-9	0,660316708	-14
29	-8	-0,95765948	-13
30	-7	0,136737218	-12
31	-6	0,843853959	-11
32	-5	-0,839071529	-10
33	-4	-0,145500034	-9
34	-3	0,960170287	-8
35	-2	-0,653643621	-7
36	-1	-0,416146837	-6
37	0	1	-5
38	1	-0,416146837	-4
39	2	-0,653643621	-3
40	3	0,960170287	-2
41	4	-0,145500034	-1
42	5	-0,839071529	0
43	6	0,843853959	1
44	7	0,136737218	2
45	8	-0,95765948	3
46	9	0,660316708	4
47	10	0,408082062	5
48			
49			
50			

Рис. 4.2 – Локализация корня (способ 2)

Аналитический способ отделения корней

Аналитический способ отделения корней основан на следующей теореме.

Теорема: Если непрерывная на интервале $[a;b]$ функция $f(x)$, определяющая уравнение $f(x)=0$, на концах отрезка $[a;b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\times f(b)<0$, , то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения. Если же функция $f(x)$ непрерывна, дифференцируема и ее производная сохраняет знак внутри отрезка $[a;b]$, то на этом отрезке находится только один корень уравнения.

В случае, когда на концах интервала функция имеет одинаковые знаки, на этом интервале корни либо отсутствуют, либо их чётное число.

Для отделения корней аналитическим способом выбирается отрезок $[a;b]$, на котором находятся все интересующие вычислителя корни уравнения. Причём на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ определена, непрерывна и $f(a)\times f(b)<0$. Требуется указать все частичные отрезки, содержащие по одному корню.

Будем вычислять значение функции $f(x)$, начиная с точки $x=a$, двигаясь вправо с некоторым шагом h. Если $f(x)*f(x+h)<0$, то на отрезке $[x; x+h]$ существует корень (рис. 4.3).

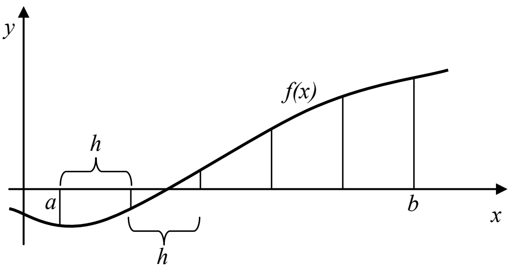


Рис. 4.3. Аналитический способ локализации корней

Если $f(x_k)=0$, x_k–точный корень**.**

В качестве примера рассмотрим функцию f(x)=cos(2x)+x–5.

1. Ввести в ячейки A1, B1 и C1 соответственно «x», «y=cos(2x)+x–5» и «ответ».
2. В A2 и A3 ввести граничные значения отрезка изоляции.
3. В B2 ввести формулу =COS(2*A2)+A2–5 и методом протягивания заполнить B3.
4. В C2 ввести формулу =ЕСЛИ(B2*B3<0;"корень существует";"корень не существует").

Таким образом, на отрезке изоляции корень существует:

	A	B	C
1	x	y=cos(2x)+x-5	Ответ
2	5	-0,839071529	корень существует
3	6	1,843853959	

Рис. 4.4. Проверка существования корня на отрезке

Для доказательства единственности корня на отрезке изоляции необходимо выполнить следующие действия:

1. Продолжить работу в том же документе Excel.
2. Заполнить D1 и E1 соответственно: «y'=-sin(2x)*2+1» и «ответ» (причем выражение y'=-sin(2x)*2+1 – это производная первого порядка от функции y=cos(2x)+x-5.
3. Ввести в D2 формулу = –SIN(2*A2)*2+1 и методом протягивания заполнить D3.
4. Ввести в E2 =ЕСЛИ(D2*D3>0;"корень на данном отрезке единственный";"Корень не единственный").

В результате получаем (рисунок 4.5):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y=cos(2x)+x-5	Ответ	y'=-sin(2x)*2+1	Ответ			
2	5	-0,839071529	корень существует	2,088042222	корень на данном отрезке единственный			
3	6	1,843853959		2,073145836				

Рис. 4.5. Доказательство единственности корня на отрезке

Существование и единственность корня на отрезке изоляции доказано.

Рассмотрим решение задачи отделения корней уравнения $\cos(2x)+x-5=0$ аналитическим способом с шагом 1 на отрезке [-10;10].

Для отделения корней уравнения аналитическим способом с помощью Excel необходимо выполнить следующее:

1. Заполнить ячейки A1:D1 соответственно: «x», «$y=\cos(2x)+x-5$», «h», «ответ».
2. В C2 ввести значение 1.
3. Ввести в A2 значение –10.
4. Ввести в A3 =A2+$C$2 и методом протягивания заполнить ячейки A4:A22.
5. В B2 ввести =COS(2*A2)+A2–5 и методом протягивания заполнить диапазон B3:B22.
6. В C3 ввести формулу =ЕСЛИ(B2*B3<0;"Корень на отрезке существует";ЕСЛИ(B3=0;"точный корень";"-")) и методом протягивания заполнить диапазон ячеек C4:C22.

В результате получаем следующее (рис. 4.6):

	A	B	C	D	E	F
1	x	y=cos(2x)+x-5	h	Ответ		
2	-10	-14,59191794	1			
3	-9	-13,33968329		-		
4	-8	-13,95765948		-		
5	-7	-11,86326278		-		
6	-6	-10,15614604		-		
7	-5	-10,83907153		-		
8	-4	-9,145500034		-		
9	-3	-7,039829713		-		
10	-2	-7,653643621		-		
11	-1	-6,416146837		-		
12	0	-4		-		
13	1	-4,416146837		-		
14	2	-3,653643621		-		
15	3	-1,039829713		-		
16	4	-1,145500034		-		
17	5	-0,839071529		-		
18	6	1,843853959		Корень на отрезке существует		
19	7	2,136737218		-		
20	8	2,04234052		-		
21	9	4,660316708		-		
22	10	5,408082062		-		

Рис.4.6. Отделение корней

Следующий пример (рис. 4.7) демонстрирует отделение нескольких корней. Пусть исследуется функция $\cos(x)=0,1x$ на интервале [–10;10] с шагом 1.

Табулирование функции и построение графика осуществляется как в предыдущих примерах. Видно, что на заданном отрезке имеем 7 корней, находящихся внутри отрезков: [-10;-9]; [-9;-8]; [-5;-4]; [-2;-1]; [1;2]; [5;6]; [7;8].

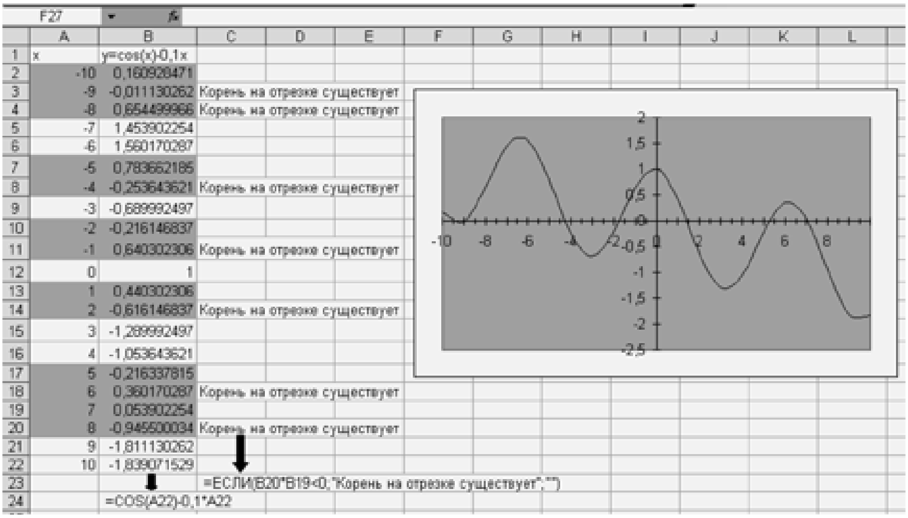


Рис. 4.7. Отделение нескольких корней

Обратим внимание на то, что надёжность рассмотренного алгоритма отделения корней уравнения зависит как от характера функции $f(x)$, так и от выбранной величины шага h. Для повышения надёжности следует выбирать при отделении корней достаточно малые значения h.

4.2. Уточнение корней уравнения

4.2.1. Уточнение корней методом половинного деления (дихотомии)

Метод половинного деления или метод дихотомии является самым простейшим из методов уточнения корней.

Пусть задано нелинейное уравнение $f(x)=0$. Необходимо найти решение этого уравнения на отрезке $[a,b]$, если известно, что на этом отрезке функция $f(x)$ непрерывна и уравнение имеет только один корень.

Для отыскания решения построим итерационный процесс сужения отрезка $[a,b]$, так, чтобы корень всегда был расположен внутри получаемого суженного отрезка. Для этого определяем середину отрезка $x_0 = \dfrac{b+a}{2}$ и находим значение функции в этой точке $f(x_0)$. После этого определяем, на каком из двух новых отрезков $[a;x_0]$ или $[x_0;b]$ расположено искомое решение. Для этого составляем произведения $f(a)\cdot f(x_0)$ и $f(b)\cdot f(x_0)$. Решение будет располагаться на том отрезке, на котором произведение будет отрицательно, т.е. значения функции на краях этого отрезка будут иметь разные знаки. Если же оба произведения будут равны нулю, то точка x_0 и будет точным решением уравнения.

Для определенности будем считать, что $f(a)\cdot f(x_0)<0$ (рис. 4.8). В этом случае решение лежит на отрезке $[a;x_0]$ и, следовательно, отрезок $[x_0;b]$ исключается из рассмотрения, т.е. значение правой границы переносится в центр отрезка $b=x_0$.

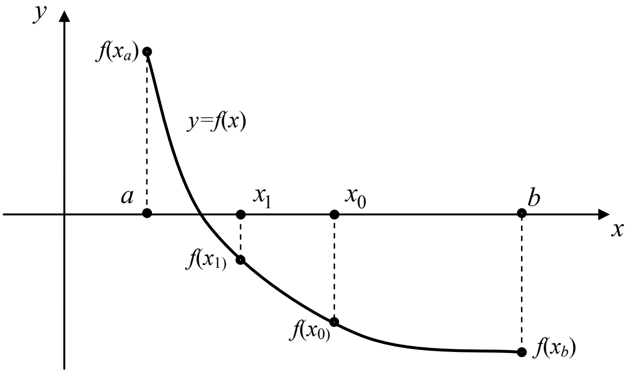


Рис. 4.8 – Иллюстрация метода деления отрезка пополам

Далее вновь отыскивается середина отрезка $x_1=\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{x_0+a}{2}$, определяется значение функции в полученной точке $f(x_1)$ и производится проверка на отрицательность произведений $f(a)\cdot f(x_1)$ и $f(b)\cdot f(x_1)$. Выбирается отрезок, на котором расположено решение$[a;x_1]$, $f(a)\cdot f(x_1)<0$, отрезок $[x_1;b]$ исключается из рассмотрения. Подобные действия производятся до тех пор, пока не будет выполнено условие точности вычисления корня.

Окончание итерационного процесса (выполнение условия точности) для данного метода будет заключаться в выполнении одного из следующих условий: условие близости границ рассматриваемого интервала – $|b-a|<2\varepsilon$; условие близости значений корня для двух последовательных приближений – $|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$; условие близости значения функции в точке x_k к нулю – $|f(x_k)|<\varepsilon$. Здесь ε - заданная точность.

Первые два условия для метода деления отрезка пополам равнозначны.

Рассмотрим применение метода деления отрезка пополам (метода дихотомии) на примере решения нелинейного уравнения cos(2x)+x–5=0.

Выполним операцию отделения корней уравнения (рис. 4.9).

Как видно, уравнение имеет корень, который находится на отрезке [5;5,5].

	A	B
1	x	cos(2x)+x-5
2	1	-4,4161468
3	1,5	-4,4899925
4	2	-3,6536436
5	2,5	-2,2163378
6	3	-1,0398297
7	3,5	-0,7460977
8	4	-1,1455
9	4,5	-1,4111303
10	5	-0,8390715
11	5,5	0,5044257
12	6,5	2,40744678
13	7,5	1,74031209
14	8,5	3,22483666
15	9,5	5,48870462
16	10,5	4,95227074

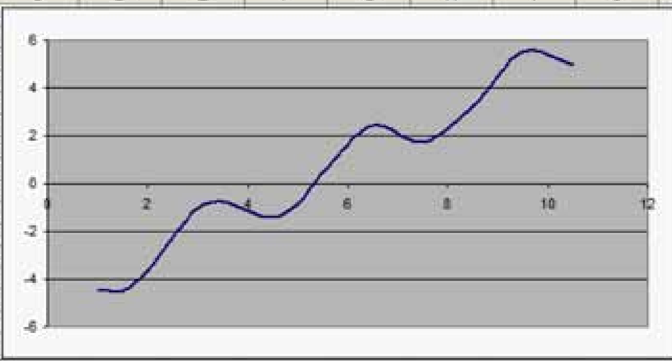


Рис. 4.9. Отделение корней уравнения cos(2*x*)+*x*–5=0

Уточним значение корня (рис. 4.10).

1. Заполнить ячейки A1:H1 последовательно следующим образом: *a*, *b*, *c*=(*a*+*b*)/2, *f*(*a*), *f*(*b*), *f*(*c*), |*b*-*a*|<=2, *ε*.

2. Ввести в ячейку A2 число 5, в ячейку B2 - число 6.

3. В ячейку B2 ввести формулу: =(A2+B2)/2.

4. В ячейку D2 ввести формулу: =cos(2*A2)+A2–5, скопировать эту формулу в ячейки E2:F2.

5. Ввести в ячейку G2 формулу: =ЕСЛИ(ABS(B2–A2)<=2*$H$2;C2;"-").

6. Ввести в ячейку H2 число 0,00001.

7. В ячейку A3 ввести формулу: =ЕСЛИ(D2*F2<0;A2;C2).

8. В ячейку B3 ввести формулу: =ЕСЛИ(D2*F2<0;C2;B2).

9. Диапазон ячеек C2:G2 скопировать в диапазон ячеек C3:G3.

10. Выделить диапазон ячеек A3:G3 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца G (это ячейки A3:G53).

В итоге получаем следующее (рис. 4.11):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	|b-a|<=2*ε	ε
2	5	6	5,5	-0,839072	1,843854	0,504426	-	0,0001
3	5,000000	5,500000	5,25	-0,839072	0,504426	-0,225537	-	
4	5,250000	5,500000	5,375	-0,225537	0,504426	0,131887	-	
5	5,250000	5,375000	5,3125	-0,225537	0,131887	-0,049651	-	
6	5,312500	5,375000	5,34375	-0,049651	0,131887	0,040526	-	
7	5,312500	5,343750	5,328125	-0,049651	0,040526	-0,004725	-	
8	5,328125	5,343750	5,3359375	-0,004725	0,040526	0,017862	-	
9	5,328125	5,335938	5,33203125	-0,004725	0,017862	0,006558	-	
10	5,328125	5,332031	5,330078125	-0,004725	0,006558	0,000914	-	
11	5,328125	5,330078	5,329101563	-0,004725	0,000914	-0,001906	-	
12	5,329102	5,330078	5,329589844	-0,001906	0,000914	-0,000496	-	
13	5,329590	5,330078	5,329833984	-0,000496	0,000914	0,000209	-	
14	5,329590	5,329834	5,329711914	-0,000496	0,000209	-0,000144	-	
15	5,329712	5,329834	5,329772949	-0,000144	0,000209	3,27E-05	5,329773	

Рис. 4.10. Решение нелинейного уравнения cos(2*x*)+*x*–5=0 методом дихотомии

Корень уравнения cos(2*x*)+*x*–5=0 равен 5,329773.

4.2.2. Уточнение корней методом хорд

В отличие от метода дихотомии, обращающего внимание лишь на знаки значений функции, но не на сами значения, метод хорд использует пропорциональное деление интервала (рис. 4.11).

Нелинейная функция $f(x)$ на отделенном интервале $[a,b]$ заменяется линейной – уравнением хорды, т.е. прямой соединяющей граничные точки графика на отрезке. Условием применимости метода хорд является монотонность функции на отрезке, содержащем единственный корень.

Общий вид уравнения прямой $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Начальная и конечная точки интервала имеют координаты $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x\text{-}a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$. Данная прямая пересекает ось OX в точке $(x_0,0)$. То есть

$$\frac{x_0-a}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)} \Rightarrow x_0=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \quad (4.1)$$

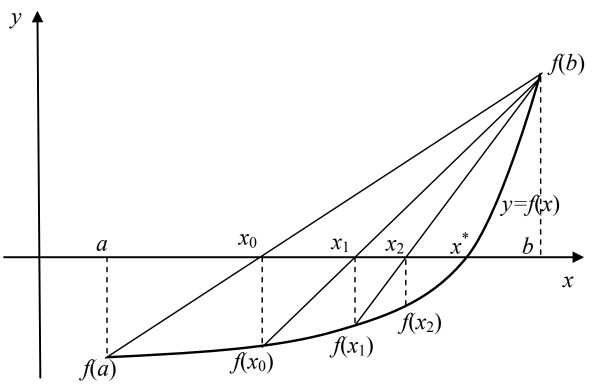


Рис. 4.11 – Иллюстрация метода хорд

Процесс уточнения корня уравнения $f(x)$ следующий. Определяется координата пересечения хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Рассчитывается координата пересечения хордой оси OX – x_0 по формуле (4.1). Определяется значение функции $f(x_0)$. Если $f(a)\cdot f(x_0)>0$, то координата x_0 принимается за начало отрезка, т.е. $a=:x_0$, в противном случае $b=:x_0$. По формуле (4.1) определяется координата точки x_1 и значение функции $f(x_1)$. Если $|x_0\text{-}x_1|<\varepsilon$, то процесс прекращается и принимается решение о том, что x_1 есть приближенное решение уравнения. Если условие не выполняется, то проверяется условие $f(a)\cdot f(x_1)>0$ и процесс повторяется до достижения требуемой точности.

Рассмотрим применение метода деления отрезка пополам (метода дихотомии) на примере решения нелинейного уравнения $\cos(2x)+x–5=0$.

Выполним операцию отделения корней уравнения (рис. 4.9). Уточним значение корня, который находится на отрезке [4;6].

1. Заполнить ячейки B1:I1 последовательно следующим образом: *a*, *b*, , *f*(*a*), *f*(*b*), *x*, *f*(*x*), abs($x_i – x_{i-1}$), проверка условия.

2. Ввести в ячейку B2 число 4, в ячейку C2 - число 6.

3. В ячейку B3 ввести формулу: =ЕСЛИ(G2*D2<0;B2;F2), скопировать эту формулу в ячейки B4:B10.

4. В ячейку C3 ввести формулу: =ЕСЛИ(G2*E2<0;C2;F2), скопировать эту формулу в ячейки C4:C10.

5. Ввести в ячейку D2 формулу: =COS(2*B2)+B2-5, скопировать ее в ячейки D3:D10.

6. Ввести в ячейку E2 формулу: =COS(2*C2)+C2-5, скопировать ее в ячейки E3:E10.

7. В ячейку F2 ввести формулу: =B2-(C2-B2)*D2/(E2-D2), скопировать ее в ячейки F3:F10.

8. В ячейку G2 ввести формулу: =COS(2*F2)+F2-5, скопировать ее в ячейки G3:G10.

9. В ячейку H2 ввести формулу: =ABS(F2-F3), скопировать ее в ячейки H3:H10.

10. В ячейку I2 ввести формулу: =ЕСЛИ(H2<0,001;F3;"---"), скопировать ее в ячейки I3:I10.

10. Выделить диапазон ячеек A3:G3 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца G (это ячейки A3:G53).

В итоге получаем следующее (рис. 4.12):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	a	b	fa	fb	x	fx	abs(x_i-x_{i+1})	проверка условия
2	1	4	6	-1,1455	1,843854	4,766386	-1,227788	0,493097	---
3	2	4,7663863	6	-1,22779	1,843854	5,259483	-0,199285	0,072229	---
4	3	5,2594829	6	-0,19929	1,843854	5,331712	0,005636	0,001986	---
5	4	5,2594829	5,331712	-0,19929	0,005636	5,329726	-0,000104	0,000036	5,329762
6	5	5,3297257	5,331712	-0,0001	0,005636	5,329762	0,000000	0,000000	5,329762
7	6	5,3297616	5,331712	-4,6E-08	0,005636	5,329762	0,000000	0,000000	5,329762
8	7	5,3297616	5,331712	-2E-11	0,005636	5,329762	0,000000	0,000000	5,329762
9	8	5,3297616	5,331712	-8,9E-15	0,005636	5,329762	0,000000	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
10	9	5,3297616	5,329762	0	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!

Рис. 4.12. Решение нелинейного уравнения $\cos(2x)+x–5=0$ методом хорд

Результат решения уравнения (5,329762) отличается от результата, полученного методом дихотомии (5,329773) в пятом знаке после запятой.

4.2.3. Уточнение корней методом Ньютона (касательных)

В отличии от метода хорд на каждом шаге проводится касательная к предыдущей найденной точке $f(x)$. В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется или левая граница отрезка $[a,b]$, содержащего корень, т.е $x_0 = a$ (если $f(a) \cdot f''(x) > 0$), или правая его граница: $x_0 = b$ (если $f(b) \cdot f''(x) > 0$). Здесь $f''(x)$ – вторая производная функции $f(x)$.

В одной из точек интервала изоляции корня $[a,b]$, например x_0, проведем касательную (рис. 4.13). Уравнение прямой $y=kx+m$. Так как данная прямая является касательной проходит через точку $(x_0,f(x_0))$, то $k=f'(x_0)$.

Отсюда следует:

$y=f'(x_0)x+m, f(x_0)=f'(x_0)x_0+m, m=f(x_0)-f'(x_0)x_0,$

$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0, y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$

Найдем точку пересечения новой касательной с осью OX:

$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)-f'(x_0)x_0=0,\quad x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Проводится новая касательная, рассчитывается следующее приближение x_2 и т.д. Расчет нового приближения на следующем шаге $i+1$ производится по формуле:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{4.2}$$

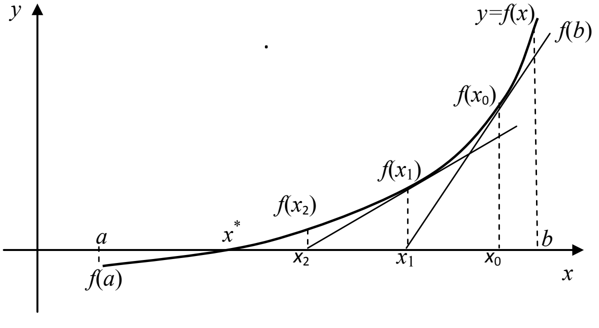


Рис. 4.13. Иллюстрация метода Ньютона (касательных)

Если $|f(x_i)|<\varepsilon$, то точность достигнута, и $x^*=x_i$ – решение; иначе необходимо провести касательную через новую точку c и так продолжать до тех пор, пока $|f(x)|<\varepsilon$.

Рассмотрим применение метода касательных на примере решения нелинейного уравнения $\cos(2x)+x-5=0$.

Выполним операцию отделения корней уравнения (рис. 4.9).

Уточним значение корня, который находится на отрезке [5;5,5]..

1. Заполнить ячейки B1:G1 последовательно следующим образом: x, b, , $f(x)$, $f'(x)$, x, $|f(x)|$, $|f(x)|<\varepsilon$, ε.

2. Ввести в ячейку B2 число 5,5, а в ячейку B2 ввести формулу: =B2-C2/D2.

3. В ячейку C2 ввести формулу: =COS(2*B2)+B2-5.

4. В ячейку D2 ввести формулу: =-2*COS(2*B2)+1 ($f'(x)=-2\sin(2x)+1$ – первая производная функции $\cos(2x)+x-5$).

5. Ввести в ячейку E2 формулу: =ABS(C2).

6. Ввести в ячейку F2 формулу: =ЕСЛИ(E2>$G$2;"-";"корень= "&B2).

7. В ячейку G2 ввести значение требуемой точности вычисления.

8. В ячейку G2 ввести формулу: =COS(2*F2)+F2-5, скопировать ее в ячейки G3:G10.

9. Скопировать формулу из ячейки B3 в ячейки B4:B11 (или дальше).

10. Выделить блок ячеек C2:F2 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца F (для выбранной точности 0,01 это ячейка F10).

В итоге получаем следующее (рис. 4.14):

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x	f(x)	f '(x)	|f(x)|	|f(x)|<ε	ε
2	0	5,5000000	0,504426	0,991149	0,504426	-	0,01
3	1	4,9910696	-0,85758	2,697308	0,857584	-	
4	2	5,3090104	-0,05964	1,737295	0,059637	-	
5	3	5,3433379	0,039328	1,608019	0,039328	-	
6	4	5,3188802	-0,03135	1,700455	0,031347	-	
7	5	5,3373148	0,021852	1,630926	0,021852	-	
8	6	5,3239165	-0,01686	1,68155	0,016859	-	
9	7	5,3339422	0,012085	1,643714	0,012085	-	
10	8	5,3265897	-0,00915	1,671488	0,009154	корень= 5,32658966279014	
11	9	5,3320664	0,00666	1,650813	0,00666	корень= 5,33206641907865	

Рис. 4.14. Решение нелинейного уравнения cos(2x)+x–5=0 методом касательных

Уточненное значение корня при заданной точности 0,01 равно 5,33.

Уточнение корня может быть осуществлено **методом касательных с использованием циклических ссылок**. Для нахождения корня будем использовать формулу (4.2).

В Excel 2003 в меню Сервис/Параметры/вкладка_Вычисления поставить флажок итерации и флажок выбора вида вычислений: автоматически (в Excel 2010 зайти в меню Файл/Параметры/Формулы и поставить флажок в поле «Включить итеративные вычисления»). Установить заданную погрешность предельное число итераций.

Для уточнения корня заполнить таблицу (рис. 4.15).

1. В ячейку A2 ввести 0.
2. В ячейку B2 ввести формулу =ЕСЛИ(B2=0;A2;B2–(COS(2*B2)+B2–5)/(1–2*SIN(2*B2))). Соответствует формуле (4.2) применительно к решаемой задаче.
3. В ячейку для контроля ввести формулу =COS(2*B2)+B2-5.
4. Результат представлен на рис. 4.18, а).
5. В ячейку A1 ввести значение начального приближения 5.
6. Выбрать ячейку B2, дважды щелкнуть на ней мышью и нажать клавишу Enter.

Результат представлен на рис. 4.15, *b*).

	A	B	C
1	x_0	$x_{тек}$	$f(x_{тек})$
2	0	0	-4

a)

	A	B	C
1	x_0	$x_{тек}$	$f(x_{тек})$
2	5	5,329762	1,69E-14

b)

Рис. 4.15. Решение нелинейного уравнения $\cos(2x)+x-5=0$ методом касательных с использованием циклических ссылок

Уточненное значение корня при заданной точности 0,001 равно 5,329762. Значение рассматриваемой функции при этом равно $1{,}69\cdot10^{-14}$, т.е. практически нулю.

Если вычисление производной связано с серьезными трудностями (например, если функция задана не аналитическим выражением, а вычисляющей ее значения программой) используется модифицированный метод Ньютона, получивший название – **метод секущих**. Здесь производная приближенно вычисляется по значениям функции в двух последовательных точках, то есть используется формула

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)(x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}. \qquad (4.3)$$

В методе секущих необходимо задаться не одной, а двумя начальными точками – x_0 и x_1. Точка x_1 обычно задается сдвигом x_0 к другой границе отрезка на малую величину, например, на 0,01.

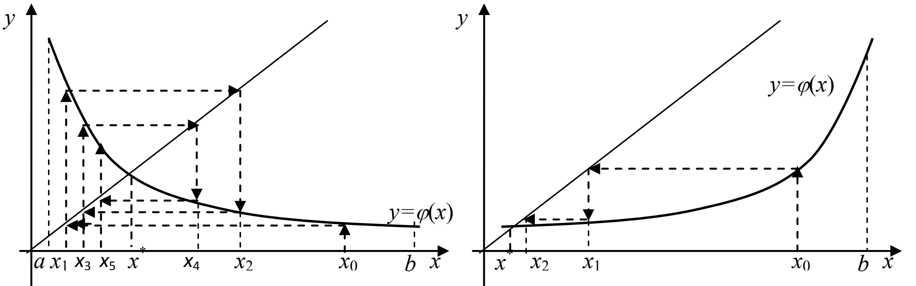
4.2.4. Уточнение корней методом простой итерации

Исходное нелинейное уравнение $f(x)=0$ необходимо привести к виду $x=\varphi(x)$. В качестве $\varphi(x)$ можно принять функцию $\varphi(x)=x-f(x)/M$, где M - неизвестная постоянная величина, которая определяется из условия сходимости метода простой итерации $0<|\varphi'(x)|<1$. При этом для определения M условие сходимости записывается в следующем виде: $|1-f'(x_0)/M|<1$ или $M=1{,}01\cdot f'(x_0)$. Если известно начальное приближение корня $x=x_0$, подставляя это значение в правую часть уравнения $x=\varphi(x)$, получаем новое приближение $x_1=\varphi(x_0)$.

Далее подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение $x=\varphi(x)$, получаем последовательность значений: $x_2=\varphi(x_1)$, $x_3=\varphi(x_2)$,…, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=1,2,...,n$. Или в общем случае имеем итерационную формулу

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\text{, где } \varphi(x_k)=x-\frac{f(x_k)}{1{,}01f'(x_0)} \qquad (4.4)$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$. Геометрическая интерпретация метода простой итерации приведена на рис. 4.16. Здесь построены графиуи функций $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Корнем x^* уравнения $x=\varphi(x)$ является абсцисса пересечения кривой $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$. Взяв в качестве начальной точки x_0 , строим ломаную линию. Абсциссы вершин этой ломаной представляют собой последовательные приближения корня x^* . Из рисунка видно, что если $-1 < \varphi'(x) < 0$ на отрезке $[a;\ b]$ (рис. 4.16, *a*), то последовательные приближения $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, колеблются около корня. Если же производная $0 < \varphi'(x) < 1$ (рис. 4.16, *b*), то последовательные приближения сходятся монотонно.



a) *b*)

Рис. 4.16. Иллюстрация метода простой итерации

Уточним корень уравнения $\cos(2x)+x-5=0$. Заполнить таблицу (рис. 4.17).

1. В ячейку A2 ввести 0.
2. В ячейку B2 ввести формулу:

=ЕСЛИ(B2=0;A2;B2-(COS(2*B2)+B2-5)/(1,01*(1-2*SIN(2*B2)))). Соответствует формуле (4.4) применительно к решаемой задаче.

3. В ячейку для контроля ввести формулу: =COS(2*B2)+B2-5.
4. Результат представлен на рис. 4.17, *a*).
5. В ячейку A1 ввести значение начального приближения 5,5.
6. Выбрать ячейку B2, дважды щелкнуть на ней мышью и нажать клавишу Enter.

Результат представлен на рис. 4.17, *b*).

	A	B	C
1	x_0	$x_{тек}$	$f(x_{тек})$
2	0	0	-4

a)

	A	B	C
1	x_0	$x_{тек}$	$f(x_{тек})$
2	5	5,329762	1,69E-14

b)

Рис. 4.17. Решение нелинейного уравнения $\cos(2x)+x-5=0$ методом простых итераций

Как видно, результат не отличается от результата, полученного методом касательных с использованием циклических ссылок.

Сравнительный анализ рассмотренных методов позволяет сделать следующие выводы

Метод половинного деления очень прост и имеет одно явное преимущество по сравнению со всеми рассмотренными выше методами – он всегда сходится. Однако, скорость сходимости очень мала, поэтому его часто используют для грубого уточнения корня.

Метод Ньютона (метод касательных) эффективен для решения уравнений, график которых в окрестности корня имеет большую крутизну. Метод обладает высокой скоростью сходимости, но его сходимость зависит от вида функции, поэтому рекомендуется отрезок, на котором отделяется корень, выбирать очень небольшой длины.

Метод хорд, являясь модификацией метода касательных, также обладает хорошей скоростью сходимости. При правильном выборе неподвижной точки последовательность приближений гарантированно сходится к корню уравнения.

Метод простой итераций дает возможность «угадывать» новые значения на любом шаге. Следовательно, если процесс сходится медленно, можно вносить коррективы, учитывая предыдущие результаты. Метод прост и обладает хорошей сходимостью.

4.2.5. Решение уравнений методом подбора параметра

При подборе параметра Excel также использует итерационный (циклический) процесс. Количество итераций и точность (относительная погрешность) устанавливаются как и в предыдущих методах.

Уточнение корня уравнения сводится к следующим действиям.

1. Заданное уравнение преобразовать к виду $f(x)=0$. Левая часть уравнения и будет той функцией, нуль которой необходимо найти. Например, задано уравнение $f(x)=\cos(2x)+x–5$.
2. В выбранную ячейку рабочего листа, например, B2 (рис. 4.18) ввести формулу =COS(2*A2)+A2-5
3. В ячейку A2) ввести любое начальное приближение к корню из заданного отрезка (можно использовать значение левой или правой границы).
4. Щёлкнуть мышью по ячейке с формулой для вычисления значений функции (B2).
5. Щёлкнуть мышью по строке меню *Сервис*.
6. В раскрывшемся меню щёлкнуть по строке *Подбор параметра* (рис. 4.18).
7. В появившемся диалоговом окне Подбор параметра удалить адрес текущей ячейки в окне *Установить в ячейке*, если он не соответствует адресу ячейки с выражением для вычисления значений функции, и щёлкнуть мышью по ячейке с формулой (B2), в окно Значение: ввести 0 (нуль). Щелкнуть мышью в окне *Изменяя значение ячейки*, а затем щёлкнуть мышью по ячейке со значением *x* (A2).
8. Щёлкнуть мышкой по кнопке OK. Результат получен.

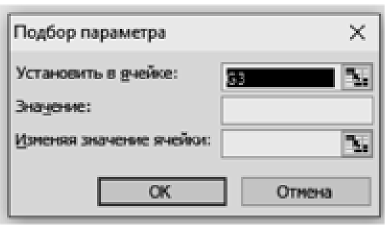


Рис. 4.18. Подбор параметра

	A	B
1	x	$f(x)$
2	5,329698	-0,00018

Рис. 4.19. Решение нелинейного уравнения $\cos(2x)+x–5=0$ методом подбора параметров

4.2.6. Решение уравнений с использованием надстройки *Поиск решения*

Решение уравнений с одним неизвестным в Excel может быть выполнено с использование надстройки *Поиск решения.*

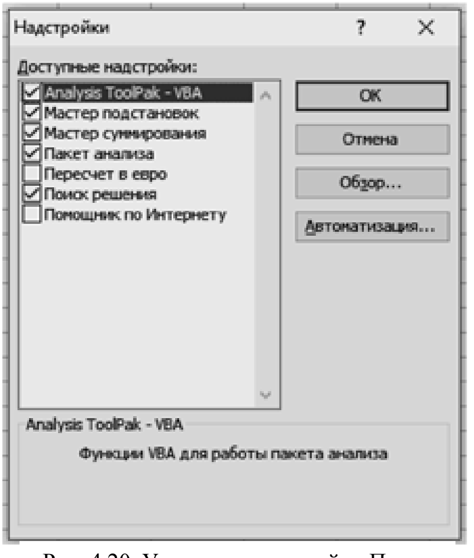


Рис. 4.20. Установка надстройки Поиск решения

Надстройка *Поиск решений* поставляется вместе с Excel, но по умолчанию отключена.

Чтобы включить его в Excel 2003, в меню *Сервис* выбрать *Надстройки*, в открывшемся окне (рис. 4.20) установить галочку напротив поля *Поиск решения* и нажать Ок.

Использование сервиса Поиск решения продемонстрируем на примере решения кубического уравнения $5x^3-2x^2+4x-5=0$.

Выполнив локализацию корней, можно убедиться, что уравнение имеет единственный действительный корень в интервале [0,8;0,85].

1. В ячейку A1 ввести произвольное число из диапазона локализации корня.

2. В ячейку B1 ввести формулу =5*A1^3-2*A1^2+4*A1-5.

3. В меню *Сервис* выбрать *Поиск решения*. Откроется соответствующее окно (рис. 4.21).

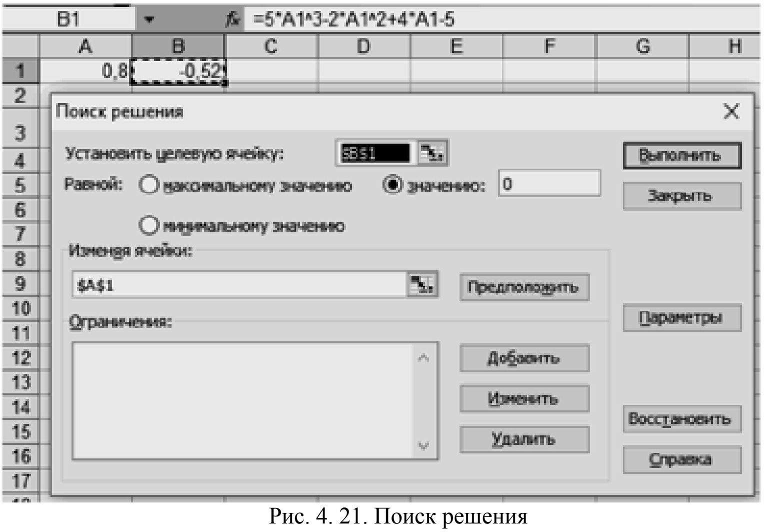


Рис. 4. 21. Поиск решения

4. Установить целевую B1 ячейку, равной значению 0, изменяя ячейки A1.

5. Нажать *Выполнить*.

В результате выполненных действий получим приближенное решение уравнения: x=0,847755 (рис. 4.22).

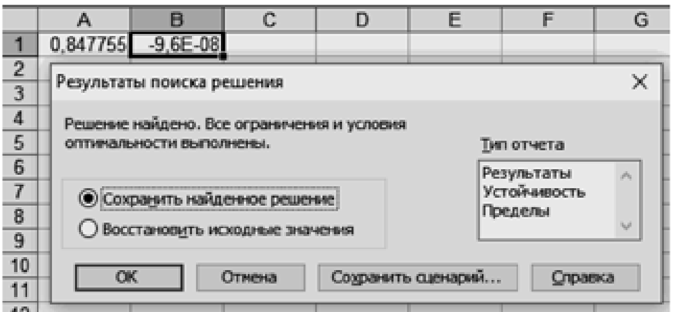


Рис. 4.22. Решение уравнения $5x^3$-$2x^2$+$4x$-5=0

Щелкнув на **ОК**, завершить решение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выполнить в Excel локализацию корней следующих уравнений:
$x^3 - 3x^2 + 9x - 8=0$;
$\mathrm{tg}(0{,}58x + 0{,}1)=x^2$;
$\sqrt{x} - \cos(0{,}387x)=0$;
$x + \lg x= 0{,}5$;

2. Уточнить значения корня методом дихотомии уравнения $\lg x - 7/(2x+6)=0$.

3. Уточнить значения корня методом хорд уравнения $x^3 +0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2=0$.

4. Уточнить значения корня методом касательных уравнения $x^2+4\sin x = 0$.

5. Уточнить значения корня методом простых итераций уравнения $x^3 + x - 5=0$.

6. Решить методом подбора параметра уравнение $\mathrm{tg}(0{,}3x + 0{,}4)=x^2$.

7. Определить корень уравнения $2\ln(x)+\sin(x) =e^{x}$ на интервале [0;2], применив сервис (надстройку) *Поиск решения*.

8. Определить количество шагов при решении уравнения $x^3 + x - 3=0$ до достижения точности по x каждым из следующих методов: дихотомии, хорд, касательных, простой итерации. Выполнить аналогичные расчеты до достижения точности 0.001 по y. Провести анализ полученных результатов.

9. Решить уравнение x^4–$2x^3$–$3x$+1 методами дихотомии, хорд, касательных, простой итерации, используя сервисы *Подбор параметров* и *Поиск решения* при заданных точностях решения по y. Сравнить результаты решения.

10. Самостоятельно реализовать в Ecxel алгоритм вычисление корня уравнения методом Стеффенсена, обладающего высокой скоростью сходимости:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n).$$

5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5.1.Векторы и матрицы

Совокупность *n* чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$, заданных в определенном порядке, называется *n*-мерным вектором. Числа a_i – компонентs или координатs вектора, *n* —размерностью вектора.

Два *n*-мерных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если все их соответствующие компоненты равны: $a_i = b_i, \ \forall i$.

Суммой двух *n*-мерных векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n)$ называется *n*-мерный вектор

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_i + b_i, ..., a_n + b_n)$.

Операция сложения векторов обладает свойствами коммутативности $(\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a})$ и ассоциативности $\left((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\right)$.

Вектор $\vec{e} = (0,0,0,..,0)$, все компоненты которого равны нулю, называется нуль-вектором. Нуль-вектор ведет себя при сложения векторов аналогично числу нуль в арифметике.

Вектор $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_i, ..., -a_n$ называется противоположным вектору $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a$. Очевидно, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{e}$

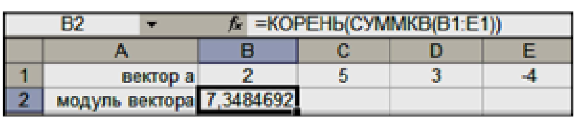
Операция вычитания векторов определяется как сложение с противоположным вектором $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Под произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ на число λ понимают вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_i, ..., \lambda a_n)$.

Умножение вектора на число обладает свойством ассоциативности $\lambda(m\vec{a}) = m\lambda\vec{a}$ и свойством дистрибутивности относительно векторного и числового сомножителей $(\lambda + m)\vec{a} = \lambda\vec{a} + m\vec{a}, \ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Модуль (норма, длина) вектора $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$..

Пример вычисления модуля вектора $\vec{a} = (2, 5, 3, -4)$ приведен на рис. 5.1.



B2		fx =КОРЕНЬ(СУММКВ(B1:E1))			
	A	B	C	D	E
1	вектор а	2	5	3	-4
2	модуль вектора	7,3484692			

Рис. 5.1. Вычисление длины вектора

Здесь применены функция =*КОРЕНЬ*(*число*), где аргументом функции может быть либо конкретное число, либо адрес ячейки, в которой оно записано, и функция =*СУММКВ*(*число1*;*число2*;…), где аргументами функции являются адреса ячеек (адрес массива) с координатами вектора.

В общем случае скалярное произведение двух векторов $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$, где φ - угол между векторами. Скалярным произведение двух *n*-мерных векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_i,...,a_n)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_i,...,b_n)$ может быть определено как сумма произведений одноименных координат данных векторов:

$$\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle = a_1b_1+a_2b_2+...+a_ib_i+...+a_nb_n.$$

В Excel скалярное произведение векторов вычисляется с помощью функции =*СУММПРОИЗВ*(*массив1*;*массив2;…*), где *массив1*;*массив2;…*- от 2 до 30 массивов, чьи компонент нужно перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность (пример на рис. 5.2).

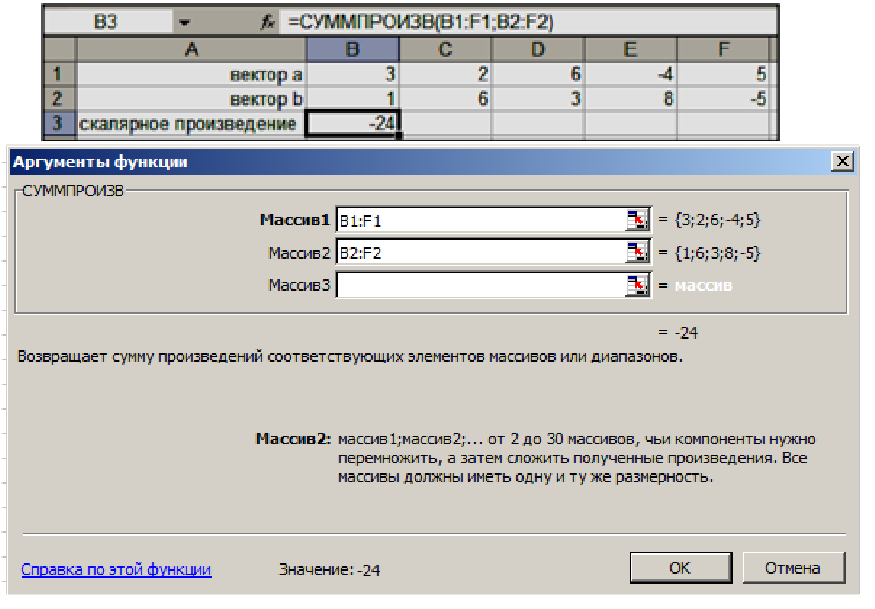


Рис. 5.2. Вычисление скалярного произведения векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение $\vec{a}$ от к $\vec{b}$ вокруг вектора с осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$ (рис. 5.3) Значение векторного произведения определяется следующим образом: $\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x$.

Треугольник, стороны которого есть стороны параллелограмма и его диагонали имеет площадь, равную половине величины векторного произведения двух векторов.

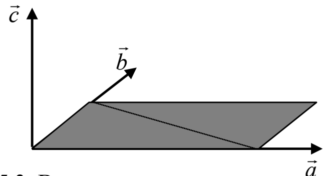


Рис. 5.3. Векторное произведение векторов

На рис. 5.4 приведен пример вычисления векторного произведения векторов, площади параллелограмма, треугольника. Проверка правильности вычисления векторного произведения заключается в проверке соответствия нулю величины скалярных произведений векторов $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ и $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

B6 fx =C2*D4-D2*C4

	A	B	C	D	E	F
1		a_x	a_y	a_z		
2	вектор a	3	5	1		
3		b_x	b_y	b_z		
4	вектор b	6	8	1		
5		c_x	c_y	c_z		
6	вектор произведения	-3	3	-6		
7	Площадь параллелограмма	54	⟵ СУММКВ(B6:D6)			
8	Проверка1 (скалярное умножение) ⟨ a,c ⟩	0	⟵ СУММПРОИЗВ(B2:D2;B6:D6)			
9	Проверка2 (скалярное умножение) ⟨ b,c ⟩	0	⟵ СУММПРОИЗВ(B4:D4;B6:D6)			
10	Площадь треугольника	27	⟵ B7/2			

Рис.5.4. Вычисление векторного произведения векторов

Перейдем к рассмотрению основных операций матричного исчисления.

Числа, расположенные в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, образуют матрицу размера m x n:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Две матрицы A и B одного и того же размера $m \times n$ являются равными, если равны все их соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица, состоящая из одного столбца (т.е. если $n = 1$) или из одной строки (т.е. если $m = 1$), называется вектором — столбцом или, соответственно, вектором — строкой.

Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Нулевая матрица обозначается

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

При n=m матрица называется квадратной, а число ее строк (столбцов) – порядком матрицы. Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее главную диагональ.

Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется единичной, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные — нулю:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

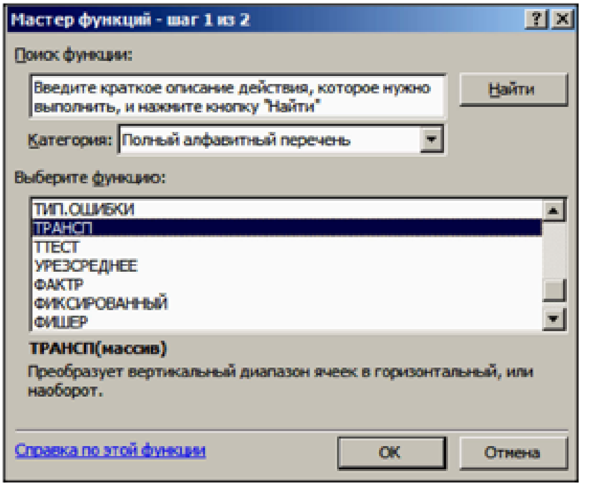
Если в матрице **A** заменить строки столбцами, сохранив их порядок, то получится новая матрица

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемая транспонированной по отношению к матрице А.

Если $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, то такая матрица называется симметричной.

В Excel для транспонирования матриц используется функция =*ТРАНСП*(*массив*) – рис. 5.5.



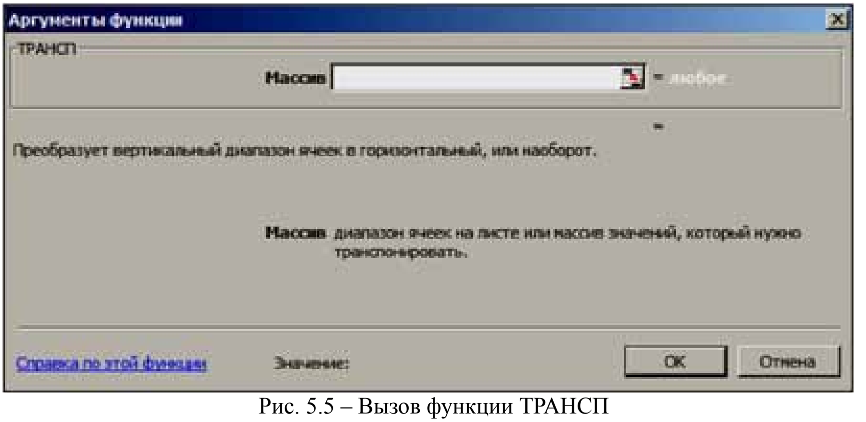


Рис. 5.5 – Вызов функции ТРАНСП

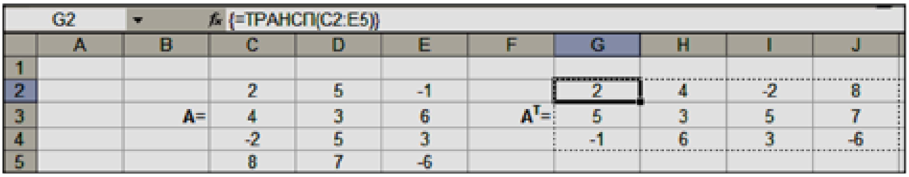
Пример. Имеем исходную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Из определения ясно, что транспонированной будет матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи в Excel представлено на рис. 5.6.



G2 | fx {=ТРАНСП(C2:E5)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			2	5	-1		2	4	-2	8
3		A=	4	3	6	AT=	5	3	5	7
4			-2	5	3		-1	6	3	-6
5			8	7	-6					

Рис. 5.6 – Транспонирование матрицы

Порядок решения следующий:

- определить место для транспонированной матриц (в рассматриваемом примере это G2:I4);

- в ячейку размещения первого элемента транспонированной матрицы ввести формулу =ТРАНС(C2:E5);

- выделить массив ячеек, в которых будут размещаться все элементы транспонированной матрицы;

- нажать F2;

- нажать Shit+Ctrl+Enter.

Суммой матриц $\mathbf{A}(a_{ij})$ и $\mathbf{B}(b_{ij})$ одинакового размера является матрица $\mathbf{C}(c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов суммируемых матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведение матрицы на число λ - то матрица, элементы которой получаются умножением всех элементов исходной матрицы на данное число: $\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Умножение матрицы на матрицу определяется только при условии, что число столбцов первого сомножителя **A** равно числу строк второго сомножителя **B**. Под произведением матрицы $\mathbf{A}(a_{ij})$ размером *m*x*k* на матрицу $\mathbf{B}(b_{ij})$ размером *k*x*n* понимают матрицу $\mathbf{C}(c_{ij})$ размером *m*x*n*, элемент c_{ij} которой равен скалярному произведению *i*-й строки матрицы $\mathbf{A}(a_{ij})$ на *j*-й столбец матрицы $\mathbf{B}(b_{ij})$:

$$c_{ij} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}), (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj}) \rangle = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В Excel для вычисления произведения матриц используется функция =*МУМНОЖ*(*массив1*;*массив2*), где массивы – совокупности элементов перемножаемых матриц (рисунок 5.7).

Формула для расчета произведения матриц должна быть введена как формула массива!

Пусть даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

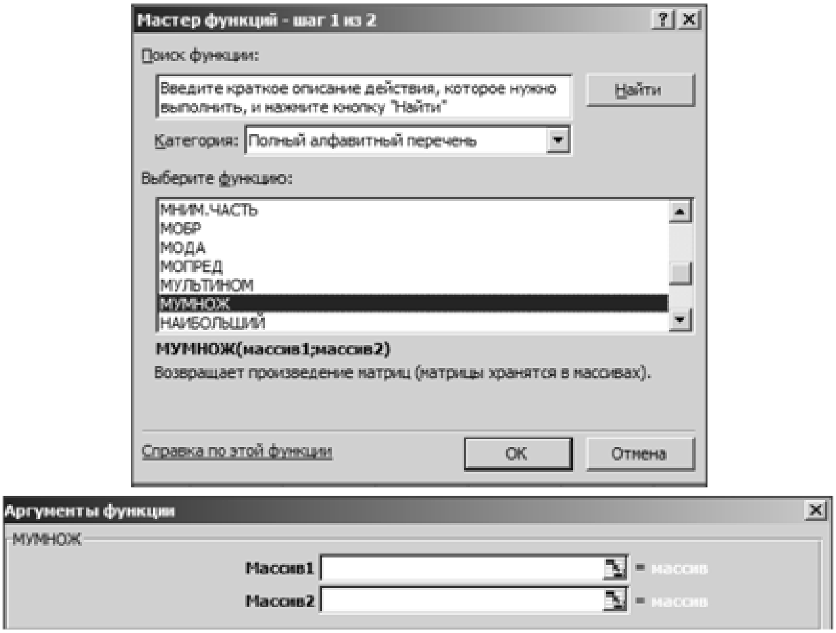


Рис. 5.7 – Умножение матриц

Вычислим их произведение в Excel (рис. 5.8):

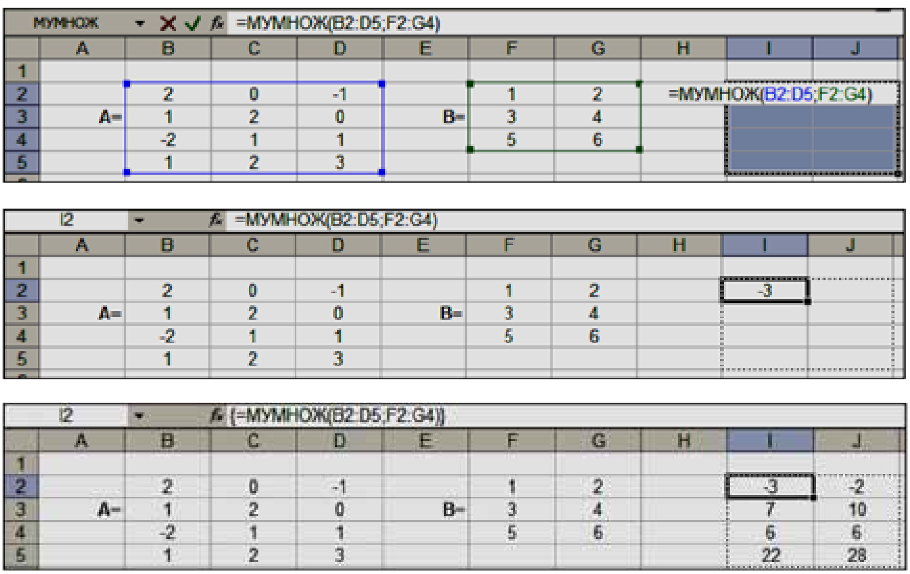


Рис. 5.8. Вычисление произведения матриц

- определить область размещения результата (на рис. 5.8 выделена пунктиром и заливкой);

– ввести в начальную ячейку результирующего массива формулы умножения матриц (массив не должен перекрывать ячейки размещения исходных элементов исходных матриц);

– выделить результирующий массив и нажать F2;

– нажать Shift+Ctrl+Enter.

Действие умножения матрицы на матрицу обладает свойствами:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}),\ \alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC},\ \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$$

Отметим, что в общем случае $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Здесь $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица.

Транспонирование матрицы – это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами. Если матрица A имеет размер n×m, то транспонированная матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ имеет размер m×n.

В EXCEL существует специальная функция =*ТРАНСП*(*массив*) для нахождения транспони-рованной матрицы.

Реализация операции транспонирования матрицы иллюстрируется примером на рис. 5.9.

В ячейки A2:D8 внесены элементы матрицы. Последовательность действий:

– определить область размещения результата (начальная ячейка A5;

– ввести в A5 формулу =ТРАНСП(A2:D3);

– выделить блок ячеек F5:B8 и нажать F2;

– нажать Shift+Ctrl+Enter.

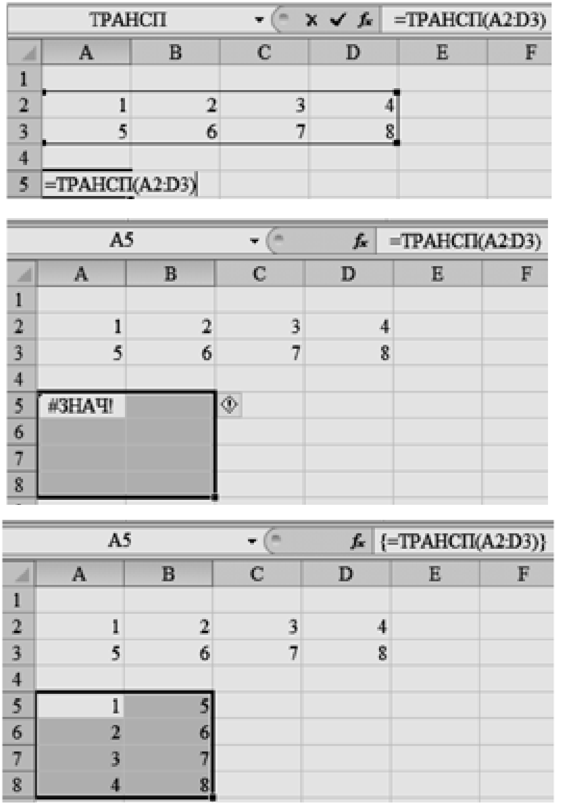


Рис. 5.9. Транспонирование матрицы

Если условие равенства произведения матриц при изменении их последовательности выполняется, то матрицы называются перестановочными между собой.

При умножении квадратной матрицы саму на себя получаем квадратную матрицу второй степени, при *n*-кратном умножении получим квадратную матрицу *n*-го порядка (*n*-й степени).

Одним из основных понятий линейной алгебры является определитель (или детерминант) матрицы. Это многочлен, комбинирующий элементы квадратной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов. Определитель характеризует содержание матрицы. В частности, если в матрице есть линейно-зависимые строки или столбцы, – определитель равен нулю.

Для матрицы первого порядка значение определителя равно единственному элементу этой матрицы.

Для матрицы 2х2 определитель вычисляется как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для матриц более высоких порядков *n*х*n* определитель можно вычислить, применив следующую рекурсивную формулу:

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_j^i$, где $\overline{M}_j^i$ – дополнительный минор к элементу a_{ij}.

Возможно разложение как по строкам, так и по столбцам.

В Excel определитель вычисляется с помощью функции =*МОПРЕД*(*массив*), где массив есть совокупность элементов матрицы (рис. 5.10).

H3 =МОПРЕД(B2:E5)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		2	0	-1	3			
3	A=	1	2	0	5	Определитель		-60
4		-2	1	1	4			
5		1	2	3	2			

Рис. 5.10 Расчет определителя матрицы

Квадратная матрица называется *неособенной* (*невырожденной*), если ее определитель не равен нулю. В противном случае она называется *особенной* (*вырожденной*) или *сингулярной*.

Детерминант треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов

Обратной матрицей к матрице называют такую матрицу, для которой $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$

Обратную матрицу можно найти по следующей формуле:

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, где $|\mathbf{A}|$ – определитель матрицы, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица.

На рис. 5.11 приведен пример определения обратной матрицы с помощью функции Excel =*МОБР*(*массив*).

Заметим, что функция применяется к массиву как в ранее приведенных примерах.

	A	B	C	D	E
1					
2		2	0	-1	3
3	**A**	1	2	0	5
4		-2	1	1	4
5		1	2	3	2
6					
7		0,25	-0,05	-0,2	0,15
8	**A^{-1}**	-0,75	0,816667	-0,4	-0,11667
9		0,25	-0,45	0,2	0,35
10		0,25	-0,11667	0,2	0,016667

Рис. 5.11. Определение обратной матрицы

Проверим выполнение условия **A A**$^{-1}$=**E** (рис. 5.12)

fx =МУМНОЖ(B2:E5;B7:E10)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		2	0	-1	3			
3	**A**	1	2	0	5		**AA^{-1}**	1
4		-2	1	1	4			
5		1	2	3	2			
6								
7		0,25	-0,05	-0,2	0,15			
8	**A^{-1}**	-0,75	0,816667	-0,4	-0,11667			
9		0,25	-0,45	0,2	0,35			
10		0,25	-0,11667	0,2	0,016667			

Рис. 5.12. Произведение матрицы на обратную матрицу

Собственным числом квадратной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется такое число λ, которое обращает определитель матрицы в 0:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Или, по-другому, собственными числами матрицы **A** являются корни уравнения $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ и только они.

Матрица $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ называется характеристической матрицей матрицы **A**, многочлен $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ называется характеристическим многочленом матрицы **A**, уравнение $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$ называется характеристическим уравнением матрицы **A.**

Для вычисления собственных чисел существуют классические приемы, сводящиеся к решению полиномиальных уравнений. Собственные числа определяют системы компьютерной математики. Найдем все собственные числа произвольной квадратной матрицы с помощью Excel на примере квадратной матрицы размерностью 3x3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо найти такие значения λ, при котором

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -8 \\ -8 & -6-\lambda & -2 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Оформим лист Excel следующим образом (рис. 5.13):

E2 fx {=МОПРЕД(B2:D4)}

	A	B	C	D	E	F
1					определитель	собственное число λ
2		2	-5	-8	0	0
3	матрица	-8	-6	-2		
4		4	3	1		

Рис. 5.13. Вычисление собственного числа матрицы

В ячейку B2 введено =2-F2; в ячейку C3 - =-6-F2; в ячейку D4 - =1-F2., в остальные ячейки – числа в соответствии с элементами исходной матрицы.

В ячейку E2 ввести формулу для вычисления определителя: =МОПРЕД(D2:D4) и вычислить его.

Из рис. 5.13 видно, что при λ=0 определитель также равен 0, т.е. λ=0 есть первое собственное число матрицы.

Для определения других собственных числе воспользуемся поиском (Меню *Сервис-Поск решения…*) – рис. 5.14, установив целевую ячейку $E$2, в которой вычисляется значение определителя матрицы. Требуемое значение определителя – 0. Поиск осуществляется путем подбора значения λ, отображаемом в ячейке $F$2.

По щелчку на кнопке *Выполнить,* появляется окно *Результат поиска решения* (рис. 5.14).

Выбираем *Сохранить найденное решение* и *Тип отчета – Результаты*. Щелкаем на ОК. Получаем ожидаемый результат λ=0.

Повторим выполненные действия, введя в окне *Поиск решения* ограничение $F$2>=1. Для этого щелкнуть на кнопке *Добавить* и в раскрывшемся окне *Добавление ограничения* ввести *Ссылка на ячейку* $F$2 >= , Ограничение 1 (рис. 5.15). Щелкнуть на *ОК*. В окне Поиск решения щелкнуть на *Выполнить*.

В результате поиска получаем второе значение собственного числа: λ=3.

Повторим поиск при ограничении.

Если установить в ограничениях λ>=4, то поиск не находит решения. Ищем отрицательное собственное число и устанавливаем в ограничениях λ<=-1. Поиск не справляется с задачей (определитель не равен 0).

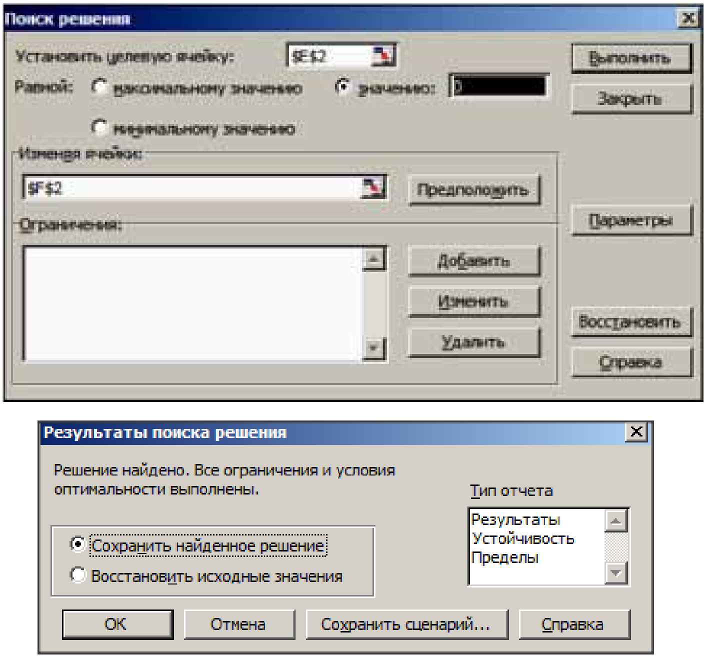


Рис. 5.14. Вычисление собственного числа матрицы

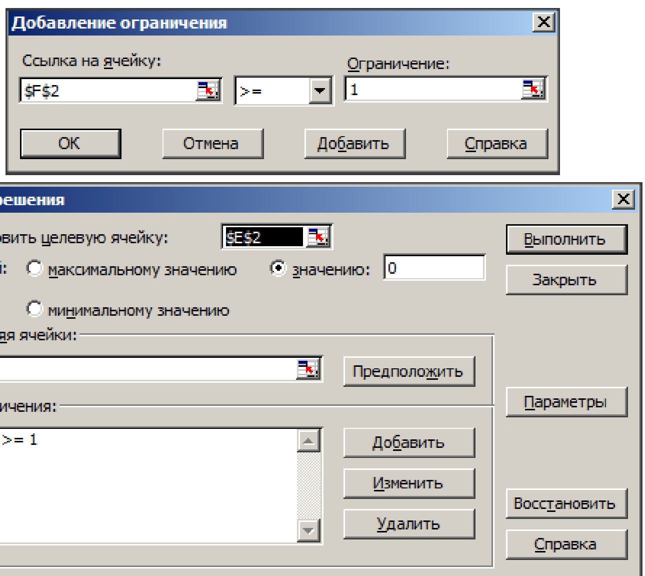


Рис. 5.15. Ввод ограничения

При добавлении в систему ограничений E1>=-10 (рис. 5.16) поиск нашел третье собственное число, равное – (рис. 5.17)

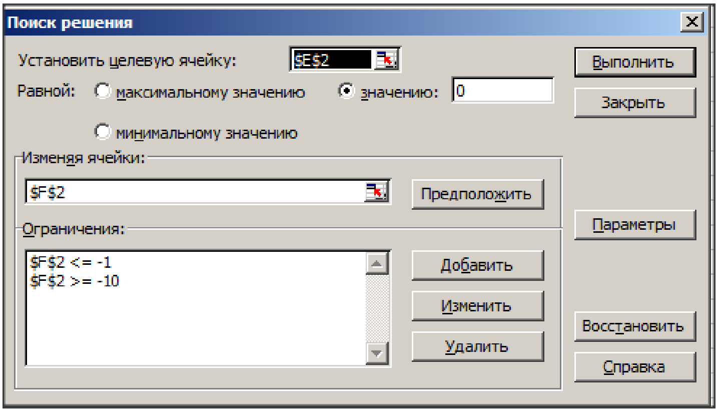
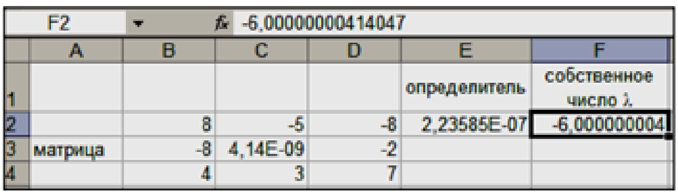


Рис. 5.16. Поиск собственного числа при двухстороннем ограничении



F2 fx -6,00000000414047

	A	B	C	D	E	F
1					определитель	собственное число λ
2		8	-5	-8	2,23585E-07	-6,000000004
3	матрица	-8	4,14E-09	-2		
4		4	3	7		

Рис. 5.17 Результат поиска третьего собственного числа

Собственным вектором соответствующим собственному числу λ назыв а-ют такой вектор $\vec{x}$, который удовлетворяет матричному равенству:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица имеет собственные числа: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$.

1. Заносим содержимое ячеек матрицы в ячейки таблицы (B2:D4).

2. В ячейку (B6) вводим λ для которого необходимо найти собственный вектор. Пусть λ = 3.

3. В ячейки (F2:F4) поместим любые числа: F2 = 1; F3 = 1; F4 = 1.

4. В ячейки (G2:G4) заносим произведение матрицы (ячейки B2:B4) на вектор $\vec{x}$ (ячейки F2:F4).

5. В ячейки (H2:H4) заносим умножение столбца $\vec{x}$ на собственное число λ находящийся в ячейки (B6).

6. В ячейки (I2:I4) заносим разность столбцов (F2:F4) и (H2:H4).

7. В главном меню открываем *Сервис - Поиск решения*. Вводим следующие данные: *Целевая ячейка* $I$2, *Равной значению* (0); *Изменяя ячейки* $F$2:$F$4; *Ограничения* $I$3=0; $I$4=0.

Нажать кнопку «*Выполнить*».

В ячейках (F2:F4) появятся числа, эти это и есть собственный вектор для данного собственного числа (рис. 5.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					определитель	x	A*x	λx	A*x-λx
2		2	-5	-8	0	-0,132036997	-0,39611	-0,39611	0
3	матрица	-8	-6	-2		0,132036997	0,396111	0,396111	0
4		4	3	1		-0,066018499	-0,19806	-0,19806	0
5									
6	λ	3							

Рис. 5.18. Определение собственного вектора матрицы

Последовательно выполнить операции п.п. 2, 3, 7 при остальных значениях собственных чисел матрицы.

5.2. Матричные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

В общем виде система линейных алгебраических уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Эту систему можно представить в матричном виде **AX** = **b**, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$ - матрица коэффициентов системы уравнений;

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор неизвестных; $$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - вектор правых частей.

Метод обратной матрицы

Систему линейных алгебраических уравнений **AX = b** умножим слева на матрицу, обратную к матрице **A**. Система уравнений примет вид:

$\mathbf{A^{-1}AX=A^{-1}b}$, $\mathbf{EX=A^{-1}b}$, (**E** - единичная матрица)

Вектор неизвестных вычисляется по формуле $\mathbf{X=A^{-1}b}$.

Метод Крамера

В этом случае неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = \overline{1,n}$$

где Δ – определитель матрицы **A**;

Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы **A** путем замены i-го столбца вектором **b.**

Рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера на следующих примерах.

Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 - 13x \ + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов **A** и вектор свободных коэффициентов **b** имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 21 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Введем эти данные в рабочий лист Excel (рис. 5.19).

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5
2		1	0	-2	3		-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							

Рис. 5.19. Шаг 1 решения системы линейных уравнений

Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к **A**. Для этого определим ячейки для хранения обратной матрицы, пусть это будут ячейки B6:E9.

Обратимся к мастеру функций, и выберем функцию *МОБР*, щелкнув по кнопке OK, перейдём ко второму шагу мастера функций. В диалоговом окне, появляющемся на следующем шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода *Массив*. Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае B1:E4. Данные в поле ввода *Массив* можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

Если поле Массив заполнено, нажать кнопку OK. В первой ячейке, выделенного под обратную матрицу диапазона, появится некое число. Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу F2, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. Рабочий лист Excel примет вид, изображенный на рис. 5.20.

B6 | {=МОБР(B1:E4)}

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	-13	4		-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814		

Рис. 5.20. Шаг 2 решения системы линейных уравнений

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор **b**. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например H6:H9. Обратимся к мастеру функций, и выберем функцию *МУМНОЖ*, предназначенную для умножения матриц. На втором шаге мастера функций в диалоговом окне введем в поле *Массив1* необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае B6:E9 (обратная матрица), а в поле *Массив2* ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае G1:G4 (вектор **b**).

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **x** и получить в результате вектор **b**. Умножение матрицы **A** на вектор **x** осуществляется при помощи функции =*МУМНОЖ*(B1:E4;H6:H9), так как было описанной выше.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид изображенный на рис. 5.21.

I1 | {=МУМНОЖ(B1:E4;H6:H9)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	1	-13	4		-5		-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4	Проверка	-4
3		3	21	0	-5		2		2
4		4	3	-5	0		3		3
5									
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845			0,849612	
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124		x=	-0,44031	
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798			-0,1845	
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814			-1,73953	

Рис. 5.21. Шаг 3 решения системы линейных уравнений матричным методом

Решим пример методом Крамера.

Введём матрицу **A** и вектор **b** на рабочий лист. Сформируем четыре вспомогательные матрицы, заменяя последовательно столбцы матрицы **A** на столбец вектора **b** (рис. 5.22).

Для дальнейшего решения необходимо вычислить определитель матрицы А. Установим курсор в ячейку I10 и обратимся к мастеру функций. В категории Математические выберем функцию МОПРЕД, предназначенную для вычисления определителя матрицы, и перейдём ко второму шагу мастера функций.

Диалоговое окно, появляющееся на втором шаге содержит поле ввода Массив. В этом поле указывают диапазон матрицы, определитель которой вычисляют. В нашем случае это ячейки B1:E4.

Для вычисления вспомогательных определителей введем формулы:

I11=*МОПРЕД*(B6:E9),

I12=*МОПРЕД*(B11:E14),

I13=*МОПРЕД*(B16:E19),

I14=*МОПРЕД*(B21:E24).

В результате в ячейке I10 хранится главный определитель, а в ячейках I11:I14 - вспомогательные.

Воспользуемся формулами Крамера и разделим последовательно вспомогательные определители на главный. В ячейку K11 введём формулу=I11/$I$10. Затем скопируем её содержимое в ячейки K12, K13 и K14. Система решена.

K11 =I11/$I$10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0	1	-13	4		-5				
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4				
3		3	21	0	-5		2				
4		4	3	-5	0		3				
5											
6		-5	1	-13	4						
7	A1	-4	0	-2	3						
8		2	21	0	-5						
9		3	3	-5	0						
10								Δ=	2580		
11		0	-5	-13	4			Δ1=	2192		0,849612
12	A2	1	-4	-2	3			Δ2=	-1136	x=	-0,44031
13		3	2	0	-5			Δ3=	-476		-0,1845
14		4	3	-5	0			Δ4=	-4488		-1,73953
15											
16		0	1	-5	4						
17	A3	1	0	-4	3						
18		3	21	2	-5						
19		4	3	3	0						
20											
21		0	1	-13	-5						
22	A4	1	0	-2	-4						
23		3	21	0	2						
24		4	3	-5	3						

Рис. 5.22. Решения системы линейных уравнений методом Крамера

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти куб матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы A = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\cdot$ и B = $\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$. Найдите матрицы C = A·B и D = B·A.

3. Найти скалярное произведение векторов

$a = 4i - 3j + k$ и $b = -i + 2j - 3k$.

4. Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами: $a(2; -3; 1)$ и $b(-4; -2; 7)$.

5. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы и методом Крамера.

При решении систем обязательно выполнить проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$$

6. В Зоопарке, живет много разных животных. Среди них есть лисы – черные и рыжие. Известно, что всего в зоопарке живет 7 лис, а черных на 3 лисы меньше, чем рыжих. Сколько черных и рыжих лис живет в зоопарке?

Составить систему уравнений и решить методом Крамера.

7. Во время стоянки между двумя рейсами матросу исполнилось 20 лет. По этому случаю в кают-компании собрались шесть членов команды.

– Я вдвое старше юнги и на 6 лет старше машиниста, – сказал рулевой.

– А я на столько же старше юнги, на сколько моложе машиниста и на 4 года старше матроса, – заметил боцман.

– Средний возраст команды – 28 лет, – дал справку капитан.

Сколько лет капитану?

Составить математическую модель и решить методом обратной матрицы.

Обратите внимание на особенность работы с матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши F2 и Ctrl+Shift+Enter !

6. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

В школьной (элементарной) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя их практическое значение велико, в теории играют подчиненную роль. Аналитическая геометрия предлагает единообразные средства для решения для решения задач не только элементарной геометрии, но и для изучения важных для практики кривых линий различной формы. Эта цель достигается применением метода координат.

6.1. Прямые и отрезки на плоскости

Положение точки в пространстве, на плоской или кривой поверхности, на прямой или кривой линии определяют координаты. Значение координаты некоторой точки x зависит от выбора начальной точки *0*, от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

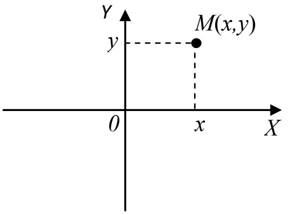


Рис. 6.1. Координаты точки в прямоугольной системе координат

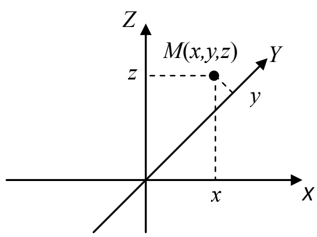


Рис. 6.2. Координаты точки в прямоугольной системе координат в пространстве

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. В прямоугольной системе координат положение точки определяется значениями абсциссы) и ординаты y – рис. 6.1. Положение точки в декартовой прямоугольной системе координат определяется значениями абсциссы x, ординаты y и аппликаты z – рис. 6.2.

Уравнения прямой на плоскости

Уравнение прямой на плоскости может быть записано по-разному.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b,$ где $k = tg\alpha = a / b$ - угловой коэффициент прямой, α – угол наклона прямой к оси X, b – ордината точки пересечения прямой с осью Y (рис. 6.3, *a*).

2. Уравнение прямой, проходящая через данную точку (x_1,y_1) в данном направлении (с данным углом наклона к оси X) $y - y_1 = k(x - x_1)$ (рис. 6.3, *b*).

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2): $\dfrac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ (рис. 6.3, *c*).

4. Уравнение прямой «в отрезках» $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (рис. 6.3, *d*).

5. Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$. Разрешив уравнение относительно *y*, получим $y=kx+b$, где $k=-A/B$, $b=-C/B$.

В MS Excel для построения прямых, вернее отрезков, может быть использован *Мастер диаграмм*.

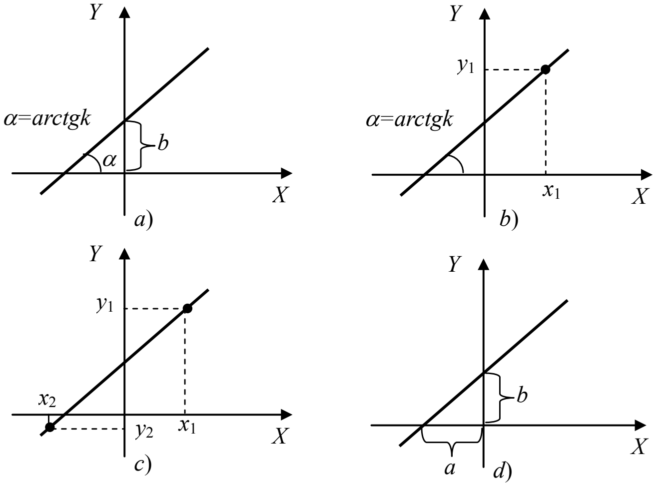


Рис. 6.3. Способы задания уравнения прямой

Решим следующую задачу: пусть задано уравнение прямой в общем виде $Ax+By+C=0$. Требуется построить отрезок прямой в заданном интервале и записать уравнения прямой в формах 1, 2, 3 и 4 (см. выше). Для этого необходимо определить угловой коэффициент (или угол наклона), отрезки *a* и *b*, координат минимум двух точек на прямой. Пусть уравнение имеет вид -2*x*+2*y*-1=0. Приведем это уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом: *y* = *x* – 0,5, здесь *k*=1 и *b*= – 0,5. Следовательно, одна точка отрезка имеет координаты (0; –0,5).

Оформить таблицу в Excel, как показано на рис. 6.4, *а*).

В ячейке D2 определяется угловой коэффициент *k*= –*A*/*B*, в ячейке D3 – свободный член *b*= –*C*/*B*.

Для построения отрезка на интервале $x\in[-1; 2,5]$ значения переменной *x* введены в массив E3:E10 с шагом 0,5.

Координаты *y* точек, соответствующих значениям *x* рассчитываются по формуле $y=kx+b$ и отображаются в ячейках массива F3:F10. Для этого в ячейку F3 введена формула =D$2*E3+$D$3 и скопирована в блок ячеек F4:F10. Обратим внимание, что адреса ячеек D$2 и $D$3 абсолютные.

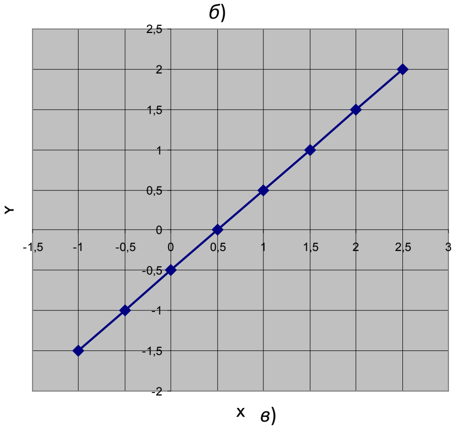
Коэффициент наклона рассчитывает в ячейке B6. Для этого используется встроенная функция *НАКЛОН*(*известные значения_y*;*известные значения_x*). Аргумент *известные значения_y* – массив или диапазон, содержащий числовые зависимые элементы данных (для рассматриваемого примера это массив E3:E10, хотя достаточно выбрать и E3:E4); аргумент *известные значения_y* – множество независимых элементов данных – имена, массивы или ссылки на ячейки, содержащие числа (для рассматриваемого примера это массив F3:F10, хотя достаточно выбрать и F3:F4).

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные		Расчет *k* и *b*		Координаты точек на прямой	
2	A=	-2	*k*=	=-B2/B3	*x*	*y*
3	B=	2	*b*=	=-B4/B3	-1	=D$2*E3+$D$3
4	C=	1			-0,5	=D$2*E4+$D$3
5					0	=D$2*E5+$D$3
6	*Коэффициент наклона*	=НАКЛОН(F3:F4;E3:E4)			0,5	=D$2*E6+$D$3
7	*Угол наклона, рад*	=ATAN(B6)			1	=D$2*E7+$D$3
8	*Угол наклона, град*	=B7*180/ПИ() а)			1,5	=D$2*E8+$D$3
9	*Отрезок а*	=ОТРЕЗОК(E3:E10;F3:F10)			2	=D$2*E9+$D$3
10	*Отрезок b*	=D3			2,5	=D$2*E10+$D$3

а)

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные		Расчет *k* и *b*		Координаты точек на прямой	
2	A=	-2	*k*=	1	*x*	*y*
3	B=	2	*b*=	-0,5	-1	-1,5
4	C=	1			-0,5	-1
5					0	-0,5
6	*Коэффициент наклона*	1			0,5	0
7	*Угол наклона, рад*	0,785398163			1	0,5
8	*Угол наклона, град*	45			1,5	1
9	*Отрезок а*	0,5			2	1,5
10	*Отрезок b*	-0,5			2,5	2

б)



в)

Рис. 6.4. Построение отрезка прямой

Угол наклона в радианах в ячейке B7 определяется как арктангенс коэффициента наклона ($\alpha = arctg(k)$). В ячейке значение угла наклона в радианах переводится в градусную меру по формуле $\alpha_{град} = 180 * \alpha_{рад} / \pi$. Для определения длины отрезка *a* используется встроенная функция *ОТРЕЗОК*(*известные* *значения_у*;*известные значения_х*). Смысл аргументов аналогичен вышеуказанному.

Результаты расчетов приведены на рис. 6.4, *б*), а на рис. 6.5, *в*) построен отрезок. При построение выбрано *Мастер диаграмм – Стандартные –График – График с маркерами, помечающими точки данных*.

Изменение исходных данных, размещаемых в ячейках В2:В4, позволит провести анализ положения отрезка на плоскости.

Полученные результаты расчетов позволяют записать уравнение прямой в различной форме: 1) $y = 1 * x + (-0{,}5)$; 2) $y - (-1{,}5) = 1 * (x - (-1))$;

3) $\dfrac{y-2}{(-1{,}5)-2} = \dfrac{x-2{,}5}{(-1)-2{,}5}$; 4) $\dfrac{x}{0{,}5} + \dfrac{y}{-0{,}5} = 1$.

Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Если две прямые, заданные уравнениями

$$y = a_1 x + b_1,$$
$$y = a_2 x + b_2$$

характеризуются равенством угловых коэффициентов, то они параллельны.

Угол между двумя прямыми: $tg\theta = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$.

Условие, при котором три точки лежат на одной прямой

Три точки лежат на одной прямой если

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении определителя квадратной матрицы используется функция =*МОПРЕД*(*массив*) (рис. 6.5).

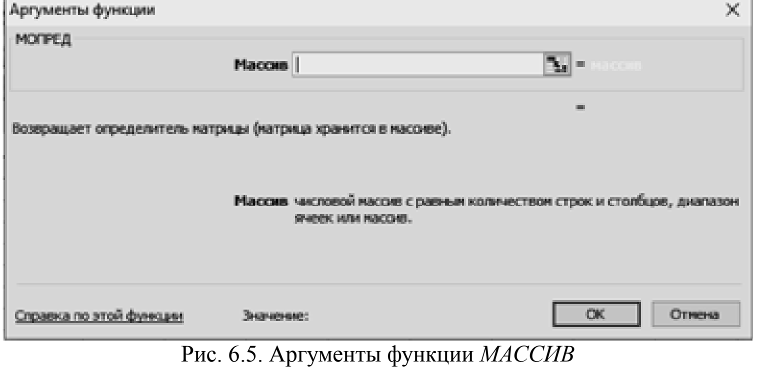


Рис. 6.5. Аргументы функции *МАССИВ*

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от некоторой точки с координатами (x_1, y_1) до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ равно $d = \left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.

Примеры, демонстрирующие вычисления угла между двумя линиями, расстояния от точки до прямой, проверку условий параллельности и перпендикулярности прямых, а также того, лежат ли три точки на одной прямой, представлены на рис. 6.6.

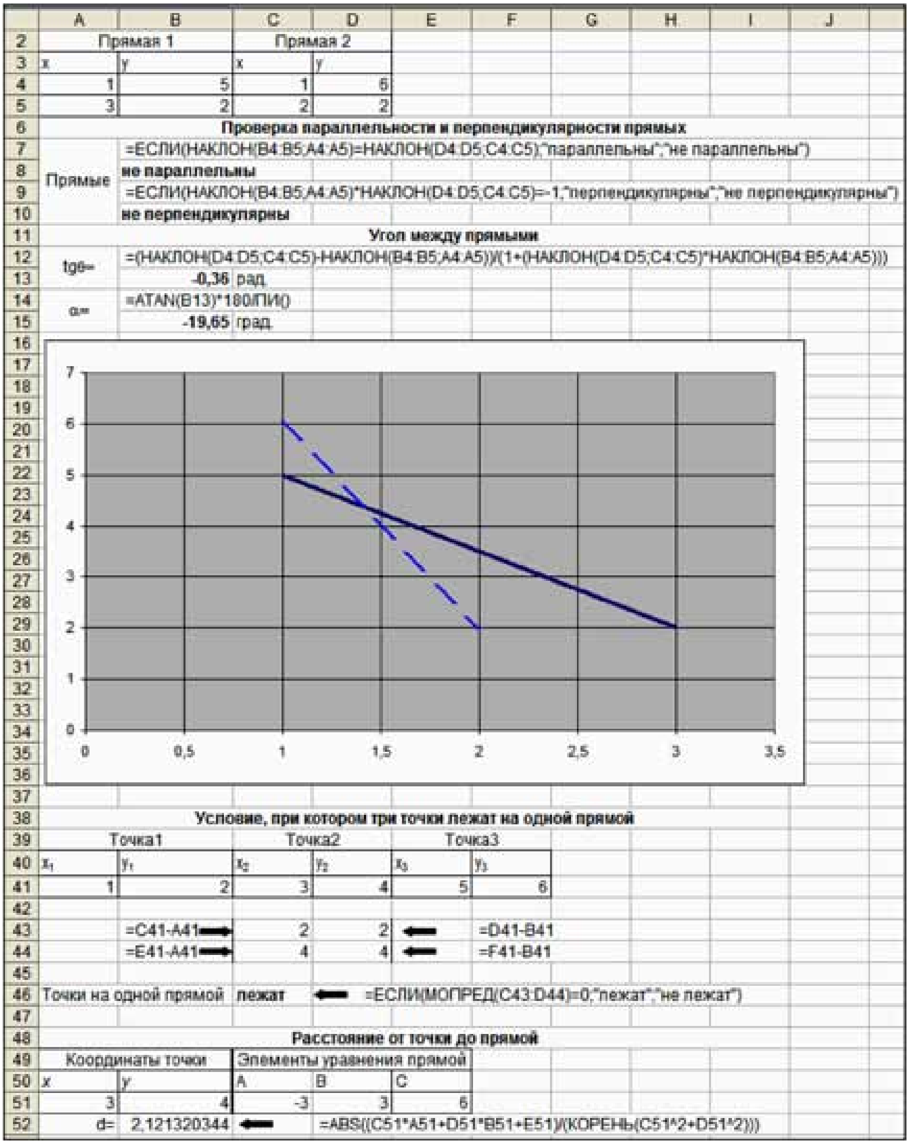


Рис. 6.6. – Комплекс примеров

Полярные параметры прямой

Выше используемые параметры a и b пригодны для описания не всех прямых – нельзя ими задать прямую, параллельную оси Y. В противоположность этому полярными параметрами можно задать положение всякой прямой (рис. 6.7).

Если прямая представлена уравнением $Ax + By + C = 0$, то ее полярное расстояние определяется по формуле $p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, а полярный угол α - по формулам $\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin\alpha = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где верхние знаки берутся когда $C > 0$, а нижние – когда $C < 0$; при $C = 0$ произвольно берутся либо верхние, либо только нижние знаки.

Прямая с полярным расстоянием p и полярным углом α представляется уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Оно называется нормальным уравнением прямой. От нормального уравнения прямой можно перейти к полярному уравнению (рис. 6.8). Из рисунка видно, что прямая VU, не проходящая через полюс O, представляется в полярных координатах уравнением $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$.

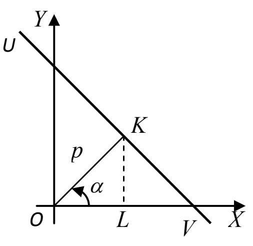


Рис. 6.7. К полярной системе представления

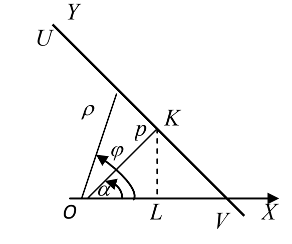


Рис. 6.8. Прямая в полярной системе координат

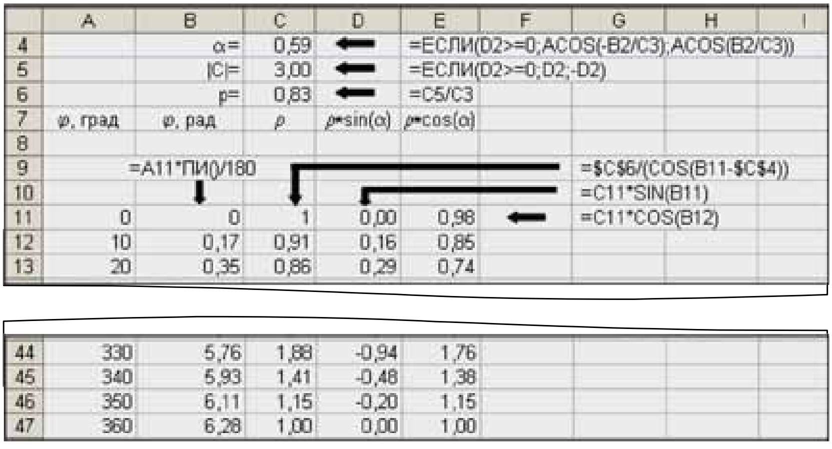
При построении прямой, заданной в полярных координатах, полярные координаты переводят в декартовы. Если полюс имеет координаты (x_0, y_0), то формулы преобразования таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos(\varphi) \\ y = y_0 + \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

Уравнения для построения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}\cos(\varphi) \\ y = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}\sin(\varphi) \end{cases}.$$

Пример построения прямой приведен на рис. 6.9.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4		α=	0,59		=ЕСЛИ(D2>=0;ACOS(-B2/C3);ACOS(B2/C3))				
5		|C|=	3,00		=ЕСЛИ(D2>=0;D2;-D2)				
6		p=	0,83		=C5/C3				
7	φ, град	φ, рад	ρ	ρ*sin(α)	ρ*cos(α)				
8									
9		=A11*ПИ()/180					=$C$6/(COS(B11-$C$4))		
10							=C11*SIN(B11)		
11	0	0	1	0,00	0,98		=C11*COS(B12)		
12	10	0,17	0,91	0,16	0,85				
13	20	0,35	0,86	0,29	0,74				
44	330	5,76	1,88	-0,94	1,76				
45	340	5,93	1,41	-0,48	1,38				
46	350	6,11	1,15	-0,20	1,15				
47	360	6,28	1,00	0,00	1,00				

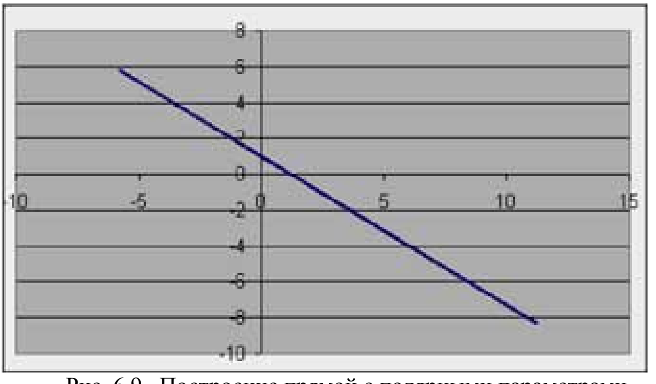


Рис. 6.9. Построение прямой с полярными параметрами

Преобразование координат

Часто требуется, зная уравнение некоторой прямой в одной системе координат («старой»), найти уравнение той же линии в другой системе («новой»). Это достигается применением формул преобразования координат.

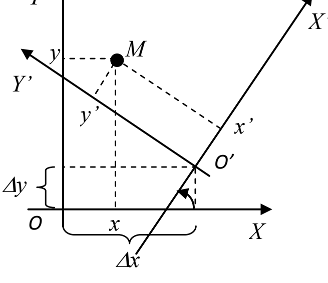


Рис. 6.10. Преобразование координат

Любую новую систему координат можно получить из старой путем смещения центра системы и поворота ее осей (рис. 6.10).

При переносе на величину Δx и Δy новые координаты точки M будут $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. При повороте системы координат на угол α с учетом предшествующего переноса новые координаты точки определяются следующим образом:

$$x' = (x + \Delta x)\cos\alpha + (y + \Delta y)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x + \Delta x)\sin\alpha + (y + \Delta y)\cos\alpha.$$

Пример расчета новых координат точки приведен на рис. 6.11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Координаты точки в исходной системе координат		Смещение начала системы координат		Угол поворота системы координат, град	Новые координаты точки	
2	x	y	Δx	Δy	α	x'	y'
3	2	3	-4	-2	90	1,00	2,00
4							
5	=(A3+C3)*COS(E3*ПИ()/180)+(B3+D3)*SIN(E3*ПИ()/180)						
6	=-(A3+C3)*SIN(E3*ПИ()/180)+(B3+D3)*COS(E3*ПИ()/180)						

Рис. 6.11. Преобразование координат

Деление отрезка в заданном отношении

Даны точки $A_1(x_1;y_1)$ и $A_2(x_2;y_2)$. Требуется найти координаты точки $K(x;y)$, делящей отрезок A_1A_2 в данном отношении: $\frac{A_1K}{KA_2} = \frac{m}{m} = \lambda$.

Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении находятся по формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Пример решения задачи приведен на рис. 6.12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Деление отрезка**								
2	Координаты концов отрезка								
3	x	y		λ=	2				
4	5	-7	Длина отрезка		**11,40175**		=КОРЕНЬ((A4-A5)^2+(B4-B5)^2)		
5	2	4	Длина первой части		7,60117		=КОРЕНЬ((A4-A7)^2+(B4-B7)^2)		
6	Координаты точки		Длина второй части		3,800585		=КОРЕНЬ((A5-A7)^2+(B5-B7)^2)		
7	**3,00**	**0,33**	Сумма частей		**11,40175**		=E5+E6		
8									
9			=(B4+D3*B5)/(1+D3)						
10			=(A4+D3*A5)/(1+D3)						

Рисунок 6.12. Деление отрезка

При построении отрезка выбирается тип диаграммы: точечная, на которой значения соединены отрезками

6.2. Треугольники

Для построения треугольника необходимо указать координаты его вершин в прямоугольной системе координат (чтобы треугольник был «замкнут» необходимо в таблице координат вершин координаты первой вершины повторно внести после координат третьей вершины) – рис. 6.13.

На рис. 6.13 представлены также формулы вычисления длин сторон треугольника и определения типа треугольника.

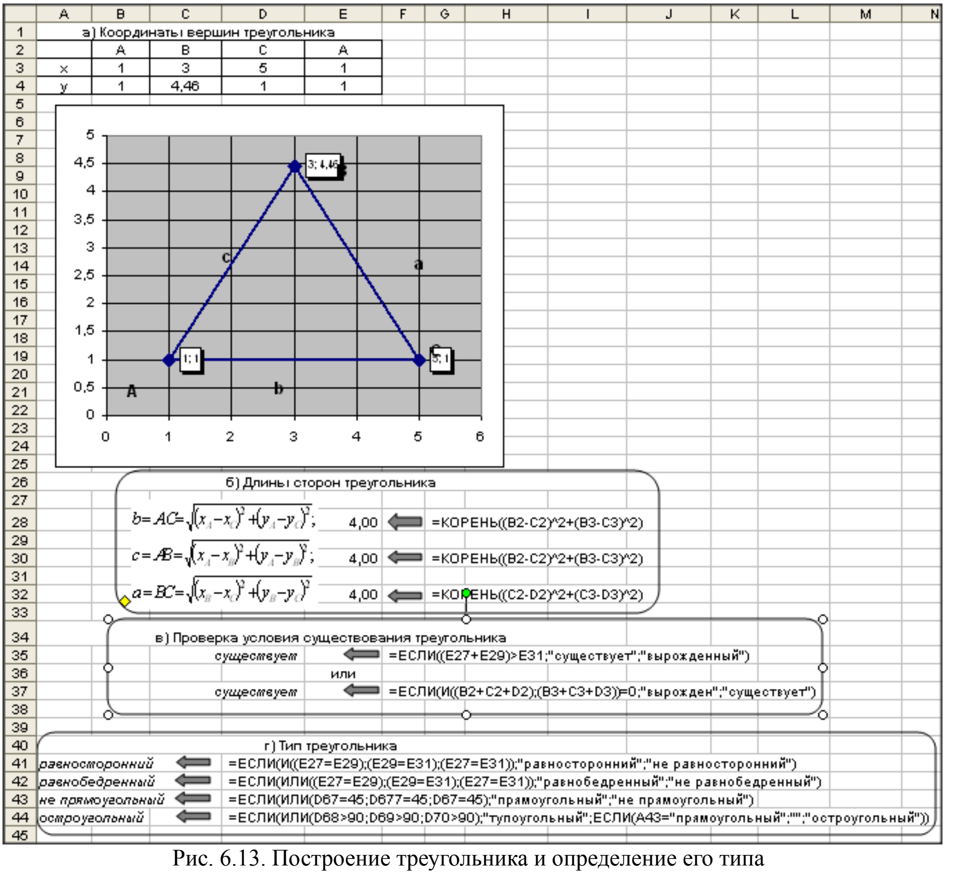


Рис. 6.13. Построение треугольника и определение его типа

Условие существования треугольника можно представить в следующем виде: пусть a, b, c стороны треугольника. Тогда, чтобы треугольник существовал необходимо, чтобы сумма двух любых его сторон была больше третьей стороны $a+b>c$ или $a+c>b$ или $b+c>a$ (если сумма будет равна какой-либо стороне, то такой треугольник называется вырожденным). Так же условие существования треугольника можно представить в виде векторной суммы. Пусть вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задают стороны треугольника (и эти вектора не равны нуль-вектору), тогда треугольник существует, если векторная сумма $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Замечательные линии в треугольнике

Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение (на основание треугольника) – рис. 6.14. Высота h_a, опущенная на сторону a, через три стороны выражается формулой $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

Медиана треугольника – отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Три медианы пересекаются в одной точке, являющейся *центром тяжести треугольника* (рис. 6.15). Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1 (считая от вершины). Через стороны треугольника медиана m_a выражается формулой $m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной (рис. 6.16). Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанного круга. Биссектриса β_a через стороны треугольника выражается формулой $\beta_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. Биссектриса делит противолежащую сторону на

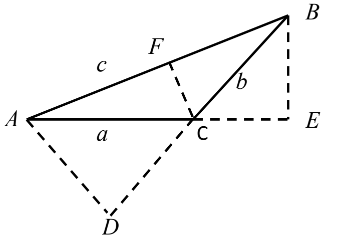


Рис. 6.14. Высота треугольника

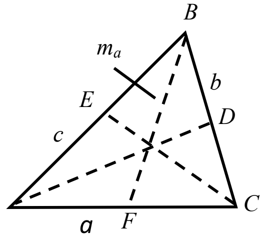


Рис. 6.15. Медиана треугольника

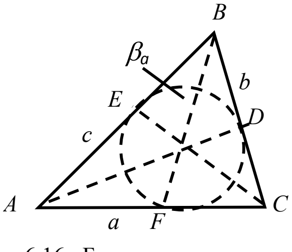


Рис. 6.16. Биссектриса треугольника

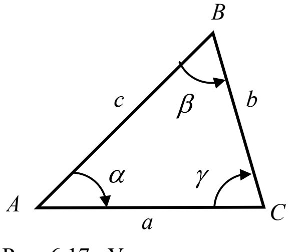


Рис. 6.17. Углы в треугольнике

части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Для нахождения углов в произвольном треугольнике можно воспользоваться теоремой косинусов $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

На рис. 6.18. представлены формулы и результаты расчета периметра, высот, медиан, биссектрис и углов треугольнике согласно данных, приведенных на рис. 6.13 (рис. 6.18 является продолжением рис. 6.13)

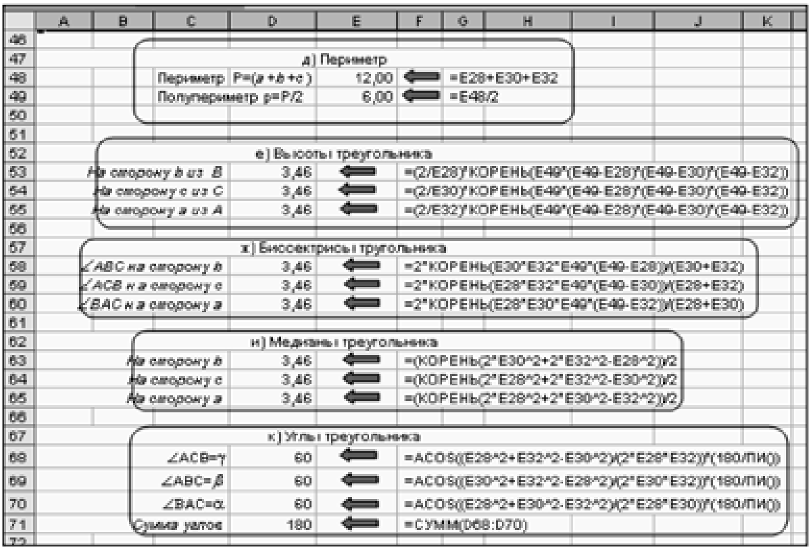


Рис. 6.18. Расчет параметров треугольника

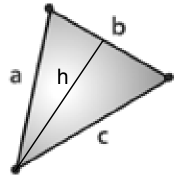
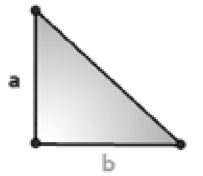
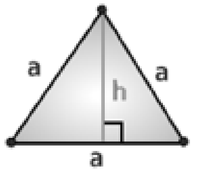
Определение координат точек пересечения высот, медиан и биссектрис как с соответствующими сторонами треугольника, так и между собой, могут быть определены путем решения задачи деления отрезка в заданном отношении и задачи определения точки пересечения двух прямых на основе решения системы двух уравнения.

Площадь треугольника

Площадь треугольника может быть вычислена по различным формулам в зависимости от типа треугольника (таблица 1). Общей для всех типов является формула Герона (греческий математик и механик, время жизни отнесено ко второй половине I в. н. э.).

Формулы в Excel и результаты определения площади треугольника с параметрами, представленными на рис. 6.13, приведены на рис. 6.19. Формулы, представленные в строках 75, 77, 78, 79, кроме собственно вычисления площади позволяют определить, является ли треугольник прямоугольным, равнобедренным или равносторонним. Результат вычисления отображается только в строке треугольника соответствующего типа.

Табл.6.1. Формулы определения площади треугольника

Произвольный треугольник (формула Герона)	**Прямоугольный треугольник**	**Равносторонний треугольник**
		
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$ $=bh/2$	$S=ab/2$	$S=ah/2=\sqrt{3}a^2/4$

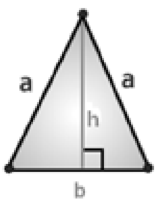
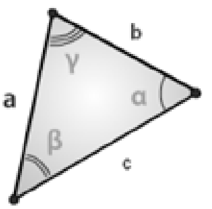
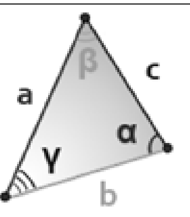
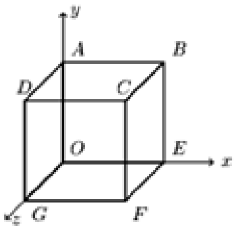
Равнобедренный треугольник	**Через две стороны и угол**	**Через сторону и два угла**
		
$S=bh/2$	$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$	$S=\frac{a^2}{2}\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}=$ $=\frac{b^2}{2}\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c^2}{2}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$

Рис. 6.19. Вычисление площади треугольника

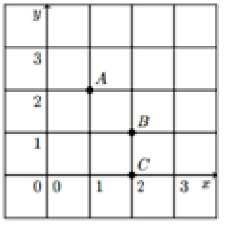
Задачи для самостоятельного решения



1. На рисунке изображён куб со стороной длины 1. Задать прямую, проходящую через точки: (*a*) *O* и *B*; (*b*) *O* и *C*; (*c*) *A* и *F*.

2. Параллельны ли прямые? Если нет, найти их точку пересечения:

(a) $2x+3y=0$ и $3x+2y+5=0$;
(b) $2x+3y=0$ и $2x+3y+5=0$;
(c) $2x+3y+2=0$ и $4x+6y+10=0$;
(d) $2x+3y+2=0$ и $2x+5y+2=0$.



3. Задать прямую

(*a*) проходящую через точки *A* и *C*;
(*b*) проходящую через точки *A* и *B*;
(*c*) проходящую через точку *C* параллельно вектору $\vec{AB}$;
(*d*) проходящую через точку *C* перпендикулярно вектору $\vec{AB}$.

4. Выбрать любые четыре точки *P*, *Q*, *R*, *S*, так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Определить координаты векторов и

(a) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$; (b) $\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ}$; (c) $\overrightarrow{QS}-\overrightarrow{PS}$; (d) $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{PQ}$.

построить их:

5. Найти угол между векторами

(a) (-8; 6) и ($\sqrt{7}$; 3);
(b) (3; -1,5) и (-2; 4).

6. Найти углы треугольника *ABC*: *A*= (1; 0), *B*=(3; 6), *C*=(-1; 4).

7. Построить отрезок, проходящий через точку Q(0;0) перпендикулярно вектору n=(1:1), записать уравнение прямой, элементом которой является построенный отрезок.

8. Какие из следующих прямых параллельны:

(*a*) $x+y=0$; (*c*) $2x+2y=6$; (*e*) $y+2x=6$; (*g*) $y=3$;
(*b*) $x–y=0$; (*d*) $x+2y=3$; (*f*) $x=2$; (*h*) $2x+4y= –1$.

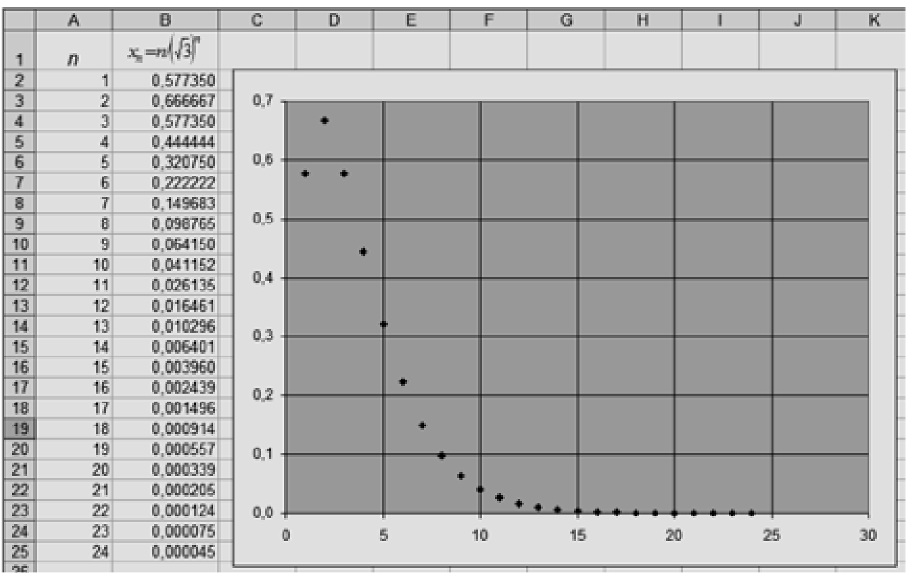
7. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

7.1. Числовые последовательности и ряды, пределы

Умение вычислять пределы – необходимый элемент развития математических навыков. Это узловой вопрос математического анализа. При вычислении пределов используется множество приемов, пределы вычисляют практически все профессиональные системы компьютерной математики, но в Excel это делается еще проще. В стандартном курсе математического анализа сначала рассматривают предел последовательности и только потом предел функции.

Если каждому числу n натурального ряда чисел 1, 2,…, n,… ставится в соответствие по определенному закону некоторое действительное число x_n, то множество занумерованных действительных чисел x_1, x_2,…, x_n,… называется ***числовой последовательностью*** или просто последовательностью. Числа x_n называются членами последовательности.

Пример последовательности: $x_n = n/\left(\sqrt{3}\right)^n$. Кроме представленной аналитической записи числовой последовательности она может быть представлена в табличной, графической форме (рис. 7.1).



n	$x_n = n/\left(\sqrt{3}\right)^n$
1	0,577350
2	0,666667
3	0,577350
4	0,444444
5	0,320750
6	0,222222
7	0,149683
8	0,098765
9	0,064150
10	0,041152
11	0,026135
12	0,016461
13	0,010296
14	0,006401
15	0,003960
16	0,002439
17	0,001496
18	0,000914
19	0,000557
20	0,000339
21	0,000205
22	0,000124
23	0,000075
24	0,000045

Рис. 7.1. Числовая последовательность: табличная и графическая формы представления

Анализ данных, представленных на рис. 7.1 позволяет предположить, что элементы числовой последовательности при увеличении n все меньше отличаются от нуля.

Широко распространенными числовыми последовательностями являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением определенного числа a, называемого разностью прогрессии. Если $a > 0$, прогрессия называется возрастающей, если $a < 0$ — убывающей.

$$x_n = x_1 + (n-1)a \text{ и } S_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2},$$

где S_n – сумма первых n членов прогрессии.

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждый последующий член получается из предыдущего умножением его на определенное число q, называемое знаменателем (основанием) прогрессии. Если $q > 1$, прогрессия называется возрастающей, если $|q| < 1$, то убывающей.

$$x_n = x_1 q^{n-1} \text{ и } S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q-1},$$

где S_n – сумма первых n членов прогрессии.

В Excel для нахождения членов арифметической или геометрической прогрессии существует специальная процедура *Прогрессия*. Для ее реализации необходимо:

1. Ввести значение первого элемента прогрессий в выбранную ячейку.
2. Выделить блок ячеек под требуемое количество членов прогрессии (либо в дальнейшем потребуется указать значение последнего элемента).
3. Выполнить команду меню *Правка – Заполнить – Прогрессия*.
4. В появившемся диалоговом окне Прогрессия указать тип и параметры формируемой последовательности значений (рис. 7.2).

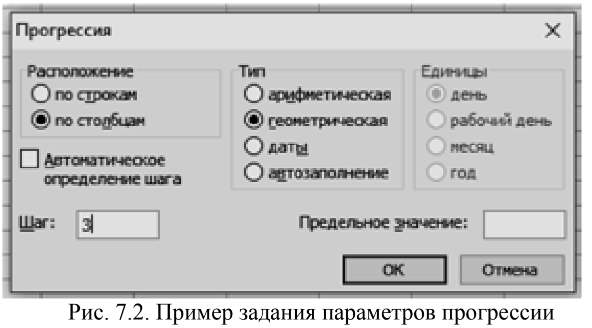


Рис. 7.2. Пример задания параметров прогрессии

Пример. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии с $x_1 = 2$ и разностью прогрессии $a = 3$.

Решение. 1. Находим члены прогрессии. Для этого в ячейку A1 вводим значение первого члена – 2. В ячейку A2 вводим значение второго члена прогрессии – 5 (2 + 3). Выделяем блок A1:A2 и протягиванием за правый нижний угол до ячейки A10 – автозаполнением находим остальные члены арифметической прогрессии.

2. Вычисляем частичную сумму. Устанавливаем табличный курсор в ячейку A11. Нажимаем кнопку *Автосумма* на панели инструментов *Стандартная*. Указателем мыши вводим диапазон суммирования A1:A10. Нажимаем клавишу Enter.

3. В результате в ячейке A11 должна оказаться сумма первых 10 членов арифметической прогрессии – 120.

Пример. Построить первые 11 членов геометрической прогрессии с первым членом $x_1 = 4$ и со знаменателем $_{\mathrm{q}} = 3$.

Решение. 1. В ячейку A1 введем значение первого члена – 4.

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732
11	236196

2. Выделим блок ячеек A1:A11.

3. Выполним команду меню *Правка – Заполнить – Прогрессия*.

4. Заполним поля диалогового окна *Прогрессия*, переключатель *Расположение* поставим в положение по столбцам, переключатель *Тип* — в положение геометрическая, в поле Шаг с клавиатуры вводим значение знаменателя – 3 (рис. 7.2). Щелкаем на кнопке ОК.

5. В результате получаем диапазон ячеек, заполненный членами геометрической прогрессии.

Числовая последовательность вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***числовым рядом***.

Формулы, выражающие очередной член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют ***рекуррентными соотношениями***. В арифметической прогрессии, например, каждый следующий член равен предыдущему, увеличенному на разность прогрессии: $a_{i+1} = a_i + d$. При вычислении суммы ряда чисел S=1+2+3+…+n можно использовать рекуррентное соотношение $S(1)=1$, для любого $n>0$ $S(n)=n+S(n\text{-}1)$.

Важное место в математике занимает последовательность чисел известная как ряд Фибоначчи, так как проявляется в самых неожиданных ее приложениях. Строгое определение этого ряда следующее: каждое число ряда, начиная со второго, равно сумме двух предыдущих. Вот эта задача в том виде, как формулирует ее сам Фибоначчи: «Пара кроликов через месяц производит на свет другую пару, а потомство они дают со второго месяца после своего рождения. Итак, через месяц будет две пары, через два месяца – три пары, а через четыре месяца – пять, так как к паре, рожденной первой парой, добавятся первые дети от второй пары…». Продолжая процесс, получим количество пар кроликов по месяцам: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, 56…эти числа и представляют ряд, названный по имени автора задачи.

Рекуррентное соотношение, определяющее вычисление чисел Фибоначчи: $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; при $n = 3...N$ $f(n) = f(n\text{-}2) + f(n\text{-}1)$.

Рекуррентное соотношение, определяющее вычисление факториала: $f(0)=1$; $f(1)=1$; при $n = 3...N$ $f(n) = n{\cdot}f(n\text{-}1)$.

Рекуррентное соотношение, определяющее сумму чисел натурального ряда: $S(1)=1$; при $n = 3...N$ $S(n)=n+ S(n)$.

Расчетные формулы приведены на рис. 7.3 *a*), а результаты расчетов на рис 7.1 *b*). При расчет факториала в столбце *D* использовалась встроенная функция: =*ФАКТР*(*число*).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Числа Фибоначчи	Факториал			Сумма ряда		
2	1	0	1	=ФАКТР(B2)	1	=E2	=СУММ($E$2:E2)
3	2	1	1	=ФАКТР(B3)	2	=F2+E3	=СУММ($E$2:E3)
4	=A2+A3	2	=C3*B4	=ФАКТР(B4)	3	=F3+E4	=СУММ($E$2:E4)
5	=A3+A4	3	=C4*B5	=ФАКТР(B5)	4	=F4+E5	=СУММ($E$2:E5)
6	=A4+A5	4	=C5*B6	=ФАКТР(B6)	5	=F5+E6	=СУММ($E$2:E6)
7	=A5+A6	5	=C6*B7	=ФАКТР(B7)	6	=F6+E7	=СУММ($E$2:E7)
8	=A6+A7	6	=C7*B8	=ФАКТР(B8)	7	=F7+E8	=СУММ($E$2:E8)
9	=A7+A8	7	=C8*B9	=ФАКТР(B9)	8	=F8+E9	=СУММ($E$2:E9)
10	=A8+A9	8	=C9*B10	=ФАКТР(B10)	9	=F9+E10	=СУММ($E$2:E10)
11	=A9+A10	9	=C10*B11	=ФАКТР(B11)	10	=F10+E11	=СУММ($E$2:E11)
12	=A10+A11	10	=C11*B12	=ФАКТР(B12)	11	=F11+E12	=СУММ($E$2:E12)
13	=A11+A12	11	=C12*B13	=ФАКТР(B13)	12	=F12+E13	=СУММ($E$2:E13)
14	=A12+A13	12	=C13*B14	=ФАКТР(B14)	13	=F13+E14	=СУММ($E$2:E14)
15	=A13+A14	13	=C14*B15	=ФАКТР(B15)	14	=F14+E15	=СУММ($E$2:E15)
16	=A14+A15	14	=C15*B16	=ФАКТР(B16)	15	=F15+E16	=СУММ($E$2:E16)

a)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Числа Фибоначчи	Факториал			Сумма ряда		
2	1	0	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	2	3	3
4	3	2	2	2	3	6	6
5	5	3	6	6	4	10	10
6	8	4	24	24	5	15	15
7	13	5	120	120	6	21	21
8	21	6	720	720	7	28	28
9	34	7	5040	5040	8	36	36
10	55	8	40320	40320	9	45	45
11	89	9	362880	362880	10	55	55
12	144	10	3628800	3628800	11	66	66
13	233	11	39916800	39916800	12	78	78
14	377	12	479001600	479001600	13	91	91
15	610	13	6227020800	6227020800	14	105	105
16	987	14	87178291200	87178291200	15	120	120

b)

Рис. 7.3. Примеры расчетов по рекуррентным формулам

Число b называется пределом последовательности $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$, если по мере возрастания номера n член x_n неограниченно приближается к b. Неограниченность приближения выражается в том, что $|x_n - b| < \varepsilon$, т.е. начиная с некоторого номера N абсолютная разность элемента последовательности и числа b становится меньше любого (заданного заранее) положительного числа ε, или если $|x_n - x_{n-1}| < 2\varepsilon$.

Пример. Найдем предел последовательности $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ при ε=0,01. На рис. 7.4 показано заполнение таблицы для расчетов. В столбце B записана формула для вычисления элементов последовательности при соответствующих значениях номеров элементов (n занесены в ячейки столбца A). В ячейке D2 указана требуемая точность. В ячейках столбца C проверяется выполнение условия достижения требуемой точности.

	A	B	C	D
1	n	x_n		ε
2	1	=2+(-1)^A2/A2		0,01
3	2	=2+(-1)^A3/A3	=ЕСЛИ(ABS(B2-B3)<2*$D$2;"предел";"")	
4	3	=2+(-1)^A4/A4	=ЕСЛИ(ABS(B3-B4)<2*$D$2;"предел";"")	
5	4	=2+(-1)^A5/A5	=ЕСЛИ(ABS(B4-B5)<2*$D$2;"предел";"")	
6	5	=2+(-1)^A6/A6	=ЕСЛИ(ABS(B5-B6)<2*$D$2;"предел";"")	
7	6	=2+(-1)^A7/A7	=ЕСЛИ(ABS(B6-B7)<2*$D$2;"предел";"")	
8	7	=2+(-1)^A8/A8	=ЕСЛИ(ABS(B7-B8)<2*$D$2;"предел";"")	
9	8	=2+(-1)^A9/A9	=ЕСЛИ(ABS(B8-B9)<2*$D$2;"предел";"")	
10	9	=2+(-1)^A10/A10	=ЕСЛИ(ABS(B9-B10)<2*$D$2;"предел";"")	
11	10	=2+(-1)^A11/A11	=ЕСЛИ(ABS(B10-B11)<2*$D$2;"предел";"")	
12		...		
13	90	=2+(-1)^A13/A13	=ЕСЛИ(ABS(B11-B13)<2*$D$2;"предел";"")	
14	91	=2+(-1)^A14/A14	=ЕСЛИ(ABS(B13-B14)<2*$D$2;"предел";"")	
15	92	=2+(-1)^A15/A15	=ЕСЛИ(ABS(B14-B15)<2*$D$2;"предел";"")	
16	93	=2+(-1)^A16/A16	=ЕСЛИ(ABS(B15-B16)<2*$D$2;"предел";"")	
17	94	=2+(-1)^A17/A17	=ЕСЛИ(ABS(B16-B17)<2*$D$2;"предел";"")	
18	95	=2+(-1)^A18/A18	=ЕСЛИ(ABS(B17-B18)<2*$D$2;"предел";"")	
19	96	=2+(-1)^A19/A19	=ЕСЛИ(ABS(B18-B19)<2*$D$2;"предел";"")	
20	97	=2+(-1)^A20/A20	=ЕСЛИ(ABS(B19-B20)<2*$D$2;"предел";"")	
21	98	=2+(-1)^A21/A21	=ЕСЛИ(ABS(B20-B21)<2*$D$2;"предел";"")	
22	99	=2+(-1)^A22/A22	=ЕСЛИ(ABS(B21-B22)<2*$D$2;"предел";"")	
23	100	=2+(-1)^A23/A23	=ЕСЛИ(ABS(B22-B23)<2*$D$2;"предел";"")	
24	101	=2+(-1)^A24/A24	=ЕСЛИ(ABS(B23-B24)<2*$D$2;"предел";"")	

Рис. 7.4. Задача определения предела последовательности $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

На рис. 7.5 *а*) приведены результаты расчета (представление элементов последовательности в табличной форме), а рис. 7.5 *в*) иллюстрирует поведение элементов последовательности в зависимости от номера элемента. И табличное, и графическое представление последовательности позволяют сделать вывод о том, что последовательность сходится, пределом является b=2.

Представление элементов последовательности в табличной форме – трудоемкая работа. Проще задача решается применением сервиса *Подбор параметра.*

A	B	C	D	E
n	x_n		ε	
1	1		0,01	
2	2,5			
3	1,666666667			
4	2,25			
5	1,8			
6	2,166666667			
7	1,857142857			
8	2,125			
9	1,888888889			
10	2,1			
	...			
90	2,011111111			
91	1,989010989			
92	2,010869565			
93	1,989247312			
94	2,010638298			
95	1,989473684			
96	2,010416667			
97	1,989690722			
98	2,010204082			
99	1,98989899			
100	2,01			
101	1,99009901	предел		

$$x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

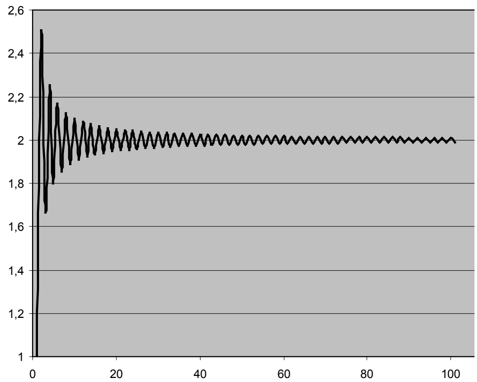


Рис. 7.5. Табличное и графическое представление последовательности $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

Пример. Найти предел последовательности $\frac{x^2}{x^2+1}$.

Решение. 1. Заполнить таблицу (рис. 7.6). В ячейку A1 можно ввести любое целое положительное число, в ячейках A2 и B2 введена расчетная формула, в ячейке B3 – условие остановки цикла (по умолчанию точность 0,001).

	A	B
1	10	=A1+100
2	=A1^2/(A1^2+A1+1)	=B1^2/(B1^2+B1+1)
3		=ABS(A2-B2)

Рис. 7.6. Оформление листа поиска предела последовательности

2. Выбрать сервис *Поиск решения* и установить целевую ячейку $B$3, равной значению 0, изменяя ячейки $A$1/

3. Нажать *Выполнить* (рис. 7.7 *a*).

4. Результат решения задачи показан на рис. 7.7 *b*).

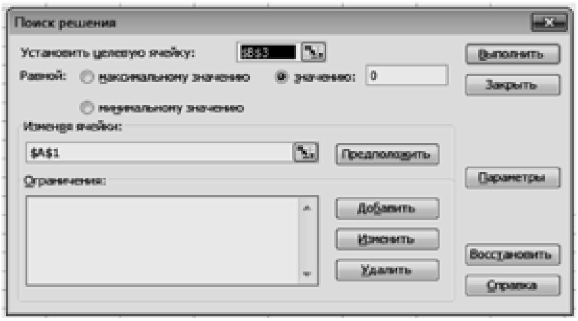
В ячейке B2 показано приближенное значение предела, в ячейке B3 – разность между 16394-м и 16494-м членами последовательности. Как видно, эта разность меньше удвоенного значения заданной точности.

Функциональные ряды

В отличие от числовых рядов членами функционального ряда являются функции. Поэтому ряд, составленный из функций одной и той же переменной x: $f_1(x) + f_{21}(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется функциональным. Примерами функционального ряда может служить степенной ряд $c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...$, или $c_0 + c_0x + c_0(1+x)x + ... + c_0(1+x)^{n-1}x + ...$.

Здесь c_0, c_1, … , c_n – коэффициенты степенного ряда.

Для вычисления сумм степенного ряда вида $a_1x^n + a_2x^{(n+m)} + a_3x^{(n+2m)} + \ldots + a_jx^{(n+(j-1)m)}$ в Excel есть функция: =*РЯД.СУММ*(*x*,*n*,*m*,*коэффициенты*). Аргументы функции: *x* – значение переменной степенного ряда; *n* – показатель степени *x* для первого члена степенного ряда; *m* – шаг, на который увеличивается показатель степени *n* для каждого следующего члена степенного ряда; *коэффициенты* – набор коэффициентов при соответствующих степенях *x*. Количеством значений в аргументе «*коэффициенты»* определяется количество членов степенного ряда. Например, если в аргументе «*коэффициенты»* три значения, то степенной ряд содержит три слагаемых.



	A	B
1	16394	16494
2	0,999939	0,999939
3		3,7E-07

а) *b*)

Рис. 7.7. Определение предела числовой последовательности

На рис. 7.8 приведены примеры заполнения листа для вычисления трех рядов и результаты вычисления.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	n	m	коэффициенты			результат
2	1	0	1	1			=РЯД.СУММ(A2;B2;C2;D2)
3	2	1	0	1	2	3	=РЯД.СУММ(A3;B3;C3;D3:F3)
4	-3	1	1	2	4	6	=РЯД.СУММ(A4;B4;C4;D4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	n	m	коэффициенты			результат
2	1	0	1	1			1
3	2	1	0	1	2	3	12
4	-3	1	1	2	4	6	-132

Рис. 7.8. Пример применения функции РЯД.СУММ

В строке 2 вычисляется значение ряда $1{\cdot}x^0$ при x=1, результат равен 1.

В строке 3 вычисляется значение ряда $1{\cdot}x^1+2{\cdot}x^1+3{\cdot}x^1$ при x=2, результат равен 12.

В строке 3 вычисляется значение ряда $2{\cdot}x^1+4{\cdot}x^2+6{\cdot}x^3$ при x= –3, результат равен -132.

В Excel есть и другие функции работы с рядами, предназначенные, в основном для выполнения финансовых расчетов.

Предел функции

Число A называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta$$

выполняется неравенство *а*)

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела функции $f(x)$ при $x \to a$ используется символическое выражение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или запись вида $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Другими словами, функция $f(x)$ имеет своим пределом число A при $x \to a$, если разность $f(x) - A$ представляет собой бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Последнее определение может быть положено в основу численного расчета предела функции.

Заметим, что для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы эта функция была определена в точке *a*. Определяющее значение для существования предела функции при $x \to a$ имеет только поведение этой функции в достаточно малой окрестности точки *a*. Вне этой окрестности функция может быть неограниченной.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если она неограниченно возрастает по абсолютной величине при $x \to a$. В таких случаях говорят, что $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и записывают это утверждение в виде $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Аналогичным образом формулируется понятие предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для нахождения предела функции используются те же примы, что и для нахождения предела последовательности. Для этого предварительно функция должна быть табулирована.

Пример. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

	A	B
1	2,9	3,1
2	=(A1^2-9)/(A1-3)	=(B1^2-9)/(B1-3)
3		=ABS(A1-B1)

Рис. 7.9. Определение предела

Решение. 1. Заполнить таблицу (рис. 7.9).

2. Вызвать сервис *Поиск решения* и установить целевую ячейку \$B\$3 равной значению 0, изменяя ячейки \$A\$1;\$B\$1 (рис. 7.10). *Нажать Выполнить.*

Результат решения представлен на рис. 7.11 в ячейках A1 и B1. Предел функции равен 6.

В ячейках A1 и B1 числа 2,9; 3,1Это потому, что определяется предел при $x \to 3$, а также минимизируется |A1-B1|.

Полученный результат очевиден. Действительно, $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3 = 6$ при x=3.

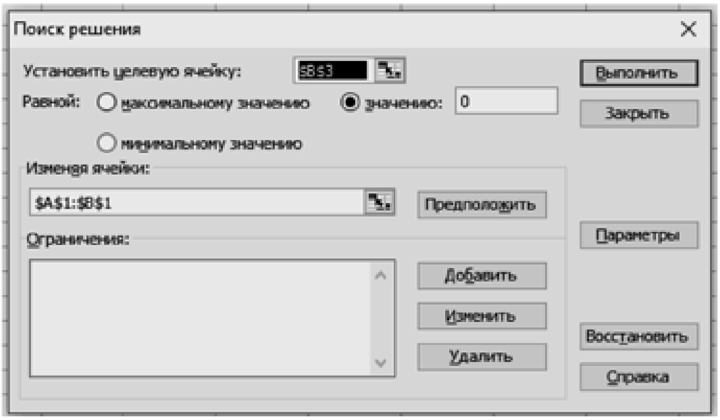


Рис. 7.10. Поиск решения

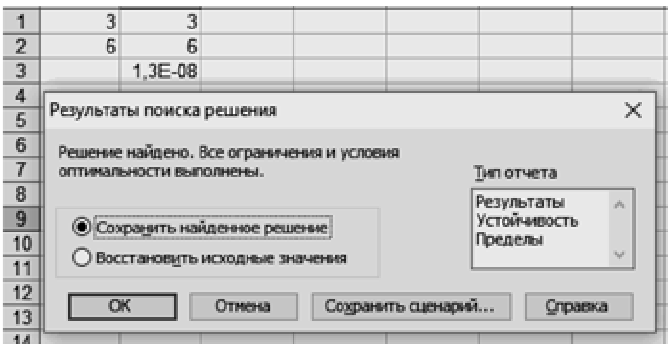


Рис. 7.11. Результат определения предела функции

7.2. Простейший анализ функций

Простейший анализ функций предполагает определение интервалов возрастания и убывания значений функций. Для решения этого вопроса используется понятие производной и определение ее знака на интервалах изменения функции.

Производная определяет скорость изменения функции, описывающей какой-либо процесс во времени или в пространстве.

Предел отношения изменения в точке функции к изменению переменной при стремлении изменения переменной к нулю называется производной непрерывной функции: $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

Геометрический смысл производной функции в точке – это тангенс угла наклона к оси x касательной к графику функции в этой точке: $tg(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если функция дискретная (табличная), то приближенное значение ее производной в точке находят с помощью конечных разностей:

$$y'(x_i) \approx \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) = \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Конечными разности называют потому, что они имеют конкретное, измеримое, конечное значение в отличие от величин, стремящихся к нулю или бесконечности.

Рассмотрим применение Excel для анализа функций, заключающегося в определении интервалов возрастания и убывания функции. Из геометрического смысла производной понятно, что на интервалах, где производная положительна – функция возрастает, а на интервалах, где производная отрицательна – функция убывает. В точке функции, соответствующей нулю производной функция имеет локальный максимум или локальный минимум.

Для анализа поведения функции будем использовать приведенную выше зависимость.

Пусть дана функция $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Исследуем ее поведение на интервале [-4;3].

Аналитическое решение

Производная функции $f'(x) = 2x + 2$, $f'(x) > 0$ при $x > -1$ и $f'(x) < 0$ при $x < -1$, следовательно на интервале $(-\infty;-1)$ функция $f(x)$ убывает, а на интервале $(-1;+\infty)$ возрастает. При $x = -1$ производная равна нулю, поэтому в этой точке функция имеет минимальное значение $f(-1) = -4$.

Реализация в MS Excel

Заполним таблицу (рис. 7.12).

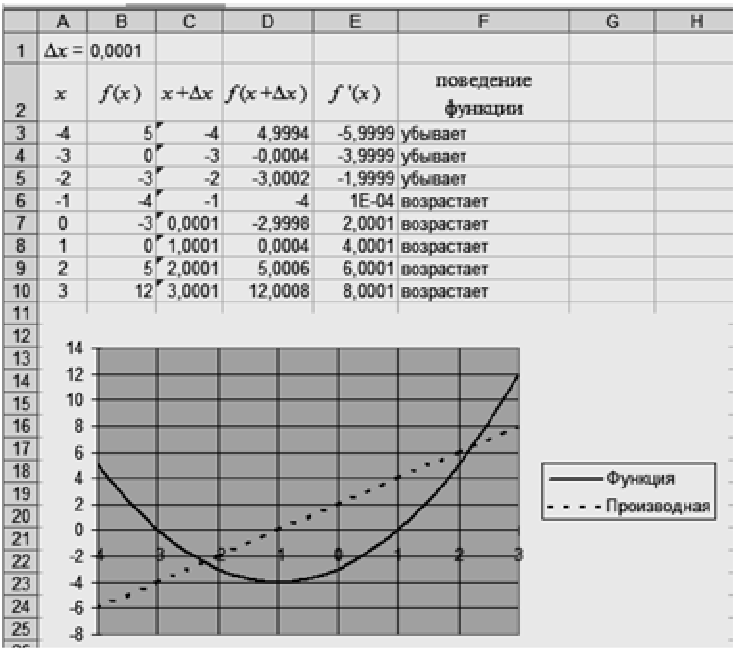
	A	B	C	D	E	F
1	Δx =	0,0001				
2	x	$f(x)$	$x+\Delta x$	$f(x+\Delta x)$	$f'(x)$	поведение функции
3	-4	=A3^2+2*A3-3	=A3+$B$1	=C3^2+2*C3-3	=(B3-D3)/(A3-C3)	=ЕСЛИ(E3<0;"убывает";"возрастает")
4	-3	=A4^2+2*A4-3	=A4+$B$1	=C4^2+2*C4-3	=(B4-D4)/(A4-C4)	=ЕСЛИ(E4<0;"убывает";"возрастает")
5	-2	=A5^2+2*A5-3	=A5+$B$1	=C5^2+2*C5-3	=(B5-D5)/(A5-C5)	=ЕСЛИ(E5<0;"убывает";"возрастает")
6	-1	=A6^2+2*A6-3	=A6+$B$1	=C6^2+2*C6-3	=(B6-D6)/(A6-C6)	=ЕСЛИ(E6<0;"убывает";"возрастает")
7	0	=A7^2+2*A7-3	=A7+$B$1	=C7^2+2*C7-3	=(B7-D7)/(A7-C7)	=ЕСЛИ(E7<0;"убывает";"возрастает")
8	1	=A8^2+2*A8-3	=A8+$B$1	=C8^2+2*C8-3	=(B8-D8)/(A8-C8)	=ЕСЛИ(E8<0;"убывает";"возрастает")
9	2	=A9^2+2*A9-3	=A9+$B$1	=C9^2+2*C9-3	=(B9-D9)/(A9-C9)	=ЕСЛИ(E9<0;"убывает";"возрастает")
10	3	=A10^2+2*A10-3	=A10+$B$1	=C10^2+2*C10-3	=(B10-D10)/(A10-C10	=ЕСЛИ(E10<0;"убывает";"возрастает")

Рис. 7.12. Анализ поведения функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Результат решения задачи представлен на рис. 7.13.

Определим точку перегиба функции (минимального значения). Для этого воспользуемся сервисом *Поиск решения*. Заполним таблицу (рис. 7.14 *a*), вызовем сервис Поиск решения и установим: целевая ячейка $B$2, равной минимальному значению, изменяя ячейки $A$2 (рис. 7.14 *b*).

Нажав *Выполнить* получаем результат: $f(x) = -4$ при $x = -2$ (рис. 7.14 *c*), что совпадает с решением, полученным аналитическим путем.

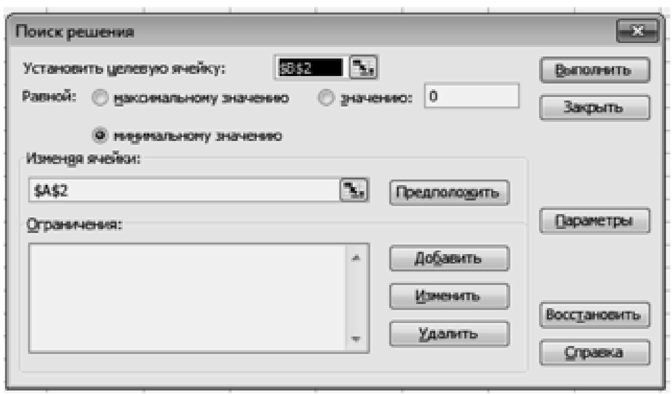


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Δx =	0,0001						
2	x	$f(x)$	$x+\Delta x$	$f(x+\Delta x)$	$f'(x)$	поведение функции		
3	-4	5	-4	4,9994	-5,9999	убывает		
4	-3	0	-3	-0,0004	-3,9999	убывает		
5	-2	-3	-2	-3,0002	-1,9999	убывает		
6	-1	-4	-1	-4	1E-04	возрастает		
7	0	-3	0,0001	-2,9998	2,0001	возрастает		
8	1	0	1,0001	0,0004	4,0001	возрастает		
9	2	5	2,0001	5,0006	6,0001	возрастает		
10	3	12	3,0001	12,0008	8,0001	возрастает		

Рис. 7.13. Определение интервалов возрастания и убывания функции

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-1,1	=A2^2+2*A2-3

a)



	A	B
1	x	$f(x)$
2	-1	-4

c)

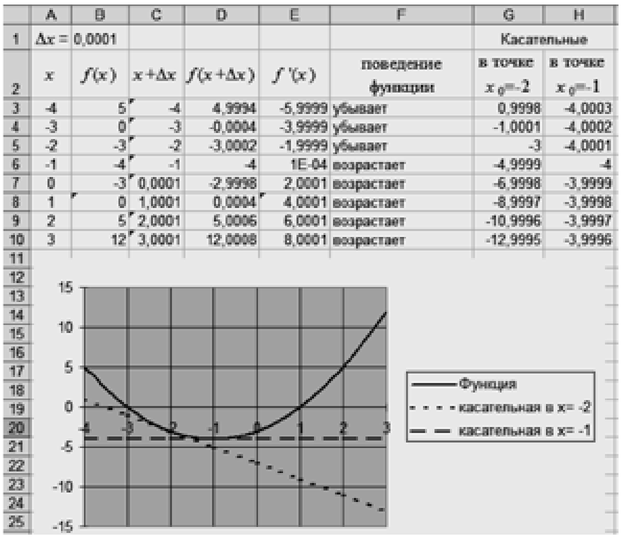
b)

Рис. 7.14. Определение минимального значения функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
где $f'(x_0)$ – угловой коэффициент к касательной.

Построим касательные к функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ в точках x_0= –3; x_0= – 2.

Воспользуемся таблицей, представленной на рис. 7.12, дополнив ее двумя столбцами: в ячейку G3 введем формулу =$B$5+$E$5*(A3-$A$5), а в ячейку H3 формулу =$B$6+$E$6*(A3-$A$6) и скопируем введенные формулы вниз по столбцам. В результате в столбце G получим координаты y касательной к точке $x_0 = -2$, в столбце H – координаты y касательной к точке $x_0 = -1$ (рис. 7.15).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Δx =	0,0001					Касательные	
2	x	$f(x)$	$x+\Delta x$	$f(x+\Delta x)$	$f'(x)$	поведение функции	в точке x_0=-2	в точке x_0=-1
3	-4	5	-4	4,9994	-5,9999	убывает	0,9998	-4,0003
4	-3	0	-3	-0,0004	-3,9999	убывает	-1,0001	-4,0002
5	-2	-3	-2	-3,0002	-1,9999	убывает	-3	-4,0001
6	-1	-4	-1	-4	1E-04	возрастает	-4,9999	-4
7	0	-3	0,0001	-2,9998	2,0001	возрастает	-6,9998	-3,9999
8	1	0	1,0001	0,0004	4,0001	возрастает	-8,9997	-3,9998
9	2	5	2,0001	5,0006	6,0001	возрастает	-10,9996	-3,9997
10	3	12	3,0001	12,0008	8,0001	возрастает	-12,9995	-3,9996

Рис. 7.15. Построение касательных

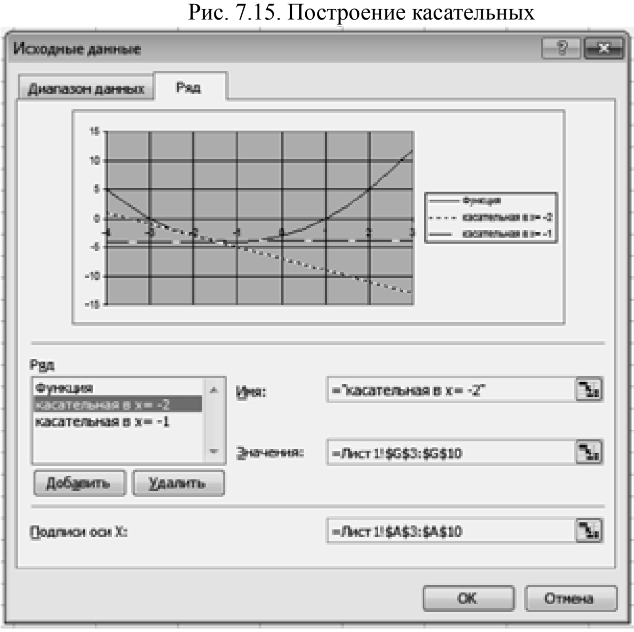


Рис. 7.16. Изменение данных

Для построения касательных в исходные данные диаграммы внесены изменения, представленные на рис. 7.16.

Касательная в точке $x_0 = -1$ параллельна оси ординат, поскольку эта точка является ординатой минимума исследуемой функции.

7.3. Методы численного дифференцирования

Производная непрерывной функции *f(x)* определяется выражением:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$$

Заменяя приращение dx на конечную величину Δx, называемую шагом дифференцирования, получаем выражение:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если дифференцируемая функция задана в виде непрерывной функции (рис. 7.17), то для вычисления значения дифференциала необходимо получить значение функции *f(x)* в точке x_0 и в точке $x_0 + \Delta x$. После чего можно вычислить значение производной функции $f'(x)$.

Если функция задана выборкой, то есть набором значений функции в точках (рис. 7.18), то выражение для численного дифференцирования (при условии, что x образуют возрастающую последовательность) можно переписать в виде: $f_i' = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$ (правая разность), либо $f_i' = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ (левая разность) – рис. 7.19.

Рис. 7.17. Непрерывная функция

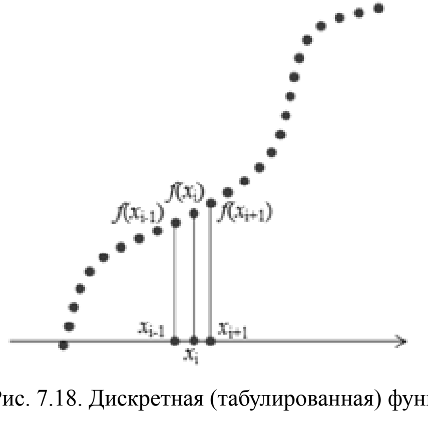


Рис. 7.18. Дискретная (табулированная) функция

С точки зрения точности методы левосторонней и правосторонней разностей равнозначны. Более точное значение дает метод центральных разностей по трем или пяти узлам.

Алгоритм численного дифференцирования следующий:

1. Для вычисления значения производной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$, необходимо выбрать шаг $h = 10^{-1} = 0{,}1$, т.е. шаг равен требуемой точности.

2. Отрезок $[a;b]$ разбить на $n=\dfrac{b-a}{h}$ частичных отрезков (на отрезке $[a;b]$ строится сетка с шагом h: $x_0=a$; $x_i=x_0+ih$, $i=1, 2, \ldots$).

3. Вычислить значения функции $f(x)$ в узлах сетки $f_i=f(x_i)$.

4. Вычислить приближенные значения производной в узлах сетки по одной из формул:

1	формула левых разностей	$f_i'\approx\dfrac{f_i-f_{i-1}}{-h}$,	$i=1, 2\ldots, n$
2	формула правых разностей	$f_i'\approx\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h}$,	$i=0, 2\ldots, n-1$
3	формула центральных разностей, построенная по трем узлам	$f_i'\approx\dfrac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$,	$i=1, 2\ldots, n-1$
4	формула центральных разностей, построенная по пяти узлам	$f_i'\approx\dfrac{f_{i-2}-8f_{i-1}+8f_{i+1}-f_{i+2}}{12h}$	$i=2, 3,\ldots, n-2$

Наглядно сравнить одностороннюю и двустороннюю разности можно представив производную, как тангенс угла наклона касательной к функции в точке x_i. На рис. 7.19 точное значение производной обозначено как $tg\alpha_1$. В методе односторонней разности (рис. 7.19, *a*) вместо касательной проводится прямая через точки $f(x_i)$ и $f(x_i+1)$. Если в окрестностях точки $f(x_i)$ функция не гладкая, то значение производной ($tg\alpha_2$) будет существенно отличаться от точного. В то время как в методе двусторонней разности, проведя прямую через точки $f(x_i-1)$ и $f(x_i+1)$ (рис. 7.19, *b*), можно получить значение производной практически совпадающее с точным.

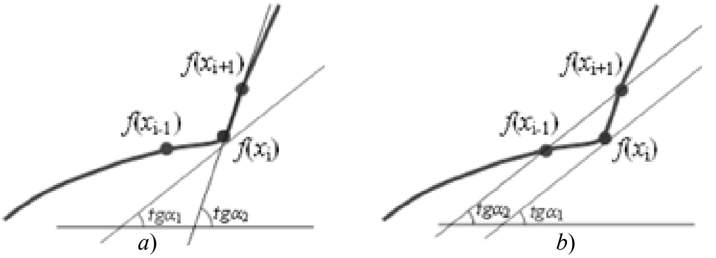


Рис. 7.19. Пояснения точности односторонней и двусторонней разностей

Пример. Вычислить производную функции $f(x)=x^3+3x^2-72x+90$ методами левой, правой, двусторонних (центральных) разностей, построить графики функции и производной.

Аналитическое решение

Производная функции: $f'(x)=3x^2+6x-72$.

Реализация в MS Excel

В ячейки таблицы ввести следующие формулы:

F4: =F1;

F5: =(F3-F2)/F4;

A10: =F2;
A11: =A10+$F$4;
B10: =A10^3+3*A10^2-72*A10+90;
C11: =(B10-B11)/(-$F$4);
D10: =(B11-B10)/$F$4;
E11: =(B12-B10)/($F$4*2);
F12: =(B10-8*B11+8*B13-B14)/(12*$F$4);
G10: =3*A10^2+6*A10-72.

Формулы, введенные в ячейки A11, F10, C11, D10, E11, F12, G10 копируются в пределах своих столбцов до ячеек с номерами строк как показано в нижней части рис. 7.20.

	A	B	C	D	E	F	G
1				точность	$\varepsilon=$	0,1	
2			нижняя граница интервала		a	1	
3			верхняя граница интервала		b	6,5	
4				шаг	$h=$	0,1	
5					$n=$	55	
6			функция	$f(x)=x^3+3x^2-72x+90$			
7			производная	$f'(x)=3x^2+6x-72$			
8			левых	правых	центральных, 3 узла	центральных, 5 узлов	точное
9	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$
10	1	22		-62,39			-63
11	1,1	15,761	-62,39	-61,13	-61,76		-61,77
12	1,2	9,648	-61,13	-59,81	-60,47	-60,48	-60,48
13	1,3	3,667	-59,81	-58,43	-59,12	-59,13	-59,13
14	1,4	-2,176	-58,43	-56,99	-57,71	-57,72	-57,72
62	6,2	-2,752	78,37	82,69	80,53	80,52	80,52
63	6,3	5,517	82,69	87,07	84,88	84,87	84,87
64	6,4	14,224	87,07	91,51	89,29		89,28
65	6,5	23,375	91,51				93,75

Рис. 7.20. Определение производной методами односторонних и двусторонних разностей

На рис. 7.21 приведены графики, построенные на основе расчетных данных, а на рис. 7.22 – фрагмент графиков производных. Из рис. 7.22 видно, что производные, вычисленные по формулам односторонних разностей, имеют ошибку относительно производной, вычисленной аналитическим путем. Производные, определенные по формулам центральных разностей практически совпадают с результатом аналитического расчета.

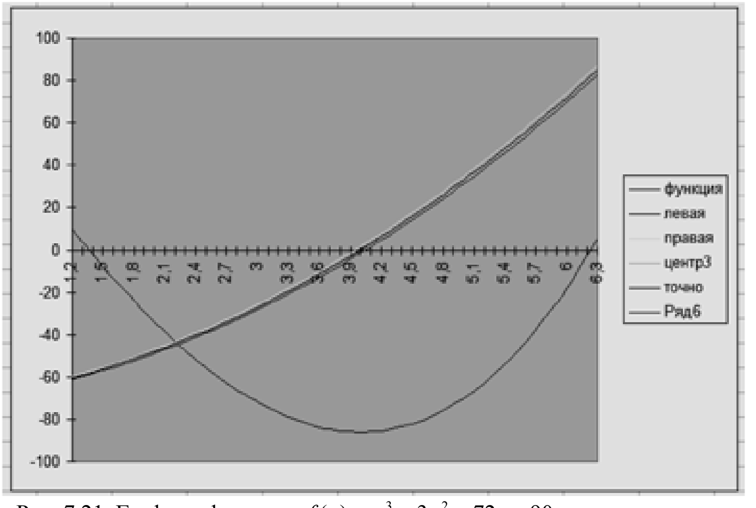


Рис. 7.21. Графики функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ и производных

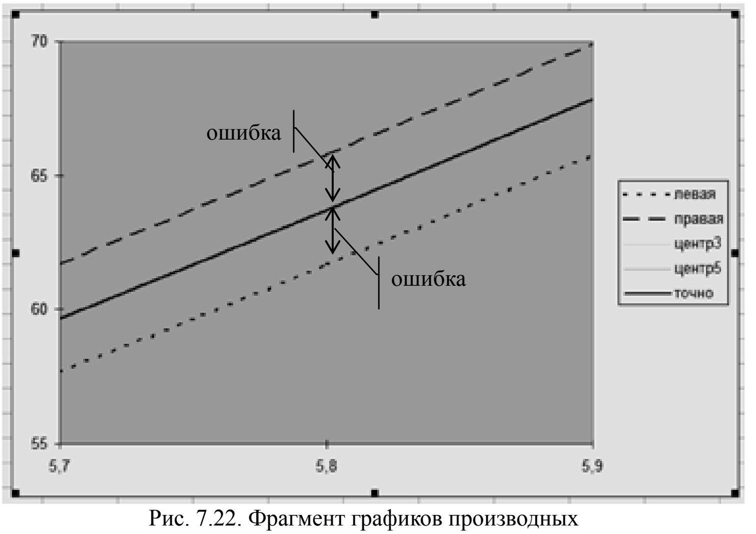


Рис. 7.22. Фрагмент графиков производных

7.4. Методы численного интегрирования

В ряде задач возникает необходимость вычисления определенного интеграла от некоторой функции $F(x) = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Численное интегрирование применяется, когда:

сама подынтегральная функция не задана аналитически, а например, представлена в виде таблицы значений;

аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.

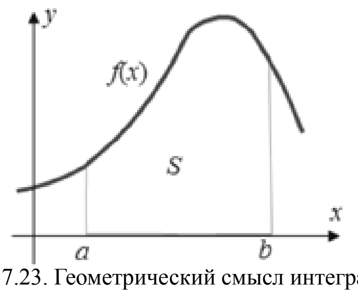


Рис. 7.23. Геометрический смысл интеграла

Геометрический смысл интеграла заключается в том, что если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, отрезком оси абсцисс, прямой $x=a$ и прямой $x=b$ (рис. 7.23).

Таким образом, вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

Способы численного вычисления определенных интегралов основаны на замене интеграла конечной суммой $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ (квадратурная формула), где c_i – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от выбранного метода численного интегрирования, x_i – узлы интегрирования $x_i \in [a,b]$, $i = 1,2,...,n$.

Разделив отрезок $[a, b]$ на n равных элементарных отрезков длиной каждого $h = (b-a)/n$, формула приближенного вычисления интеграла может быть переписана в виде: $\int_a^b f(x)d(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$.

Для численного интегрирования на отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Метод прямоугольников

Заменим фигуру «под графиком функции» на множество прямоугольников (рис. 7.24).

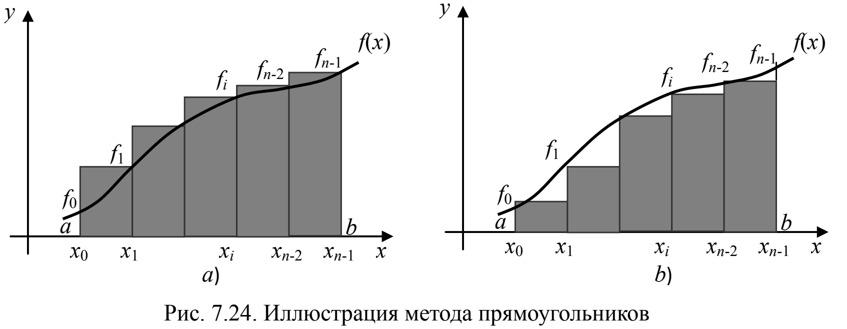


Рис. 7.24. Иллюстрация метода прямоугольников

Пусть $f(x) = f(x_{i-1}),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$, т.е. функция $f(x)$ аппроксимируется левой кусочно-постоянной интерполяцией. Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx = f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = hf(x_{i-1}).$$

Искомый интеграл $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$. Это формула **левых прямоугольников**. Геометрическая интерпретация метода левых прямоугольников представлена на рис. 7.25, *a*).

Аналогично может быть получена формула **правых прямоугольников**. Здесь $f(x) = f(x_i),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$. В результате получим: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Геометрическая интерпретация метода правых прямоугольников представлена на рис. 7.25, *b*).

Погрешность r вычисления интеграла методом левых и правых прямоугольников определяется по следующей формуле: $|r| \le \frac{Mh}{2}(b-a)$, где $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$.

Если на каждом отрезке $[x_i - x_{i-1}]$ заменить значение функции $f(x)$ на ее значение в середине отрезка, то получим формулу **средних прямоугольников**: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-½})$. Если функция $f(x)$ задана таблично, среднее значение на локальном отрезке можно вычислить с помощью линейной интерполяции $x_{i-½} = \frac{x_{i-1} + x_1}{2}$, и тогда метод средних имеет вид: $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.

Погрешность r вычисления интеграла методом средних определяется по следующей формуле: $r = \frac{Mh^2}{24}(b-a)$.

Метод трапеций

В методе трапеций криволинейная трапеция заменяется на прямоугольную (рис. 7.25), площадь которой вычисляется по известной формуле:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_{i-1} - x_i) = h\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

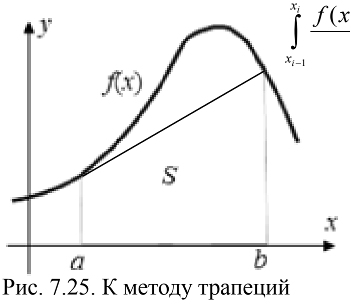


Рис. 7.25. К методу трапеций

Для отрезка $[a, b]$ интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$ либо

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Погрешность такая же, как при использовании метода средних прямоугольников.

Метод Симпсона

При вычислении интеграла $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ с помощью метода Симпсона (парабол), функцию $f(x)$ на локальном отрезке $[x_i - x_{i-1}]$ заменяют параболой, проходящей через точки $x_{i-1}, f(x_{i-1}),\ x_{i-\frac{1}{2}}, f(x_{i-\frac{2}{3}}),\ x_i, f(x_i)$, где $x_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_{i-1} - x_i}{2}$ – середина локального отрезка.

Формула Симпсона имеет вид: $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{h}{6}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right]$

Можно показать, что формула Симпсона имеет точность на два порядка выше, чем точность метода трапеций.

Пример. Вычислить интеграл функции $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2+1}dx$ по формулам левых, правых, средних прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона.

Аналитическое решение

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}dx = \int\limits_0^1\left(\frac{1-3x}{x^2+1}+1\right)dx = \int\limits_0^1\left(\frac{1-3x}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx = \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{3x}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx =$$

$$= -3\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx = -\frac{3}{2}\int\limits_1^2 \frac{1}{u}du + \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx =$$

$$= \left(-\frac{3\log(u)}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx = -\frac{3\log(2)}{2} + \int\limits_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx + \int\limits_0^1 1dx =$$

$$-\frac{3\log(2)}{2} + \tan^{-1}x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 1dx = = \frac{\pi}{4} - \frac{3\log(2)}{2} + \int\limits_0^1 1dx = \frac{\pi}{4} - \frac{3\log(2)}{2} + x\Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{3\log(2)}{2} = \frac{1}{4}\left(4 + \pi - 6\log(2)\right) = 0{,}7456773925575304.$$

Как видно, вычисление интеграла даже такой относительно простой функции остаточно сложно. В практических задачах встречаются функции, аналитическое интегрирование которых не возможно.

Реализация в MS Excel

Для определения требуемого шага разбиения отрезка [0, 1] необходимо определить максимальное значение производной на данном интервале – число *M*. Эту задачу можно решить численным методом, как рассматривалось выше.

Аналитическое выражение производной

$$f'(x) = \frac{-2x(2-3x+x^2) + (1+x^2)(-3+2x)}{(1+x^2)^2}$$

Максимальное значение производной на заданном интервале равно – 0,5. Тогда по приведенным выше формулам для погрешности $r \le 0{,}01$ при использовании формул левых и правых прямоугольников необходимый шаг h=0,01, а количество интервалов разбиения n=100. Для формул средних прямоугольников, трапеций и Симпсона такое разбиение обеспечивает большую точность вычислений. Поэтому зададимся h=0,01.

На рис. 7.26 показано заполнение листа формулами для вычисления интеграла $\int_0^1 \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}dx$ (показана только часть строк из полного количества – 100).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	i	xi	Правые	Левые	$(x_i+x_{i-1})/2$	Средние	Трапеции	Симпсона
3	0	0						
4	1	0,01	=(B4^2-3*B4+2)/(B4^2+1)	=(B3^2-3*B3+2)/(B3^2+1)	=(B3+B4)/2	=(E4^2-3*E4+2)/(E4^2+1)	=(C4+D4)/2	=(C4+D4+F4*4)/6
5	2	0,02	=(B5^2-3*B5+2)/(B5^2+1)	=(B4^2-3*B4+2)/(B4^2+1)	=(B4+B5)/2	=(E5^2-3*E5+2)/(E5^2+1)	=(C5+D5)/2	=(C5+D5+F5*4)/6
6	3	0,03	=(B6^2-3*B6+2)/(B6^2+1)	=(B5^2-3*B5+2)/(B5^2+1)	=(B5+B6)/2	=(E6^2-3*E6+2)/(E6^2+1)	=(C6+D6)/2	=(C6+D6+F6*4)/6
7	4	0,04	=(B7^2-3*B7+2)/(B7^2+1)	=(B6^2-3*B6+2)/(B6^2+1)	=(B6+B7)/2	=(E7^2-3*E7+2)/(E7^2+1)	=(C7+D7)/2	=(C7+D7+F7*4)/6
8	5	0,05	=(B8^2-3*B8+2)/(B8^2+1)	=(B7^2-3*B7+2)/(B7^2+1)	=(B7+B8)/2	=(E8^2-3*E8+2)/(E8^2+1)	=(C8+D8)/2	=(C8+D8+F8*4)/6
9	6	0,06	=(B9^2-3*B9+2)/(B9^2+1)	=(B8^2-3*B8+2)/(B8^2+1)	=(B8+B9)/2	=(E9^2-3*E9+2)/(E9^2+1)	=(C9+D9)/2	=(C9+D9+F9*4)/6
10	7	0,07	=(B10^2-3*B10+2)/(B10^2+1)	=(B9^2-3*B9+2)/(B9^2+1)	=(B9+B10)/2	=(E10^2-3*E10+2)/(E10^2+1)	=(C10+D10)/2	=(C10+D10+F10*4)/6
11	8	0,08	=(B11^2-3*B11+2)/(B11^2+1)	=(B10^2-3*B10+2)/(B10^2+1)	=(B10+B11)/2	=(E11^2-3*E11+2)/(E11^2+1)	=(C11+D11)/2	=(C11+D11+F11*4)/6

a)

	I	J	K	L
1				
2				
3				
4	*h*=	0,01		
5	*a*=	0		
6	*b*=	1		
7	*n*=	=(J6-J5)/J4		
8			**Погрешность**	
9	**Точ.=**	0,745677392557	**абсолютная**	**относительная**
10	**ЛП=**	=J4*СУММ(D4:D102)	=ABS(J10-$J$9)	=K10/J10
11	**СП=**	=J4*СУММ(F4:F102)	=ABS(J11-$J$9)	=K11/J11
12	**ПП=**	=J4*СУММ(C4:C102)	=ABS(J12-$J$9)	=K12/J12
13	**Трап.=**	=J4*СУММ(G4:G102)	=ABS(J13-$J$9)	=K13/J13
14	**Симп.=**	=J4*СУММ(H4:H102)	=ABS(J14-$J$9)	=K14/J14

b)

Рис. 7.26. Численное интегрирование

В столбце A проставлены номера интервалов, в столбце B – значения переменной x_i, соответствующие номерам интервалов при шаге h=0,01.

В столбце C – формулы для расчета площади элементарных прямоугольников согласно формуле правых прямоугольников для интегрируемой функции C4: =(B4^2-3*B4+2)/(B4^2+1). Формула копируется по столбцу до i=100.

В столбце – формулы для расчета площади элементарных прямоугольников согласно формуле левых прямоугольников для интегрируемой функции B4:=(B3^2-3*B3+2)/(B3^2+1). Формул а копируется по столбцу до i=100.

В столбце E – формулы для расчета среднего значения переменной для каждого интервала E4:= =(B3+B4)/2. Формула копируется по столбцу до i=100.

В столбце F – формулы для расчета площади элементарных прямоугольников согласно формуле средних прямоугольников для интегрируемой функции F4: =(E3^2-3*E3+2)/(E3^2+1). Формула копируется по столбцу до i=100.

В столбце G формула для расчета площади «элементарной трапеции», соответствующей одному интервалу, определяется как среднее площадей прямоугольников, определенных по формулам левых и правых прямоугольников – G4: =(C5+D5)/2. Формула копируется по столбцу до i=100.

В столбце H введены формулы формулы для расчета площади «элементарных парабол» согласно формуле Симпсона для интегрируемой функции H4: =(C4+D4+F4*4)/6. Формула копируется по столбцу до i=100.

Результаты интегрирования определяются как сумма площадей всех частичных площадей, соответствующих «своим» интервалам.

Интеграл на основе формулы левых прямоугольников рассчитывается в ячейке J10: =J4*СУММ(D4:D102).

Интеграл на основе формулы правых прямоугольников рассчитывается в ячейке J12: =J4*СУММ(C4:C102).

Интеграл на основе формулы средних прямоугольников рассчитывается в ячейке J11: =J4*СУММ(F4:F102).

Интеграл на основе формулы трапеций рассчитывается в ячейке J11: =J4*СУММ(F4:F102).

Интеграл на основе формулы Симпсона рассчитывается в ячейке J11: =J4*СУММ(H4:H102).

В ячейках K10:K14 записаны формулы ошибки вычисления по сравнению с точным значением интеграла, а в ячейках L10:L14 – относительные величины ошибок.

На рис. 7.27 представлены результаты численных расчетов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	xi	Правые	Левые	$(x_i+x_{i-1})/2$	Средние	Трапеции	Симпсона				
2	0	0										
3	1	0,01	1,969903	2,000000	0,005	1,984975	1,984952	1,984967	h=	0,01		
4	2	0,02	1,939624	1,969903	0,015	1,954785	1,954764	1,954778	a=	0		
5	3	0,03	1,909182	1,939624	0,025	1,924422	1,924403	1,924416	b=	1		
6	4	0,04	1,878594	1,909182	0,035	1,893905	1,893888	1,893899	n=	100		
7	5	0,05	1,847880	1,878594	0,045	1,863252	1,863237	1,863247			Погрешность	
8	6	0,06	1,817059	1,847880	0,055	1,832482	1,832469	1,832478	Точ.=	0,745677	абсолютная	относительная
9	7	0,07	1,786148	1,817059	0,065	1,801613	1,801603	1,801610	ЛП=	0,755647	0,009970	1,3194%
10	8	0,08	1,755167	1,786148	0,075	1,770665	1,770657	1,770662	СП=	0,745642	0,000036	0,0048%
11	9	0,09	1,724135	1,755167	0,085	1,739656	1,739651	1,739654	ПП=	0,735698	0,009979	1,3564%
12	10	0,1	1,693069	1,724135	0,095	1,708605	1,708602	1,708604	Трап.=	0,745673	0,000005	0,0006%
13	11	0,11	1,661990	1,693069	0,105	1,677530	1,677530	1,677530	Симп.=	0,745652	0,000025	0,0034%

Рис. 7.27. Фрагмент листа с численными расчетами интеграла $\int_0^1 \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}dx$

Видно, что большей погрешность вычислений характеризуются методы левых и правых прямоугольников. Наиболее точные результаты получены для конкретного примера методами Симпсона и трапеций. Несколько уступает по точности метод средних прямоугольников.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму членов числовой последовательности $\sum_{n=10}^{15}\frac{n}{\sqrt{n}}$ с 10 члена по 15 член.

2. Вычислить сумму первых двадцати членов числовой последовательности . Вычислить сумму первых двадцати членов числовой последовательности $\frac{n^3 - n^2 + n}{n^4}$.

3. Вычислить пределы числовых последовательностей

$$\left(5 - \frac{1}{n}\right)^2, \quad \frac{n^2 + 2}{n^3 - 7}, \quad \frac{\sqrt{n-3} - 15}{\sqrt{n}}.$$

4. Найти пределы функций

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}, \quad \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{4+x} - 2}, \quad \lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 3x + 9}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

5. Исследовать поведение функции на заданном интервале, построить касательные к любым точкам анализируемых функций в пределах заданных интервалов:

1. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}, \ x \in [4;4]$ 2. $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 2}, \ x \in [5;5]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \ x \in [2;4]$ 4. $f(x) = x - \frac{4}{x^2 + 7}, \ x \in [2;3]$

6. Вычислить производную функции $y = x\cos x \sin x + 0{,}5\cos^2 x$ на интервале от 3 до 5 методами правых, левых, центральны по трем и пяти точкам разностей. Построить график функции на интервале от -5 до 16 и графики производных, вычисленные различными методами на интервале от 3 до 5. Сравнить с аналитической решением.

7. Вычислить приближенное значение интегралов $\int_2^4 \frac{dx}{\ln x}$, $\int_0^1 \cos x^2 dx$ всеми рассмотренными методами. Оценить точность вычисление относительно результата, полученного аналитическим методом.

8. КОМБИНАТОРИКА

Основными задачами комбинаторики являются: определение вида соединения *k* элементов из множества *n* элементов ($k<n$) и подсчет числа соединений.

Выбор вида соединений и формулы для расчетов приведены в виде алгоритма на рис. 8.1.

На рис. 8.2 приведен вариант заполнения листа Excel для расчета числа соединений различного характера.

Рис. 8.2. Расчет числа сочетаний, размещений и перестановок

Основной используемой функцией является функция =*ФАКТР*(*число*), вычисляющая факториал числа, являющегося ее аргументом.

Сочетания без повторений из *n* по *k* – всевозможные *неупорядоченные* подмножества данных *n* элементов, состоящие из *k* элементов.

Формула для расчета введена в ячейку С4 (рис. 8.2). Очевидным условием является $n \geq k$. Для проверки выполнения условия применена функция *ЕСЛИ*. Если условие не выполняется в ячейке отображается сообщение «ошиб_данных». При выполнении условия расчет проводится по соответствующей формуле (см. рис. 8.1).

Пример. Сколькими способами можно из 10 различных картин выбрать 3?

Аналитическое решение: $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{720}{6} = 120.$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 120 способов.

Сочетания с повторениями – сочетание из *n* элементов, в каждое из которых входит *k* элементов, причем один и тот же элемент может *повторяться* в каждом сочетании любое число раз, но не более *k* раз.

Формула для расчета введена в ячейку D4 (рис. 8.2).

Рис. 8.1. Формулы комбинаторики

Пример. В художественном салоне продаются картины 10 направлений живописи. Сколько вариантов существует для покупки 3 картин?

Аналитическое решение: $\overline{C}_{10}^{3} = \dfrac{(10+3-1)!}{3!\cdot(10-1)!} = \dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 220 вариантов.

Размещениями без повторений из *n* элементов по *k* называются всевозможные *упорядоченные* подмножества, содержащие *k* элементов из данных *n*.

Формула для расчета введена в ячейку E4 (рис. 8.2).

Пример. Сколько можно составить из 10 цифр трехзначных чисел, содержащих различные цифры?

Аналитическое решение: $A_{10}^{3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 720 трехзначных чисел.

Размещениями с повторениями из *n* элементов по *k* элементов называются упорядоченные множества, каждое из которых содержит *k* необязательно различных элементов из данного множества n элементов.

Формула для расчета введена в ячейку F4 (рис. 8.2).

Пример. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одному человеку на место) на соревнованиях, в которых участвуют 10 человек?

Аналитическое решение: $\overline{A}_{10}^{3} = 10^{3} = 1000./$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 1000 вариантов.

Перестановки без повторений – всевозможные упорядоченные множества, составленные из всех *n* элементов данного множества

Формула для расчета введена в ячейку G4 (рис. 8.2).

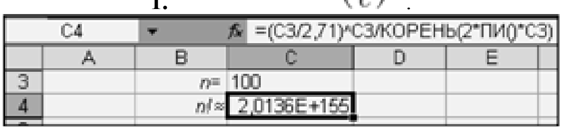
Пример. Сколькими способами можно рассадить 10 зрителей в видеосалоне на 10 мест?

Аналитическое решение: $P_{10} = 10! = 3628800.$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 3628800 вариантов.

При больших значениях *n* факториал может быть приближенно определен по формуле Стирлинга:

1. $$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$



C4 | fx =(C3/2,71)^C3/КОРЕНЬ(2*ПИ()*C3)

	A	B	C	D	E
3		n=	100		
4		n!≈	2,0136E+155		

Рисунок 8.3 – Определение факториала по формуле Стирлинга

Перестановки с повторениями – перестановки из n элементов, в каждую из которых входит k_1 элементов *a*, k_2 элементов *b*, …, k_m элементов *l*. Причем $k_1+ k_2...+ k_m=n$.

Формула для расчета введена в ячейку H4 (рис. 8.2). Исходными данными, кроме *n* в ячейке A4 являются численности групп элементов, записываемые в ячейки А7:А14. Т.е. предусмотрено наличие не более 8 групп элементов.

Пример. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика»?

Аналитическое решение: В слове буква *м* повторяется 2 раза, *а* – три раза, *т* – 2 раза, *е* – 1 раз, *и* – 1 раз, *к* – 1 раз.

$$\overline{P}_{10}(k_1=2, k_2=3, k_3=2, k_4=1, k_5=1, k_6=1)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=151200$$

Решение в Excel приведено на рис. 8.2 – 3151200 способов.
В Excel есть функция *ЧИСЛКОМБ*(*число*;*число_выбранных*), используемая для определения общего числа всех групп, которые можно составить из элементов данного множества. Т.е. эта функция позволяет определить число сочетаний без повторений из *n* элементов по *k*. Окно функции при расчете числа сочетаний из 10 по 3 представлено на рис. 8.4.

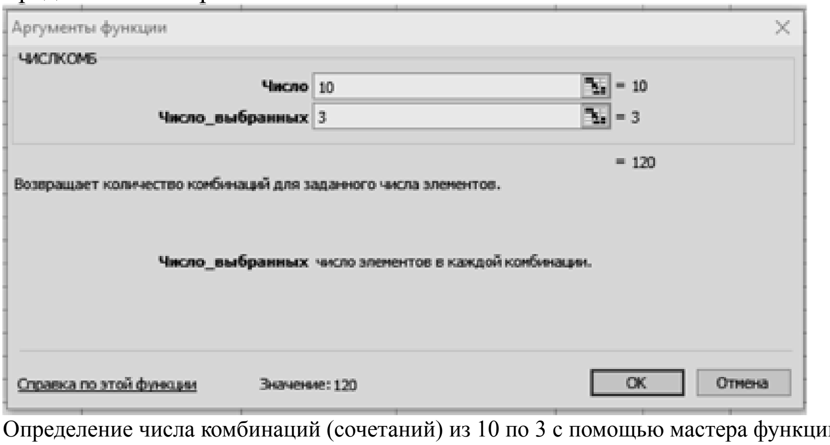


Рис. 8.4. Определение числа комбинаций (сочетаний) из 10 по 3 с помощью мастера функций

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно составить список различных фамилии 5 человек?
2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 7, 8, если каждую цифру в любом числе использовать не более 1 раза?
3. 10 кресел поставлены в ряд. Сколькими способами на них могут сесть два человека?
4. Сейф запирается цифровым замком, циферблат которого состоит из ста клавиш с цифрами, расположенными по окружности. Для того чтобы открыть сейф, необходимо нажать какие–то три клавиши, причем известно, что между любыми двумя искомыми клавишами располагаются не менее десяти клавиш. Сколько комбинаций из трех клавиш необходимо перепробовать, чтобы заведомо открыть сейф?

5. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

6. Из двенадцати кандидатов тренер отбирает 5 и составляет из них баскетбольную команду. Два кандидата могут играть центровыми, четверо – только в защите, а остальные – только в нападении. Предполагается, что баскетбольная команда состоит из одного центрового, двух защитников и двух нападающих. Сколькими способами тренер может составить команду?

7. Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

8. Сколько сигналов можно поднять на мачте, имея 4 флага различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов?

9. По формуле Стирлинга построить график функции n!

10. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

11. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

12. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

13. В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?

14. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

9. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Для реализации функций алгебры логики (булевой алгебры) используются логические функции: ЕСЛИ, И, ИЛИ, НЕ, ИСТИНА и ЛОЖЬ.

Соотношения между логическими переменными и логическими функциями в алгебре логики отображается с помощью таблиц истинности. Таблицы истинности наглядно показывают, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее логических переменных.

В Excel указанные логические функции записываются следующим образом:

=*И*(*логическое_значение 1*;*логическое_значение2*,…) – проверяет, все ли логические элементы имеют значение ИСТИНА, и возвращает значение ИСТИНА, если истинны все аргументы;

=*ИЛИ*(*логическое_значение1*;*логическое_значение2*,…) – проверяет, имеет ли хотя бы один из аргументов значение ИСТИНА, и возвращает значение ИСТИНА или ЛОЖЬ; значение ЛОЖЬ возвращается если все аргументы имеют значение ЛОЖЬ;

=*НЕ*(*логическое_значение*) - изменяет значение ИСТИНА на значение ЛОЖЬ, а значение ЛОЖЬ на значение ИСТИНА;

=ИСТИНА() – возвращает логическое значение ИСТИНА;

=ЛОЖЬ() – возвращает логическое значение ЛОЖЬ.

В виде аргументов функций *И* и *ИЛИ* должны приниматься условия либо ссылки на ячейки, возвращающие логические значения. Количество аргументов не может превышать 255. Первый аргумент является обязательным.

Функция =*ЕСЛИ*(*Логическое_выражение*;*Значение_если_истина*;*Значение_если_ложь*) является одной из самых полезных, имеющихся в Excel, функций. Она проверяет результат переданного ей логического выражения и возвращает результаты в зависимости от того истинно он или ложно.

Таблица истинности задает функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, где x_i – переменные, принимающие значения ЛОЖЬ или ИСТИНА (0 или 1). В случае функции одной переменной значений функций будет всего 4, они задаются следующей таблицей истинности (для удобства функции пронумерованы так, что двоичный код номера совпадает с набором значений функции) – табл. 9.1:

Табл. 9.1. Значения функции булевой переменной

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

функция $f_0(x)\equiv 0$ называется константой 0;

функция $f_1(x)= x$ называется тождественной;

функция $f_2(x)= \bar{x}$ называется «не x»;

функция $f_3(x)\equiv 1$ называется константой 1.

Функции двух переменных $f(x_1,x_2)$ определены на множестве $E=\{(0\ 0),\ (0\ 1),(1\ 0),(1\ 1)\}$. Число функций двух переменных равно 16 (табл. 9.2).

Табл. 9.2. Значения функции двух булевых переменных

x	y	Аналитическое выражение функций $f_i(x,y)$															
		$f_0=0$	$f_1=x\wedge y$	$f_2=x\leftarrow y$	$f_3=x$	$f_4=y\leftarrow x$	$f_5=y$	$f_6=x\oplus y$	$f_7=x\vee y$	$f_8=x\downarrow y$	$f_9=x\equiv y$	$f_{10}=\neg y$	$f_{11}=y\rightarrow x$	$f_{12}=\neg x$	$f_{13}=x\rightarrow y$	$f_{14}=x\vert y$	$f_{15}=1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Наименование		Константа «0»	Конъюнкция	Запрет x	Повторение x	Запрет y	Повторение y	Сложение по модулю 2	Дизъюнкция, ИЛИ	Стрелка Пирса, ИЛИ-НЕ	Равнозначность, эквивалентность	Инверсия, отрицание y	Импликация x	Инверсия, отрицание x	Импликация y	Штрих Шеффера, И-НЕ	Констаната «1»

Упрощение функций удобнее производить в аналитической форме. При аналитической записи функция алгебры логики представляется либо в виде логической суммы элементарных логических произведений (дизъюнкции элементарных конъюнкций), либо в виде логического произведения элементарных логических сумм (конъюнкции элементарных дизъюнкций). Первая форма записи имеет название дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), вторая - конъюнктивной нормальной формы (КНФ).

Для упрощения записи сложных булевых функций операция коньюнкции (И) обозначаетя символом «∧», либо заменяется знаком умножения «*», либо знаком «&», либо вообще опускается. Операция дизъюнкции обозначается симоволом «∨», либо символом «+».

Пример дизъюнктивной и конъюктивной нормальных форм, а также соответствующих им таблиц истинности:

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f=\bar{x}\ \bar{y}+\bar{x}y+x\bar{y}$$

$$f=(x+y)(x+y)(\bar{x}+\bar{y})$$

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Сокращение записи сложных функций достигается использованием законов алгебры логики.

Ассоциативный (сочетательный) закон

$$x+(y+z)=(x+y)+z; \quad \mathrm{x(yz)=(xy)z.}$$

Коммутативный (переместительный) закон

$$x+y=y+x; \quad xy=yx.$$

Дистрибутивный (распределительный) закон

$$(x+y)z=(xz)+(yz);\quad (xy)+z=(x+z)(y+z).$$

Законы де Моргана (законы общей инверсии или дуальности)

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{xy};\quad \bar{x}\,\bar{y}=\overline{xy}.$$

Закон поглощения (элиминации)

$$x+(xy)=x;\quad x(x+y)=x.$$

Закон склеивания (исключения)

$$xy+x\,\bar{y}=x;\quad (x+y)(x+\bar{y})=x.$$

Закон исключения третьего

$$x+\bar{x}=1.$$

Закон непротиворечивости

$$x\,\bar{x}=0.$$

Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}}=x.$$

Следствие из дистрибутивного закона

$$x+xy+xyz=x,\quad x+\bar{x}\,y=x+y,\quad \bar{x}+xy=\bar{x}+y.$$

Правило расширения

$$xy+\bar{x}\,z+yz=xy+\bar{x}\,\mathrm{z}.$$

Любую булеву функцию с произвольным количеством аргументов можно построить через подстановку элементарных функции вместо аргументов (суперпозиция). Набор простейших функций, с помощью которого можно выразить любые другие, сколь угодно сложные логические функции, называется функционально полным набором, или логическим базисом. Таких базисов 4: И, НЕ (2 элемента); ИЛИ, НЕ (2 элемента); И-НЕ (1 элемент); ИЛИ-НЕ (1 элемент). Этим обусловлено то, что в Excel в категории функций «Логические» представлены только функции *И*, *ИЛИ*, *НЕ*, *ИСТИНА*, *ЛОЖЬ* и *ЕСЛИ*.

Условно-графические изображения логических элементов (рис. 9.1), реализующих основные функции алгебры логики определены ГОСТ 2.743-91 ЕСКД.

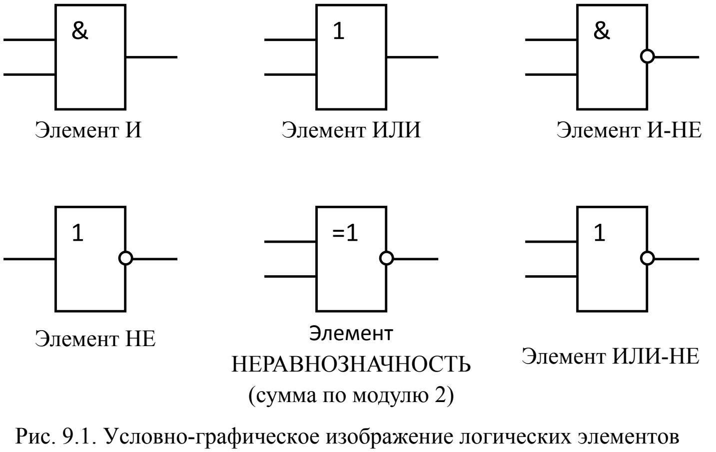


Рис. 9.1. Условно-графическое изображение логических элементов

Для преобразования логических функций в один из названых базисов необходимо применять закон де Моргана. Так функция сложения по модулю два $f_6 = x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$, записанная в ДНФ, может быть представлена в логическом базисе И, НЕ как $f_6 = \overline{(\bar{x} + y)} + \overline{(x + \bar{y})}$.

Пример вычисления этой функции в ДНФ и в логическом базисе И, НЕ представлен на рис. 9.2, *a*) (формулы представления) и рис. 9.2, *b*) (таблица истинности.

	A	B	C	D
1	x	y	f_6 в ДНФ	f_6 в базисе И, НЕ
2	0	0	=ИЛИ((И(НЕ(A2);B2));(И(A2;НЕ(B2))))	=ИЛИ(НЕ(ИЛИ(НЕ(A2);B2));НЕ(ИЛИ(A2;НЕ(B2))))
3	0	1	=ИЛИ((И(НЕ(A3);B3));(И(A3;НЕ(B3))))	=ИЛИ(НЕ(ИЛИ(НЕ(A3);B3));НЕ(ИЛИ(A3;НЕ(B3))))
4	1	0	=ИЛИ((И(НЕ(A4);B4));(И(A4;НЕ(B4))))	=ИЛИ(НЕ(ИЛИ(НЕ(A4);B4));НЕ(ИЛИ(A4;НЕ(B4))))
5	1	1	=ИЛИ((И(НЕ(A5);B5));(И(A5;НЕ(B5))))	=ИЛИ(НЕ(ИЛИ(НЕ(A5);B5));НЕ(ИЛИ(A5;НЕ(B5))))

a)

	A	B	C	D
1	x	y	f_6 в ДНФ	f_6 в базисе И, НЕ
2	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
3	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА
4	1	0	ИСТИНА	ИСТИНА
5	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

b)

Рис. 9.2. Представление функции сложения по модулю 2 в ДНФ и в базисе И, НЕ

Запись логических функций в Excel может быть проще, если использовать функцию *ЕСЛИ* совместно с функциями *И*, *ИЛИ*, *НЕ*, *ИСТИНА*, *ЛОЖЬ*. На рисунке 9.3 представлены примеры вычисления некоторых элементарных функций с использованием логической функции *ЕСЛИ*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	x	y	f_1	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{13}	f_{14}
3	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
4	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
5	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
6	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ
7									
8									
9			=И(A6;B6)						
10			=ЕСЛИ(A6+B6=1;"ИСТИНА";"ЛОЖЬ")						
11			=ИЛИ(A6;A6;B6)						
12			=НЕ(ИЛИ(A6;B6))						
13			=ЕСЛИ(A6=B6;"ИСТИНА";"ЛОЖЬ")						
14			=ЕСЛИ(И(A5=1;B5=0);"ЛОЖЬ";"ИСТИНА")						
15			=ЕСЛИ(И(A6=1;B6=1);"ЛОЖЬ";"ИСТИНА")						

Рис. 9.3. Реализация элементарных функций алгебры логики

Основные булевы функции являются основой для построения сложных логических формул (логических вызказываний).

Порядок исполнения операций задается круглыми скобками. При отсутствии скобок порядок выполнения операций следующий: ***отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.***

К примеру, логическое вызакзывание $\bar{x}+y+z+d$ означает то же, что и $((\bar{x})+y)+(z+d)$, а $\bar{x}+(y+z)d$ можно записать в виде $((\bar{x})+(y+z)d)=(\bar{x})+yd+zd$.

Приведем пример решения содержательной логической задачи в Excel.

Миша допущен к экзаменационной сессии и прислал 3 сообщения о приезде домой на каникулы:

1. Если я сдам Математический анализ, то Программное обеспечение ЭВМ сдам только при условии, что не завалю Иностранный язык;

2. Не может быть, чтобы я завалил и Иностранный язык, и Математический анализ;

3. Достаточное условие завала по информатике - это двойка по Иностранному языку.

После сдачи экзаменов оказалось, что из трех сообщений Миши только одно было ложным. Как Миша сдал экзамены?

Введем простые высказывания:

И - Миша сдаст Программное обеспечение ЭВМ (П);

М - Миша сдаст Математический анализ (М);

Д - Миша сдаст Иностранный язык (И).

Запишем сложные высказывания по известным фактам:

1. М → (П→И);

2. ¬ (¬И∧¬М);

3. ¬И→ ¬П.

Поскольку неизвестно, какое из сообщений было ложно, то необходимо предположить, что каждое из них могло быть ложным, два остальных истинными. Обозначим сложные высказывания как X, Y, Z.

x = М → (П→И)); $y=\overline{(\overline{И}\wedge\overline{М})}$; $z=\overline{И}\rightarrow\overline{П}$.

Тогда искомая функция будем равна

$f=\bar{x}yz+x\bar{y}z+xy\bar{z}$

Формулы, соответствующие искомой логической функции, введенные в ячейки листа книги Excel при различных комбинациях x, y и x, показаны на рис. 9.4, а), а результаты определения значения логической функции показаны на рис. 9.4, b) (столбец L, в столбцах I, J, и K представлены промежуточные результаты вычисления отдельных «слагаемых» логической функции).

	D	E	F	G	I	J	K	L
20								
21		x	y	z				
22		0	0	0	=И(НЕ(E22);F22;G22)	=И(НЕ(F22);E22;G22)	=И(НЕ(G22);F22;E22)	=ИЛИ(I22;J22;K22)
23		0	0	1	=И(НЕ(E23);F23;G23)	=И(НЕ(F23);E23;G23)	=И(НЕ(G23);F23;E23)	=ИЛИ(I23;J23;K23)
24		0	1	0	=И(НЕ(E24);F24;G24)	=И(НЕ(F24);E24;G24)	=И(НЕ(G24);F24;E24)	=ИЛИ(I24;J24;K24)
25		0	1	1	=И(НЕ(E25);F25;G25)	=И(НЕ(F25);E25;G25)	=И(НЕ(G25);F25;E25)	=ИЛИ(I25;J25;K25)
26		1	0	0	=И(НЕ(E26);F26;G26)	=И(НЕ(F26);E26;G26)	=И(НЕ(G26);F26;E26)	=ИЛИ(I26;J26;K26)
27		1	0	1	=И(НЕ(E27);F27;G27)	=И(НЕ(F27);E27;G27)	=И(НЕ(G27);F27;E27)	=ИЛИ(I27;J27;K27)
28		1	1	0	=И(НЕ(E28);F28;G28)	=И(НЕ(F28);E28;G28)	=И(НЕ(G28);F28;E28)	=ИЛИ(I28;J28;K28)
29		1	1	1	=И(НЕ(E29);F29;G29)	=И(НЕ(F29);E29;G29)	=И(НЕ(G29);F29;E29)	=ИЛИ(I29;J29;K29)

a)

L22 =ИЛИ(I22;J22;K22)

	D	E	F	G	I	J	K	L
20								
21		x	y	z				
22		0	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
23		0	0	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
24		0	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
25		0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
26		1	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
27		1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
28		1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
29		1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

b)

Рис. 9.4. Результат расчета значений логической функции

Для сокращения количества задействованных ячеек расчет может быть произведен с помощью одной логической формулы, объединяющей «слагаемые» логического выражения (рис. 9.5).

M22 =ИЛИ((И(НЕ(E22);F22;G22));(И(E22;НЕ(F22);G22));(И(E22;F22;НЕ(G22))))

	D	E	F	G	M	N	O	P	Q	R
20										
21		x	y	z						
22		0	0	0	ЛОЖЬ					
23		0	0	1	ЛОЖЬ					
24		0	1	0	ЛОЖЬ					
25		0	1	1	ИСТИНА					
26		1	0	0	ЛОЖЬ					
27		1	0	1	ИСТИНА					
28		1	1	0	ИСТИНА					
29		1	1	1	ЛОЖЬ					

Рис. 9.5. Результат расчета значений логической функции с использование одного логического выражения

Анализ решения показывает, что ложным является третье сообщение.

Рассмотрим построение таблицы истинности на основе графического представления функции (рис. 9.6).

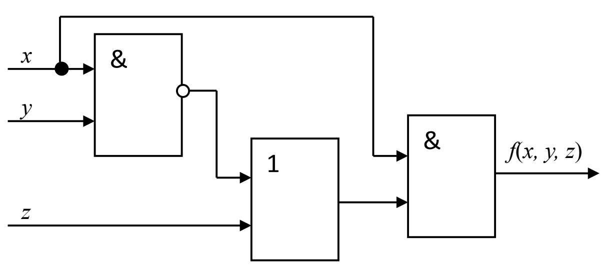
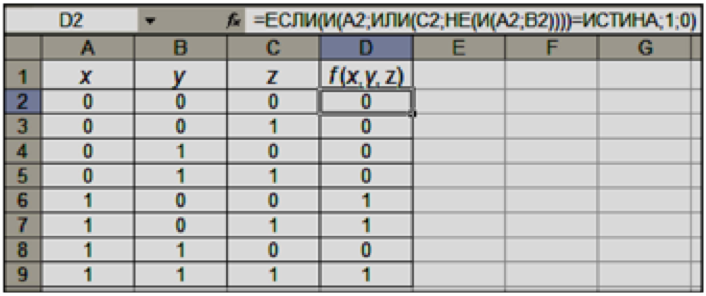


Рис. 9.6. Функциональная схема дискретного устройства (комбинационная схема)

Логическое выражение, представленной в виде комбинаций дискретных элементов функции, следующее: $f(x,y,z)=(\overline{xy+z)x}$.

Результат построения таблицы истинности представлен на рис. 9.7.


D2 =ЕСЛИ(И(A2;ИЛИ(C2;НЕ(И(A2;B2))))=ИСТИНА;1;0)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	z	f(x,y,z)			
2	0	0	0	0			
3	0	0	1	0			
4	0	1	0	0			
5	0	1	1	0			
6	1	0	0	1			
7	1	0	1	1			
8	1	1	0	0			
9	1	1	1	1			

Рис. 9.7. Формирование таблицы истинности

В информатике часто используется, кроме записи чисел в двоичном коде, запись в восьмеричном и шестнадцатеричном кодах. В Excel имеется набор функций, решающий задачи перевода числа из одной системы счисления в другую (рис. 9.8).

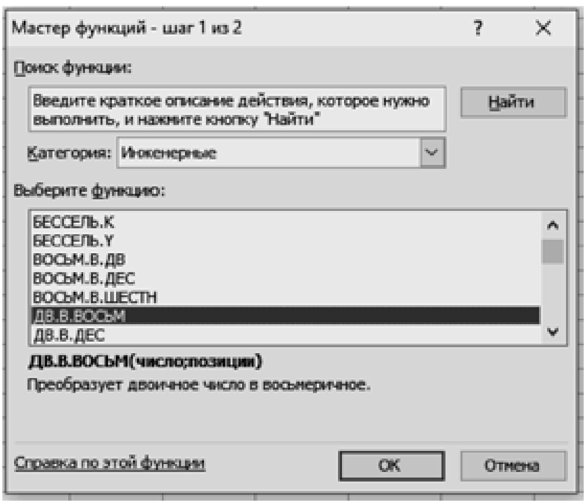


Рис. 9.8. Окно мастера функций при переводе числа из одной системы счисления в другую

Перевод осуществляется достаточно просто.

1. Ввести в свободную ячейку число, подлежащее переводу в другую систему.
2. Сделать активной ячейку для размещения результата перевода.
3. Вызвать мастер функции и выбрать категорию *Инженерные.*
4. Выбрать требуемую функцию перевода и нажать ОК.
5. В окне *Аргументы функции* (рис. 9.9) в поле Число ввести адрес ячейки с числом, подлежащим переводу, указать требуемое число позиций (не обязательно) и нажать ОК.

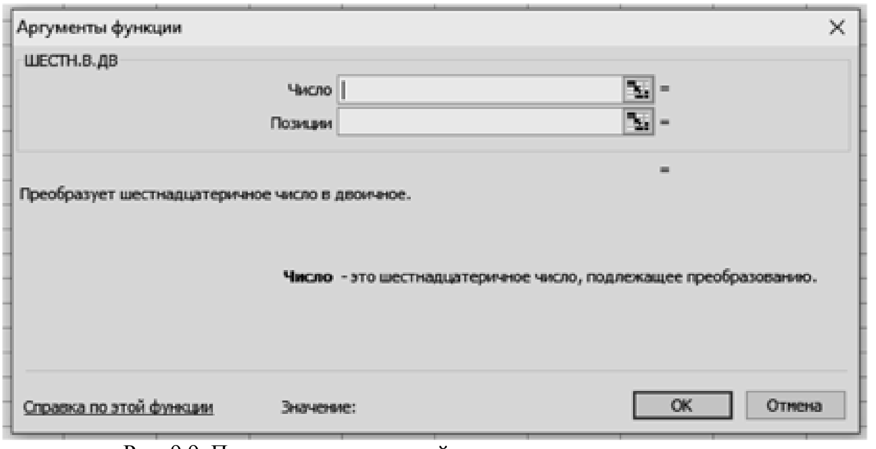


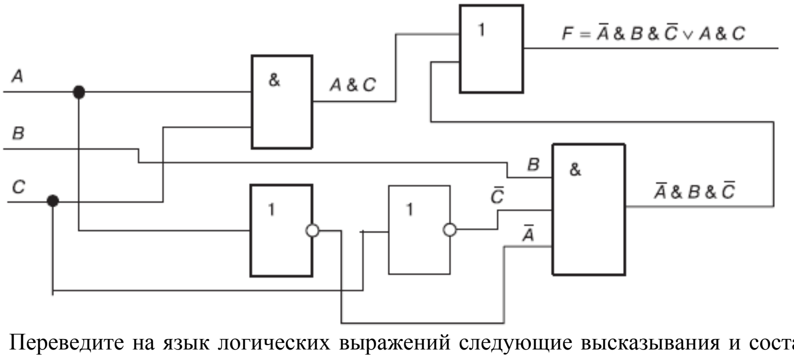
Рис. 9.9. Перевод числа из одной системы счисления в другую

Задачи для самостоятельного решения

1. В среде Excel постройте таблицы истинности следующих логических функций:
(A&B&¬B)∨(A&¬A);
(A&¬A)∨(B&C&¬C).

2. Построить комбинационную схему, реализующую следующую функцию: $f(x,y)=(\overline{xy})+(\overline{y}+x)$. В среде Excel построить таблицу истинности.

3. На основе комбинационной схемы в среде Excel построить таблицу истинности.



4. Переведите на язык логических выражений следующие высказывания и составить таблицу истинности в Excel**:**

- «Я поеду в Москву и если встречу там друзей, то мы весело проведем время».
- «Если будет солнечная погода, то ребята пойдут в лес, а если будет пасмурно, то ребята пойдут в кино».
- «Если урок информатики будет интересным, то никто из школьников - Маша, Ирина, Ольга - не будут смотреть в окно».

5. В среде электронной таблицы Excel организуйте проверку существования треугольника (по длинам трех отрезков); если треугольник существует, то определите, будет ли он прямоугольным.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

10.1. Основные понятия теории вероятности

Достоверное событие - событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможное событие - событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Случайное событие - событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Несовместные события – группа событий, в которой появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Полная группа событий – в результате испытания обязательно появится хотя бы одно событие из этой группы.

Равновозможные события - ни одно из нескольких событий не является более возможным, чем другое.

Вероятность события A – это отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов m к их общему числу n и обозначают

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Сумма двух событий – событие $A+B$, состоящее в появлении события A или события B, или обоих этих событий.

Произведение двух событий – событие $B \cdot A$, состоящее в совместном появлении этих событий.

Противоположные события – два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно обозначено A, тогда другое принято обозначать $\overline{A}$.

Условная вероятность $\boldsymbol{p_A(B)}$ или $\boldsymbol{p(B/A)}$ **–** вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A/B).$$

Если события A и B несовместны, т.е. одновременно произойти не могут, тогда: $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

Вероятность противоположного события $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, … A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий: $p(A) = p(\overline{A}) = 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot p(\overline{A}_n)$.

Вероятность события A, которое может произойти лишь при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, вычисляется по формуле:

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + \ldots + p(H_n)p(A/H_n).$$

Формула Байеса: $p(A/H_i) = \dfrac{P(H_i)p(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(H_k)p(A/H_k)}, \quad i = \overline{1,n}.$

Событие A называется независимым в данной системе испытаний, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исхода других испытаний. Серия независимых повторных испытаний, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность $p(A) = p$, не зависящую от номера испытания, называется ***схемой Бернулли.*** Вероятность появления события A точно m раз при n испытаниях вычисляется формуле Бернулли:

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n независимых испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной ***формулой Лапласа***:

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp(-\frac{t^2}{2}), \text{ где } q = 1 - p, t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Вероятность $p_n(m_1, m_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раза при больших n определяется в согласно ***интегральной теореме Лапласа*** следующим образом:

$$p_n(m_1, m_2) \approx \Phi(t_{m2}) - \Phi(t_{m1}), \text{ где}$$

$$t_{m1} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad t_{m2} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\Phi(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\dfrac{t^2}{2})dt$ – интеграл вероятностей (функция Лапласа).

В случае серии n независимых испытаний (n = 1, 2, 3…), при условии того, что вероятность появления события A в этой серии $p_n = p(A) > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$ (последовательность «редких событий») вероятность появления события A в n-ой серии ровно m раз вычисляется по приближенной ***формуле Пуассона***:

$$p_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}.$$

Функция распределения Пуассона:

$$p(x \le r) = \sum_{i=0}^{r} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu}$$

Предполагается, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т.е. $p_n = \mu = const$ и «мало».

Случайная величина – величина, которая принимает свои значения в зависимости от исходов некоторого испытания (опыта), причем для каждого элементарного исхода она имеет единственное значение.

Дискретная случайная величина - случайная величина X, множество всех возможных значений которой конечно (или счётно).

Закон распределения случайной величины - соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.

Независимые случайные величины - закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Математическое ожидание дискретной случайной величины - сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности: $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$.

При $p_i=p=const$ $M(X)=np$.

Дисперсия случайной величины X - математическое ожидание квадрата уклонения случайной величины X:

$$D(X)=M(X-m)^2=M(X^2)-[M(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i.$$

При $p_i=p=const$ $D(X)=npq$.

Среднеквадратическое отклонение случайной величины X - корень квадратный из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Биномиальный закон распределения - распределение вероятностей возможных чисел появления события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A может осуществиться с одной и той же вероятностью $p(A)=p=\text{const}$. Кроме события A может произойти также противоположное событие $\bar{A}$, вероятность которого $p(\bar{A})=1-p=q$. Биномиальный закон распределение описывается формулой Бернулли.

Вероятность появления не более r успешных исходов в n независимых испытаниях задается интегральной функцией

$$p(x\le r)=F(r;p,n)=\sum_{x=0}^{r}C_n^x p^x(1-p)^{n-x}.$$

Неравенство Чебышева. Каково бы ни было положительное число a, вероятность того, что величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на a, ограничена сверху величиной $D(X)/a^2$, т.е.

$$p(|X-M(X)|\ge a)\le\frac{D(X)}{a^2}.$$

Непрерывная случайная величина – случайная величина X, возможные значения которой заполняют сплошь интервал (a, b) или всю числовую ось.

Функция распределения непрерывной случайной величины – вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньше x, т.е. $F(X)=p\{X<x\}$.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X – первая производная от функции распределения непрерывной случайной $f(x)=F'(x)$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат интервалу $[a, b]$, называют определенный интеграл $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$. Используется также обозначение $\bar{x}$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание её квадрата уклонения: $D(X)=\int_a^b f(x)[x-M(x)]^2dx$.

Нормальное распределение – распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$, где $\bar{x}$ – математическое ожидание и σ – среднеквадратическое отклонение.

Правило «трех сигм». Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью близкой к единице или $p\{|x-\bar{x}|<3\sigma=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$ Здесь Ф() – функция Лапласа.

Центральная предельная теорема А.М.Ляпунова. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое нормальному.

10.2. Элементы теории вероятности в Excel

10.2.1. Числовые характеристики дискретных распределений

Во многих вопросах случайную величину достаточно характеризовать отдельными числовыми параметрами, дающими представление о существенных чертах распределения случайной величины. В Excel для вычисления числовых параметров дискретных распределений могут быть использованы специальные функции. Ниже представлены некоторые из них. Аргументами функций являются значения дискретного ряда.

СРЗНАЧ – вычисляет математическое ожидание для всей совокупности значений дискретной случайной величины.

ДИСПР – позволяет оценить дисперсию дискретного распределения.

СТАНДОТКЛОН – вычисляет среднеквадратическое отклонение (СКО) дискретного распределения.

СКО может быть определено как корень квадратный из дисперсии.

КОЭФФИЦИЕНТ ВАРИАЦИИ – отношение СКО к математическому ожиданию, выраженное в процентах.

МЕДИАНА – значение признака или такого числа, которое делит ранжированную совокупность данных на две равнее части. Заметим, что функция МЕДИАНА не требует ранжирование ряда, при определении этого параметра она автоматически проводит ранжирование.

МОДА – чаще всего встречающаяся варианта. Если такие данные отсутствуют, то функция возвращает #Н/Д.

КВАРТИЛЬ – это варианты признака, делящие упорядоченный (ранжированный) ряд распределения на четыре равные части. Квартиль 0 совпадает с минимальным значением вариантов ранжированного ряда, квартиль 1 равен значению такого варианта, что слева от него находится 25% данных, а справа 75%, квартиль 2 совпадает с медианой, квартиль 3 равен значению такого варианта, что слева от него находится 55% данных, а справа 25%, квартиль 4 совпадает с максимальным значением ряда.

МИН – минимальное значение набора данных.

МАКС – максимальное значение набора данных.

СЧЕТ – функция возвращает количество данных в ряде.

На рис. 10.1 приведены функции Excel, позволяющие рассчитать указанные числовые параметры дискретного распределения некоторой случайной величины. В строке 2 записаны не ранжированные данные, а в строке 3 эти же данные ранжированы. На рис. 10.2 – результаты расчета рассмотренных параметров.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Числовые характеристики дискретных распределений										
2	56	23	87	19	42	23	18	76	77	74	12
3	12	18	19	23	23	42	56	74	76	77	87
4	Математическое ожидание			=СРЗНАЧ(A2:K2)							
5	Дисперсия			=ДИСП(A2:K2)							
6	Среднеквадратическое отклонение			=КОРЕНЬ(D5)							
7				=СТАНДОТКЛОН(A2:K2)							
8	Коэффициент вариации			=D6/D4							
9	Медиана			=МЕДИАНА(A2:R2)							
10	Мода			=МОДА(A2:K2)							
11	Квартиль нулевой			=КВАРТИЛЬ(A2:K2;0)							
12	Квартиль первый			=КВАРТИЛЬ(A2:K2;1)							
13	Квартиль второй			=КВАРТИЛЬ(A2:K2;2)							
14	Квартиль третий			=КВАРТИЛЬ(A2:K2;3)							
15	Квартиль четвертый			=КВАРТИЛЬ(A2:K2;4)							
16	Минимальное значение			=МИН(A2:K2)							
17	Максимальное значение			=МАКС(A2:K2)							
18	Количество чисел			=СЧЁТ(A2:K2)							

Рис. 10.1. Расчет числовых параметров случайной величины

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Числовые характеристики дискретных распределений										
2	56	23	87	19	42	23	18	76	77	74	12
3	12	18	19	23	23	42	56	74	76	77	87
4	Математическое ожидание			46,0909091							
5	Дисперсия			816,890909							
6	Среднеквадратическое отклонение			28,5813035							
7				28,5813035							
8	Коэффициент вариации			62%							
9	Медиана			42							
10	Мода			23							
11	Квартиль нулевой			12							
12	Квартиль первый			21							
13	Квартиль второй			42							
14	Квартиль третий			75							
15	Квартиль четвертый			87							
16	Минимальное значение			12							
17	Максимальное значение			87							
18	Количество чисел			11							

Рис. 10.2. Результаты расчета числовых параметров случайной величины.

10.2.2. Статистические функции дискретных распределений

Биномиальный закон распределения

Испытания Бернулли – независимые многократно повторяемые испытания. Каждое испытание приводит к одному из двух возможных исходов (успех и неудача), вероятность успеха p не меняется от одного опыта к другому.

Функция *БИНОМРАСП*

Синтаксис функции:

=БИНОМРАСП(*число_успехов;число_испытаний;вероятность_успеха; интегральная*).

Здесь: *число_успехов* – количество успешных испытаний;

число_испытаний – число независимых испытаний;

вероятность_успеха – вероятность успеха каждого испытания (одинаковая для все испытаний);

интегральная – логическое значение, определяющее форму функции. Если аргумент *интегральная*=0, то функция рассчитывает дифференциальную функцию распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента *число_успехов*. Если аргумент *интегральная*=1, то функция рассчитывает интегральную функцию распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний не больше значения аргумента *число_успехов.*

Пример. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Построить многоугольник распределения и функцию распределения.

Воспользуемся формулой: *БИНОМРАСП.*

1. Выбрать сервис *Мастер функций* и в категории *Статистические* выбрать функцию *БИНОМРАСП* (рис. 10.3).

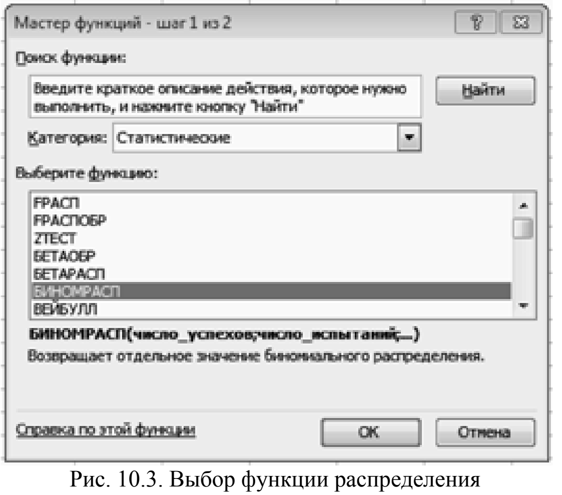


Рис. 10.3. Выбор функции распределения

2. Ввести аргументы функции (рис. 10.4).

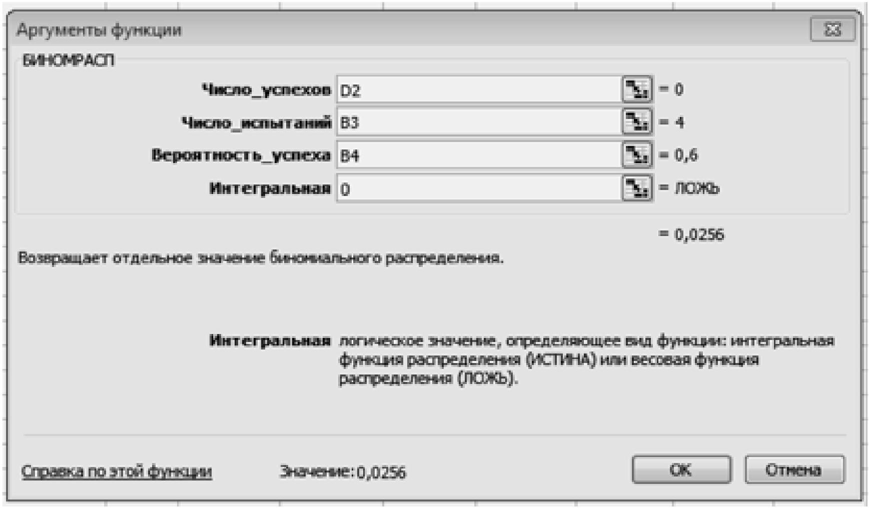


Рис. 10.4. Аргументы функции БИНОМРАСП

Адреса установки параметров соответствуют заранее подготовленной таблице (рис. 10.5). Обратить внимание на установку абсолютных адресов в формуле в ячейках D3 и D4.

3. Скопировать формулу из ячейки D3 в ячейки E3:H3.

4. Скопировать формулу из ячейку D3 в ячейку D4 и в формуле значение 0 последнего аргумента изменить на 1.

5. Скопировать формулу из ячейки D4 в ячейки E4:H4.

В результате в блок ячеек D3:H4 внесены формулы для расчета (рис. 10.5).

D3 fx =БИНОМРАСП(D$2;$B$3;$B$4;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Распределение Бернулли**							
2	**Число успехов *x***	0…4	x_i	0	1	2	3	4
3	**Число испытаний *n***	4	p_i	=БИНОМРАСП(D$2;$B$3;$B$4;0)				=БИНОМРАСП(H$2;$B$3;$B$4;0)
4	**Вероятность успеха *p***	0,6	$p(X)<x$	=БИНОМРАСП(D$2;$B$3;$B$4;1)				=БИНОМРАСП(H$2;$B$3;$B$4;1)

Рис. 10.5. Содержимое таблицы для решения задачи

Результаты численного расчета приведены на рис. 10.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Распределение Бернулли**							
2	**Число успехов *x***	0…4	x_i	0	1	2	3	4
3	**Число испытаний *n***	4	p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296
4	**Вероятность успеха *p***	0,6	$p(X)<x$	0,0256	0,1792	0,5248	0,8704	1

Рис. 10.6. Результаты расчета биномиального распределения

На рис. 10.7 представлены графики зависимости вероятности разного числа попаданий в мишень при производстве четырех выстрелов при различных (но неизменных в серии из четырех выстрелов) значениях вероятности попадания при каждом выстреле. Сумма вероятностей в каждой серии выстрелов равна 0, т.к. промах, одно, два, три и четыре попадания представляют полную группу событий

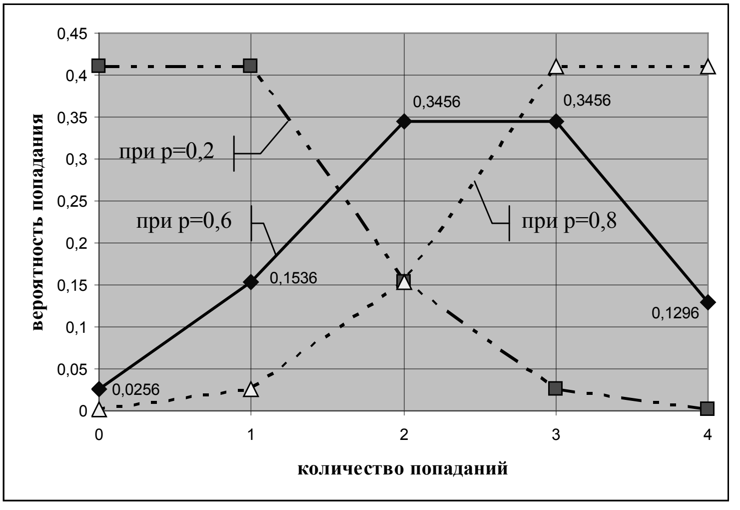


Рис. 10.7. Многоугольник распределения

На рис. 10.8. показана функция распределения (накопленную вероятность). Максимально значение функции распределения равно 1, т.к. одно из событий (промахи, либо 1 попадание, либо два попадания, либо 3 попадания, либо 4 попадания) в серии выстрелов обязательно произойдет.

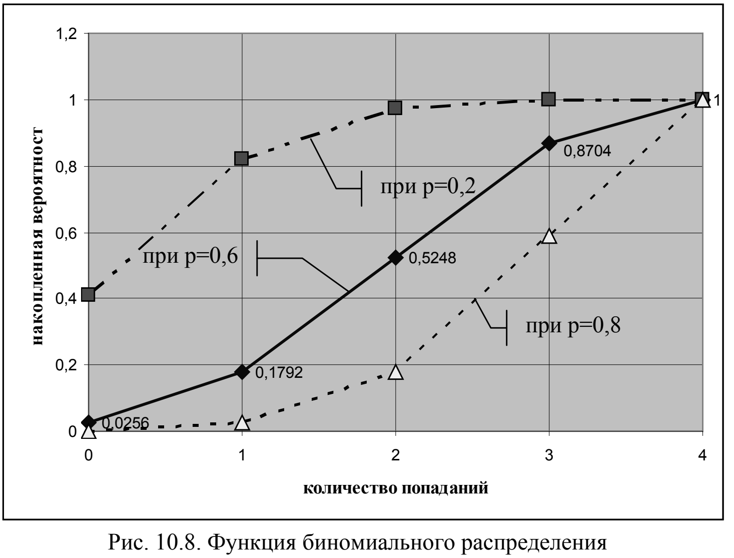


Рис. 10.8. Функция биномиального распределения

Математическое ожидание $M(X)=np=4*0,6=2,4$ – средне ожидаемое количество попаданий. Математическое ожидание может быть вычислено на основе формулы, его определяющей – $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Дисперсия $D(X)=npq=4*0,6*0,4=0,96$ – рассеяние количества попаданий относительно математического ожидания. Дисперсия может быть вычислена на основе формулы, ее определяющей – $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$. Среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,96}\approx 0,98$ (рис. 10.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Распределение Бернулли							
2	успехов x	0…4	x_i	0	1	2	3	4
3	пытаний n	4	p_i	0,0256	0,2	0	0,3	0,1296
9								
10								
11				0	0,2	1	1	0,5184
12		Мат. ожидание		2,4				
13				0,14746	0,3	0	0,1	0,3318
14			Дисперсия	0,96				
15			СКО	0,9798				

Рис. 10.9. Определение математического ожидания, дисперсии и СКО

В таблице (рис. 10.9) в ячейку D11 введена формула =D2*D3 и скопирована в ячейки E11:H11. В ячейке D12 формула =СУММ(D11:H11). В ячейку D13 введена формула =((D2-$D$12)^2)*D3 и скопирована в ячейки E13:H13. В ячейке D14 формула =СУММ(D13:H13), а в ячейке D15 формула =D14^0,5, либо =КОРЕНЬ(D14).

Обратной по отношению к функции *БИНОМРАСП* является функция ***КРИТБИНОМ****,* позволяющая рассчитать наименьшее значение, для которого интегральное биномиальное распределение больше или равно заданному критерию.

Синтаксис функции:

=КРИТБИНОМ(*число_испытаний*;*вероятность_успеха*;*альфа*).

Здесь: *число_испытаний* – число испытаний Бернулли;

вероятность_успеха – вероятность успеха в каждом испытании;

альфа – значение критерия.

Пример. Предприятие производит крупными партиями новогодние гирлянды не светодиодах. Из каждой партии для контроля качества из каждой партии случайным образом выбирают 100 гирлянд. В процессе производства в среднем 0,5% гирлянд дефектны. Требуется определить наибольшее допустимое число дефектных гирлянд в выборке, при котором вероятность принятия партии составит 0,99. Решение приведено на рис. 10.10. Реализуемая формула: =КРИТБИНОМ(100;0,005;0,99).

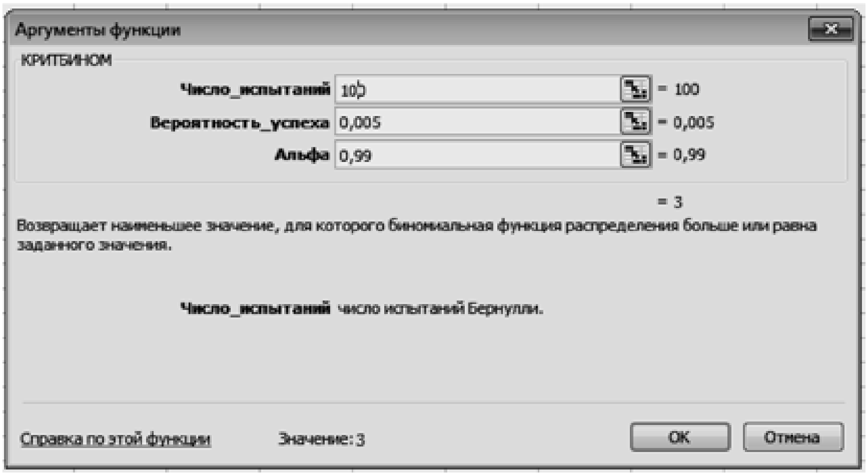


Рис. 10.10. Пример применения функции КРИТБИНОМ

При необходимости рассчитать вероятность того, что значения из интервала находятся внутри заданных границ используется функция ***ВЕРОЯТНОСТЬ***. В основе функции лежит теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Синтаксис функции:

=*ВЕРОЯТНОСТЬ*(*x_интервал*;*интервал вероятностей*;
нижний_предел;*верхний_предел*).

Здесь: *x_интервал* – интервал числовых значений *x*, с которыми связаны вероятности;

интервал вероятностей – множество вероятностей, соответствующих значениям в аргументе *x_интервал*;

нижний_предел – нижняя граница значения , для которого требуется вычислить вероятность;

верхний_предел – необязательная верхняя граница значения, для которого требуется вычислить вероятность (если предел не задан, функция рассчитывает вероятность значения аргумента *нижний_предел*).

Пример. В новогодней лотерее разыгрывается 1000 билетов. Из них выпадают выигрыши: 500 руб. – 1 билет; по 100 руб. – 10 билетов; по 20 руб. – 50 билетов; по 5 руб. – на 100 билетов; остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность того, что выбранный первым наугад билет является выигрышным: а) с выигрышем 20 руб.; б) с выигрышем не менее 20 руб.; в) с выигрышем не менее 100 руб.; г) с выигрышем от 5 до 100 руб. включительно?

Решение показано на рис. 10.11.

	A	B	C
1	Лотерея		
2	Количество билетов	Размер выигрыша, руб.	Вероятность выигрыша
3	1	500	=A3/СУММ($A$3:$A$7)
4	10	100	=A4/СУММ($A$3:$A$7)
5	50	20	=A5/СУММ($A$3:$A$7)
6	100	5	=A6/СУММ($A$3:$A$7)
7	=1000-СУММ(A3:A6)	0	=A7/СУММ($A$3:$A$7)
8		точно 20	=ВЕРОЯТНОСТЬ($B$3:$B$7;$C$3:$C$7;20)
9		не менее 20	**=ВЕРОЯТНОСТЬ($B$3:$B$7;$C$3:$C$7;20;500)**
10		не менее 100	**=ВЕРОЯТНОСТЬ($B$3:$B$7;$C$3:$C$7;100;500)**
11		от 5 до 100	**=ВЕРОЯТНОСТЬ($B$3:$B$7;$C$3:$C$7;5;100)**

	A	B	C
1	Лотерея		
2	Количество билетов	Размер выигрыша, руб.	Вероятность выигрыша
3	1	500	0,001
4	10	100	0,01
5	50	20	0,05
6	100	5	0,1
7	839	0	0,839
8		точно 20	0,05
9		не менее 20	**0,061**
10		не менее 100	**0,011**
11		от 5 до 100	**0,16**

Рис. 10.11. Пример применения функции ВЕРОЯТНОСТЬ

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона описывает число событий, происходящих в одинаковых промежутках времени или на одинаковых отрезках пространства при условии, что события происходят независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью (количеством событий в единицу времени). Закон Пуассона можно применять для совокупностей, достаточно больших по объему (n>100) и имеющих достаточно малую долю единиц, обладающих данным признаком (p<0,1).

Примерами использования распределения Пуассона в качестве математической модели являются: число вызовов, поступивших на автоматическую телефонную станцию за определенный период времени; число частиц, подвергнувшихся радиоактивному распаду за определенный период времени; количество отказов элементов за определенный период времени и др.

Функция ***ПУАССОН***

Синтаксис функции:

=*ПУАССОН*(*x*;*среднее*;*интегральная*)ю

Здесь: *x* – количество событий;

среднее – интенсивность появления событий (количество в единицу времени, на единицу длины и т.п.);

интегральная – логическое значение, как и в биномиальном распределении.

Пример. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

В данном случае количество «испытаний» велико (n=10000), а вероятность «успеха» в каждом из них мала (p=0,0002), поэтому используем формулу Пуассона.

В решаемой задаче x=1 (выход из строя одного замка), *среднее* равно 2 (10000*0,0002), *интегральная* – 0 (рис. 10.12).

Результат решения задачи: вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок равна 0,270670566.

Заметим, что при решении данной задачи на основе модели биномиального распределения получим результат 0,270670565, отличающийся от предыдущего на единицу в девятом знаке после запятой (рис. 10.13).

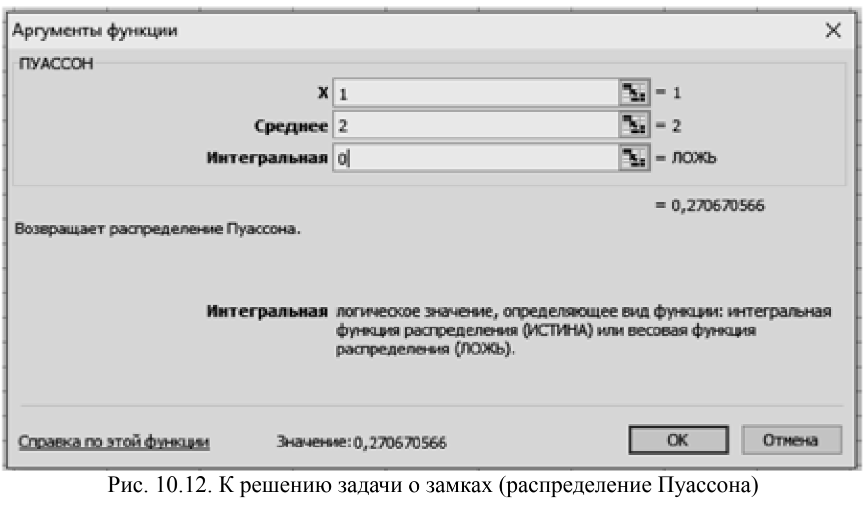


Рис. 10.12. К решению задачи о замках (распределение Пуассона)

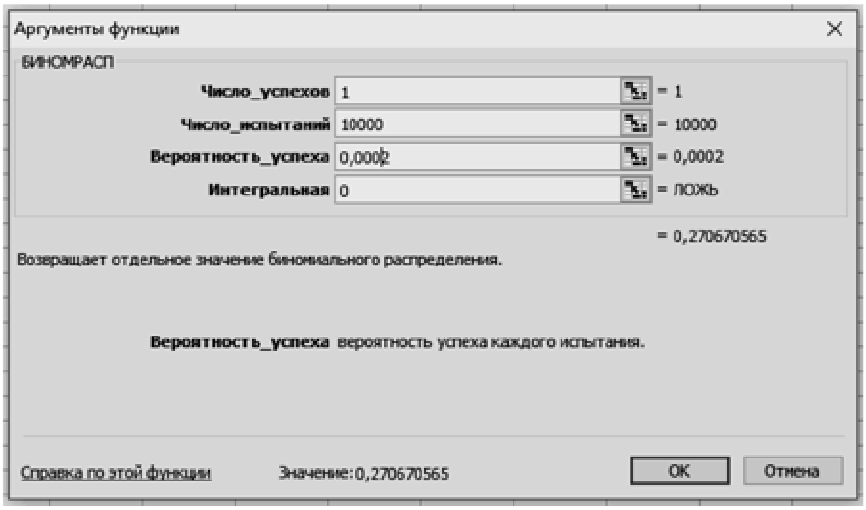


Рис. 10.13. К решению задачи о замках (биномиальное распределение)

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *T* равно 0,002. Найти вероятность того, что за время *T* откажут ровно *k* элементов. Построить график распределения вероятности *k*=0…10 и функцию распределения.

Для решения задачи используется функция *ПУАССОН* (рис. 10.14, 10.15):

B2 =ПУАССОН(A2;2;0)

	A	B
1	*k*	*p* (*X*=*k*)
2	0	0,13533528
3	1	0,27067057
4	2	0,27067057
5	3	0,18044704
6	4	0,09022352
7	5	0,03608941
8	6	0,0120298
9	7	0,00343709
10	8	0,00085927
11	9	0,00019095
12	10	3,819E-05

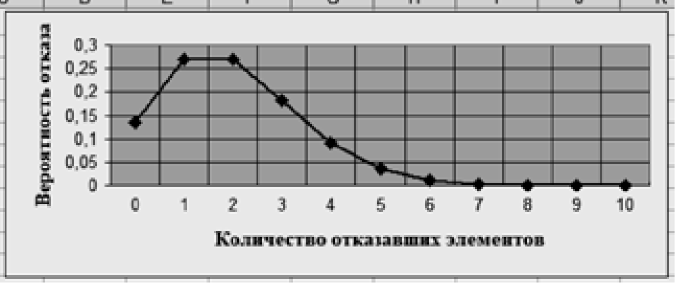


Рис. 10.14. Многоугольник распределения Пуассона (λ=2)

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона равны интенсивности появления события.

Кроме рассмотренных функций распределения Excel позволяет автоматизировать расчеты, связанные с дискретными случайными величинами, описываемыми рядом других законов распределения. В связи с тем, что общая технология применения соответствующих функций распределения принципиально не отличается от рассмотренных, приведем лишь краткие сведения о них.

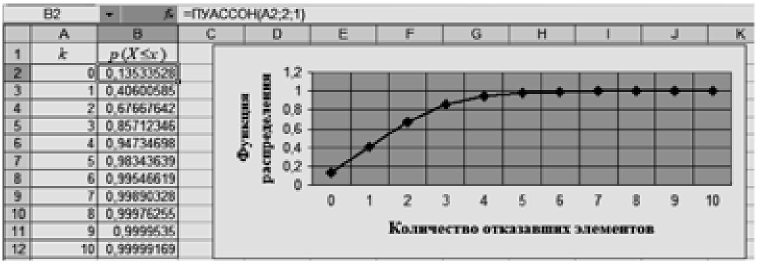


Рис. 10.15. Функция распределения Пуассона

Распределение Паскаля

Позволяет рассчитывать вероятность того, что при проведении независимых испытаний Бернулли, каждое с вероятностью успеха *p*, до появления *ровно s* успешных исходов произойдет *x* неудачных исходов (или, что то же самое, потребуется *x*+*s* испытаний).

Функция ***ОТРБИНОМРАСП***

Синтаксис функции:

=*ОТРБИНОМРАСП*(*число_неудач*;*число_успехов*;*вероятность_успеха*).

Здесь: *число_неудач* – количество неудачных испытаний;

число_успехов – пороговое значение числа успешных испытаний;

вероятность_успеха – вероятность успешного испытания.

Пример. Вероятность попадания в объект управляемой авиационной бомбы оценивается как 0,8 Для гарантированного уничтожения объекта необходимо осуществит три попадания. Какова вероятность того, что для уничтожения объекта потребуется ровно 5 бомбометаний?

Решение. =ОТРБИНОМРАСП(2;3;0,8).

Гипергеометрическое распределение

Гипергеометрическое распределение описывает вероятность появления ровно *x* успешных исходов в *n* испытаниях, когда значение *n* не мало по сравнению с объемом совокупности *N*. Распределение используется, когда выборка берется из небольших партий продукции.

Функция ***ГИПЕРГЕОМЕТ***

Синтаксис функции

=*ГИПЕРГЕОМЕТ*(*число_успехов_в_выборке*;*размер_выборки*;*число_успехов_в_совокупности*;*размер_совокупности*).

Смысл аргументов понятен из их названия.

Пример. Из партии, содержащей 40 высоконадежных изделий, случайным образом выбираются и подвергаются испытаниям на долговечность шесть устройств. Если в процессе испытаний ни одно устройство не выйдет из строя или выйдет их строя только одно устройство, то партия принимается. В противном случае вся партия бракуется. Какова вероятность того, что партия будет принята, если из 40 устройств четыре являются дефектными?

Решение. =ГИПЕРГЕОМЕТ(0;6;4;40) + ГИПЕРГЕОМЕТ(1;6;4;40).

10.2.3. Статистические функции непрерывных распределений

При задании закона распределения непрерывной случайной величины способ задания, характерный для дискретной случайной величины в виде упорядоченное распределение единиц изучаемой совокупности по определенному варьирующему признаку неприемлем. Множество значений непрерывной случайной величины бесконечно и сплошь заполняет некоторый промежуток. В этом случае не представляется возможным перечислить все значения случайной величины и их вероятности в виде таблицы (построить ряд распределения) или отметить их в системе координат (построить прямоугольник распределения).

Кроме того, каждое отдельное значение непрерывной случайной величины обладает нулевой вероятностью. Однако, несмотря на данное обстоятельство, нахождение возможных значений случайной величины в различных интервалах обладает различными и отличными от нуля вероятностями. Таким образом, для непрерывной случайной величины, так же как и для дискретной, можно определить закон распределения, но несколько в ином виде, чем для дискретной. Для этого используют понятие функции распределения (интегральной функции) случайной величины $F(x)$, задающейя вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x, то есть $F(x)=p(X<x)$.

График дифференциальной функции распределения $f(x)$ называется кривой распределения. Кривая распределения, выражающая общую закономерность данного типа распределения, называется теоретической кривой распределения. К статистическим функциям непрерывного распределения, реализуемым в Excel, относятся следующие функции:

1. Функции нормального распределения.
2. Функции гамма - распределения.
3. Функции бета - распределения.
4. Функции логарифмического нормального распределения.
5. Функции экспоненциального распределения.
6. Функция распределения Вейбулла.
7. Функции χ^2 – распределения (распределения Пирсона).
8. Функции t – распределения (распределения Стьюдента).
9. Функции F – распределения (распределения Фишера).

Рассмотрим некоторые из них. Чаще всего в качестве теоретического распределения используется нормальное распределение.

Нормальное распределение

Особое место в теории вероятностей и математической статистике занимает нормальный закон распределения (закон Гаусса). Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся условиях.

Доказано, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных произвольным законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Основное ограничение, налагаемое на суммируемые величины, состоит в том, что они все должны играть в общей сумме относительно малую роль. Если ни одна из случайно действующих величин по своему действию не окажется преобладающей над другими, то закон распределения близок к нормальному.

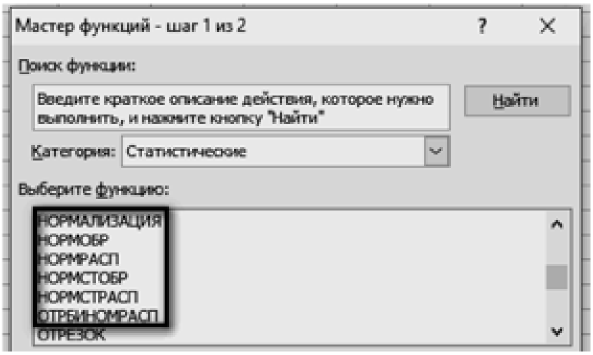


Рис. 10.16. Функции для обработки нормально распределенных данных

В Excel предусмотрены специальные функции для обработки нормально распределенных данных (рис. 10.16).

Функция ***НОРМРАСП***

Синтаксис функции:

=НОРМРАСП(*x;среднее;стандартное_откл;интегральная*).

Параметры функции:

x – значение (или ссылка на ячейку), для которого рассчитывается плотность или значение функции нормального распределения;

среднее – математическое ожидание, используемое в качестве первого параметра модели нормального распределения;

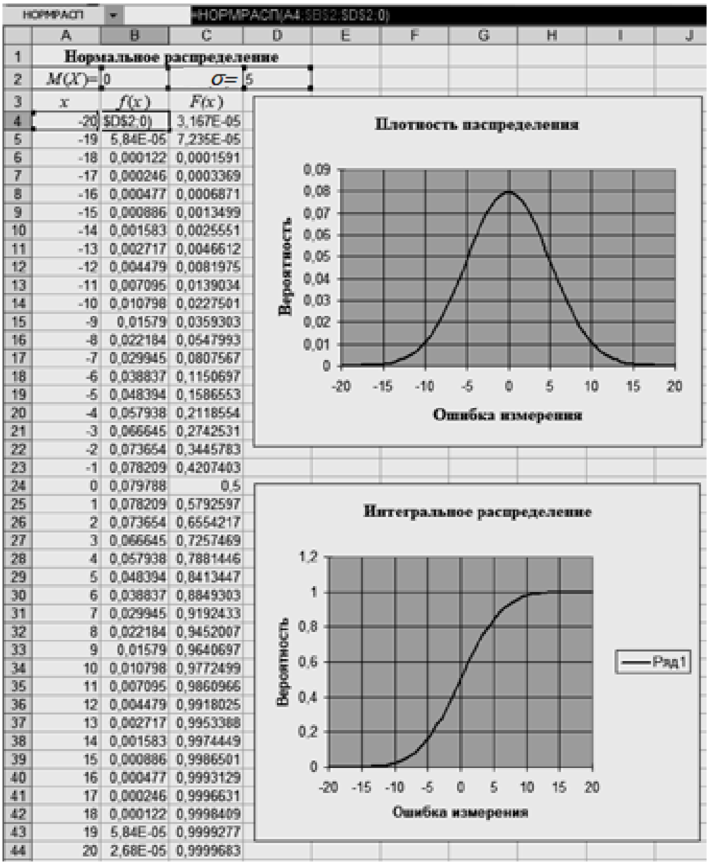
стандартное_откл – среднеквадратичное отклонение – второй параметр модели;

интегральная – если 0, то рассчитывается плотность распределения (дифференциальная функция), если 1 – то значение функции $p(X<x)$, т.е. интегральная функция.

Вид дифференциальной функции приведе в п. 10.1. Интегральная функция распределения: $p(X < x) = F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)dt = \Phi^*\left(\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma}\right).$

Пример. Случайные ошибки измерения площади помещений подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ =5 см и математическим ожиданием a = 0. Построить функцию плотности распределения и интегральную функцию распределения ошибок измерения. Технология решения задач в Excel принципиально не отличается от технологии выше рассмотренных задач, поэтому на рис. 10.17 приведено только решение задачи.

Пример. Для закупки и последующей продажи мужских зимних курток фирмой было проведено выборочное обследование мужского населения города в возрасте от 18 до 65 лет в целях определения его среднего роста. Было установлено, что средний рост 176 см, стандартное отклонение 6 см. Необходимо определить какой процент общего числа закупаемых курток составляют куртки 5 роста (182–185 см). Предполагается, что рост мужского населения города распределен по нормальному закону.



	A	B	C
1	Нормальное распределение		
2	$M(X)=$	0	$\sigma=$ 5
3	x	$f(x)$	$F(x)$
4	-20	$D$2;0)	3,167E-05
5	-19	5,84E-05	7,235E-05
6	-18	0,000122	0,0001591
7	-17	0,000246	0,0003369
8	-16	0,000477	0,0006871
9	-15	0,000886	0,0013499
10	-14	0,001583	0,0025551
11	-13	0,002717	0,0046612
12	-12	0,004479	0,0081975
13	-11	0,007095	0,0139034
14	-10	0,010798	0,0227501
15	-9	0,01579	0,0359303
16	-8	0,022184	0,0547993
17	-7	0,029945	0,0807567
18	-6	0,038837	0,1150697
19	-5	0,048394	0,1586553
20	-4	0,057938	0,2118554
21	-3	0,066645	0,2742531
22	-2	0,073654	0,3445783
23	-1	0,078209	0,4207403
24	0	0,079788	0,5
25	1	0,078209	0,5792597
26	2	0,073654	0,6554217
27	3	0,066645	0,7257469
28	4	0,057938	0,7881446
29	5	0,048394	0,8413447
30	6	0,038837	0,8849303
31	7	0,029945	0,9192433
32	8	0,022184	0,9452007
33	9	0,01579	0,9640697
34	10	0,010798	0,9772499
35	11	0,007095	0,9860966
36	12	0,004479	0,9918025
37	13	0,002717	0,9953388
38	14	0,001583	0,9974449
39	15	0,000886	0,9986501
40	16	0,000477	0,9993129
41	17	0,000246	0,9996631
42	18	0,000122	0,9998409
43	19	5,84E-05	0,9999277
44	20	2,68E-05	0,9999683

Рис. 10.17. Решение задачи об ошибке измерения

Формула для решения задачи имеет следующий вид: =НОРМРАСП(186;176;6;1)–НОРМРАСП(182;176;6;1)=0,95221–0,84134= =0,11086≈11%.

Обратной к функции НОРМРАСП является функция ***НОРМОБР***.

Синтакси функции:

=НОРМОБР(вероятность;среднее;стандартное_откл).

Параметры функции:

вероятность – вероятность, соответствующая нормальному распределению;
среднее – математическое ожидание;
стандартное_откл – среднеквадратичное отклонение.

Пример. В условиях предыдущей задачи определить какому росту соответствует вероятность 0,84134.

Расчет производим по формуле =НОРМОБР(0,84134;176;6), введя ее в свободную ячейку таблицы, либо воспользовавшись мастером функций (рис.

10.18). В результате расчет получим значение роста 182 см что соответствует нижней границы размера курток 5 рост.

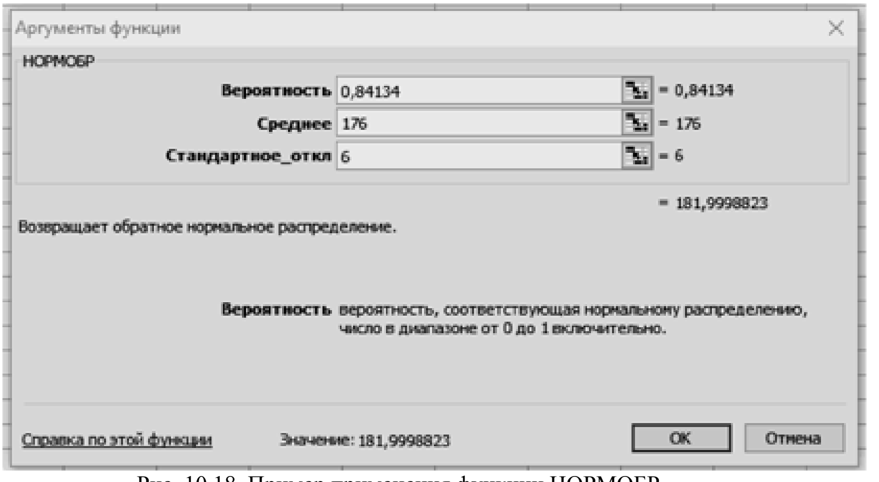


Рис. 10.18. Пример применения функции НОРМОБР

Функция ***НОРМАЛИЗАЦИЯ***

Нормализация заключается в переходе от случайной величины x с математическим ожиданием $\bar{x}$ и дисперсией σ^2 к нормированной величине $t = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$, называемой нормированной или стандартизованной случайной величиной. Она входит в выражение интегральной функции нормального распределения.

Синтаксис функции:

=*НОРМАЛИЗАЦИЯ*(*x*:*среднее*;*стандартное_откл*).

Здесь: *x* – нормализуемое значение;

среднее – среднеарифметическое распределения;

стандартное_откл – стандартное отклонение распределения.

Пример. Нормально распределенная случайная величина характеризуется средним значением 2 и среднеквадратическим отклонением 3. Определить нормализованное значение случайных величин 0; 2; 4.

Решение. =НОРМАЛИЗАЦИЯ(0;2;3) = – 0,66667;

=НОРМАЛИЗАЦИЯ(2;2;3) = 0;

=НОРМАЛИЗАЦИЯ(4;2;3) = 0,66667.

Видно, что поскольку среднее значение равно 2, то нормализованное значение случайной переменно 2 равно 0. Нормализованные значения переменных x= –2 и x=2 симметричны относительно нуля и равны по абсолютной величине.

Функция ***НОРМСТРАСП***

Это стандартное нормальное распределение со средним значение, равным 0 и стандартным отклонением 1.

Синтаксис функции:

=*НОРМСТРАСП*(*z*), где *z* – значение, для которого вычисляется стандартное нормальное распределение и есть не что иное, как значение *t*, возвращаемое функцией *НОРМАЛИЗАЦИЯ*.

Функция ***НОРМСТОБР*** **–** функция обратного нормального распределения, позволяет по известной вероятности определенного значения случайной величины рассчитать это значение.

Синтаксис функции:

=*НОРМСТОБР*(*вероятность*).

Логарифмическое нормальное распределение

Логарифмически нормальное распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами $\bar{x}$ и σ. Этим распределением хорошо аппроксимируются случайные величины, являющиеся результатом умножения большого числа независимых или слабозависимых неотрицательных случайных величин, дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией их сумм. Применяется для описания процессов, в которых наблюдаемое значение составляет случайную долю предыдущего значения.

Плотность логарифмически нормального распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{(\ln x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\},\ \ x > 0, \sigma > 0\ .$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{\frac{(\ln x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} dt\ .$$

Логарифмическое нормальное распределение в Excel рассчитывает функция ***ЛОГНОРМРАСП***.

Синтаксис функции:

= *ЛОГНОРМРАСП*(*x*;*среднее*;*стандартное_откл*).

Обратное логарифмическое нормальное распределение рассчитывает функция ***ЛОГНОРМОБР***

Синтаксис функции:

=*ЛОГНОРМОБР*(*вероятность*;*среднее*;*стандартное_откл*)

Экспоненциальное распределение

Плотность вероятности экспоненциального распределения описывается формулой $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, а интегральная функция распределения $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, где λ – среднее число событий в единицу времени.

Экспоненциальное распределение в Excel рассчитывает функция ***ЭКСПРАСП***.

Синтаксис функции:

=*ЭКСПРАСП*(*x*;*лямбда*;*интегральная*).

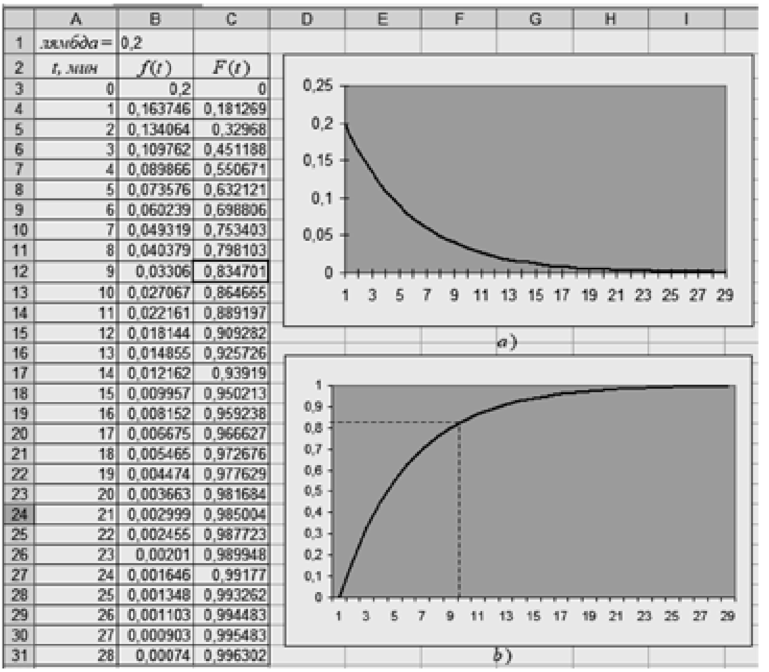
Здесь: *x* – значение для которого вычисляется экспоненциальное распределение;

лямбда – параметр распределения;

интегральная – логическое значение, определяющее форму функции (0 или 1 соответствуют дифференциальной или интегральной форме).

Пример. К автозаправке подъезжают автомобили. Время между последовательным прибытием двух автомобилей – случайная величина с экспоненциальным распределением. Среднее время ожидания очередного автомобиля 5 мин. Параметр λ может быть интерпретирован как среднее число автомобилей, прибывших на заправку в одну минуту (0,2 автомобиля/мин). Построить дифференциальную и интегральную функции распределения времени ожидания прибытия очередного автомобиля.

Решение задачи приведено на рис. 10.19.



	A	B	C
1	*лямбда* =	0,2	
2	*t*, *мин*	*f(t)*	*F(t)*
3	0	0,2	0
4	1	0,163746	0,181269
5	2	0,134064	0,32968
6	3	0,109762	0,451188
7	4	0,089866	0,550671
8	5	0,073576	0,632121
9	6	0,060239	0,698806
10	7	0,049319	0,753403
11	8	0,040379	0,798103
12	9	0,03306	0,834701
13	10	0,027067	0,864665
14	11	0,022161	0,889197
15	12	0,018144	0,909282
16	13	0,014855	0,925726
17	14	0,012162	0,93919
18	15	0,009957	0,950213
19	16	0,008152	0,959238
20	17	0,006675	0,966627
21	18	0,005465	0,972676
22	19	0,004474	0,977629
23	20	0,003663	0,981684
24	21	0,002999	0,985004
25	22	0,002455	0,987723
26	23	0,00201	0,989948
27	24	0,001646	0,99177
28	25	0,001348	0,993262
29	26	0,001103	0,994483
30	27	0,000903	0,995483
31	28	0,00074	0,996302

Рис. 10.19. Пример экспоненциального распределения

В блок ячеек A3:A31 введены значения переменной – интервалы между прибытия машин на автозаправку. В ячейку B3 введена формула =ЭКСПРАСП(A3;$B$1;0), возвращающая значение дифференциальной функции распределения, и скопирована по столбцу вплоть до ячейки D31. В ячейку C3 введена формула =ЭКСПРАСП(A3;$B$1;1), возвращающая значение интегральной функции распределения, и скопирована по столбцу вплоть до ячейки D31. На рис.10.19 *a*) представлен график дифференциальной функции распределения, а на рис 10.10 *b*) – график интегральной функции распределения.

Ответить, к примеру, на вопрос: «Какова вероятность время ожидания прибытия очередного автомобиля будет не более 10 минут?» можно, найдя значение интегральной функции распределения, соответствующее интервалу времени ожидания 9 мин. (в таблице ячейка C12, на рис. 10.19 определение точки на кривой распределения показано пунктирными линиями).

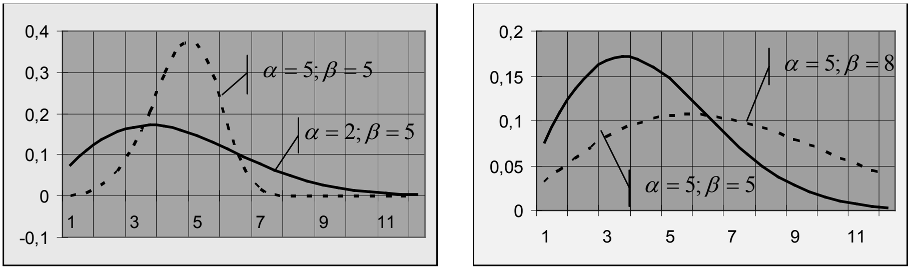
Во многих случаях неадекватность экспоненциального распределения как вероятностной модели исследуемых процессов обусловлена допущением о постоянстве интенсивности числа событий в единицу времени. Наиболее общим распределением, учитывающим изменение интенсивности событий, является распределение Вейбулла. В Excel это распределение задается функцией ***ВЕЙБУЛЛ***.

Синтаксис функции:

=*ВЕЙБУЛЛ* (*x*; *альфа*;*бета*;*интегральная*).

Здесь смысл аргументов *x* и *интегральная* – аналогичен предыдущим распределениям; *альфа* и *бета* – параметры формы и масштаба распределения.

На рис. 10.20 представлены графики дифференциального закона Вейбулла при различных значениях параметров формы и масштаба.



a) *b*)

Рис. 10.20. Распределение Вейбулла (дифференциальная функция)

Пример. Время безотказной работы интерактивной доски подчиняется закону Вейбулла с параметрами $\alpha = 2$ и $\beta = 5$. Определить вероятность появления отказа через 5 лет эксплуатации.

Решение. =ВЕЙБУЛЛ(5;2;5;1) = 0,632121.

При решения ряда статистических задач в различных областях , в том числе в педагогике и психологии, широко используются распределения χ^2 (хи-квадрат распределение или распределение Пирсона), *t*–распределение (распределение Стьюдента), *F*–распределение (распределение Фишера).

Функции χ^2 –распределения (распределение Пирсона)

Особую значимость распределение Пирсона получило из-за своей тесной связи с χ^2–критерием (критерием согласия Пирсона), применяемым для проверки различных статистических гипотез. Суть состоит в том, что исследователь выдвигает гипотезу о теоретическом распределении и вычисляет вероятность, характеризующую ее применимость при условии наличия ряда экспериментальных данных. Гипотеза либо принимается, либо отвергается в зависимости от соотношения рассчитанной вероятности и заданного уровня значимости.

Для расчета χ^2–распределения используется функция =*ХИ2РАСП* (*x*;*степени_свободы*).

Функция =*ХИ2ОБР*(*вероятность*;*степени_свободы*) рассчитывает обратное χ^2–распределение.

Рассмотрение оставшихся функций распределения, реализуемых в Excel, требует углубленной математической подготовки и выходит за рамки данного пособия.

Технология работы с рассмотренными функциями практически одна и та же. Различия только в наборе аргументов функций распределения.

10.2.4. Генерирование случайных чисел

При решении ряда задач как учебного, так и практического характера часто требуется генерировать случайный набор данных или осуществлять случайный выбор элементов из набора данных. К таким задачам, в частности, можно отнести: тестирование формул при различных исходных данных; формирование вопросов различных тестов; случайное распределения заранее пронумерованных задач между сотрудниками; симуляции разнообразнейших процессов на основе метода Монте-Карло и др. Эти и подобные задачи решаются на основе использования случайных чисел.

В Excel генерация случайных чисел может быть организована двумя способами: генерирование чисел программным методом (необходимо написание программы на VBA, что в рамках данного пособия не рассматривается) либо получение случайных чисел, воспользовавшись стандартной (встроенной) функцией Excel.

Для генерирования случайных чисел используется функция =*СЛЧИС*(). Функция не имеет аргументов, генерирует случайное число в диапазоне от 0 до 1. Генерируемые числа распределены по равномерному закону.

Для получения случайного числа из некоторого интервала (*a*; *b*) необходимо воспользоваться формулой = *СЛЧИС*()*(*b*-*a*) +*a*. Генерируемые числа равномерно распределены в заданном интервале. Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам: $M(X)=(a+b)/2$; $D(X)=(b-a)^2/12$.

Для получения целого случайного числа в заданном интервале можно воспользоваться дополнительно функцией =*ЦЕЛОЕ*(*число*). Тогда формула, позволяющая генерировать число имеет вид: =*ЦЕЛОЕ*(*СЛЧИС*()*(*b*-*a*) +*a*).

Эту же задачу можно решить, воспользовавшись функцией *СЛУЧМЕЖДУ*(*нижн_гран*;*верхн_гран*), где *нижн_гран* – наименьшее целое число, которое возвращает функция; *верхн_гран* – наибольшее целое число, которое возвращает функция. Если введенное число *нижн-гран* больше числа *верхн_гран*, то функция возвращает ошибку #*ЧИСЛО*!. Если введено число с дробной частью, то дробная часть будет отброшена.

	A	B	C	D	E	F
1	=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(20-5)+5)	=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(20-5)+5)				=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(20-5)+5)

A1 =ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(20-5)+5)

	A	B	C	D	E	F
1	16	17	14	10	9	16

Рис. 10.21. Генерирование случайных чисел

При необходимости получит случайное число, например, в интервале от 0 до 0,1, нужно написать формулу =СЛУЧМЕЖДУ(0;10)/100 (с точностью 0,01, т.е. случайные значения будут 0,02; 0,05 и т.д.). Формула =СЛУЧМЕЖДУ(0;1000)/10000 позволит получить случайные числа в том же интервале, но с точностью 0,0001, т.е. случайные значения буду 0,0453; 0,0865 и т.д.

На рис. 10.21 *а*) представлен фрагмент листа Excel с формулами, реализующими генерирования случайного числа, согласно вышеописанным вариантам, а на рис. 10.1, *b*) – полученные результаты.

Для получения набора случайных чисел необходимо ввести соответствующую формулу в свободную ячейку и скопировать ее любым способом в нужный диапазон ячеек (рис. 10.22).

	A	B	C
1	**Случайное число в интервале от 0 до 1**		
2	от	до	случайное число
3	0	1	=+СЛЧИС()
4	**Случайное число в интервале**		
5	от	до	случайное число
6	2	10	=СЛЧИС()*(B6-A6)+A6
7	**Случайное целое число в интервале (интервал - целые числа)**		
8	от	до	случайное число
9	2	10	=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(B9-A9)+A9)
10	**Случайное целое число в интервале (интервал - целые числа)**		
11	от	до	случайное число
12	2	10	=СЛУЧМЕЖДУ(A12;B12)
13	**Случайное десятичное число в заданном интервале (интервал - десятичные числа, количество знаков после запятой случайного числа = максимальному количеству знаков после запятой границ интервала)**		
14	от	до	случайное число
15	2	10	=ОКРУГЛ(СЛЧИС()*(B15-A15)+A15;C16)
16			2
17			число знаков после запятой

а)

	A	B	C
1	**Случайное число в интервале от 0 до 1**		
2	от	до	случайное число
3	0	1	0,039665234
4	**Случайное число в интервале**		
5	от	до	случайное число
6	2	10	2,305130668
7	**Случайное целое число в интервале (интервал - целые числа)**		
8	от	до	случайное число
9	2	10	9
10	**Случайное целое число в интервале (интервал - целые числа)**		
11	от	до	случайное число
12	2	10	10
13	**Случайное десятичное число в заданном интервале (интервал - десятичные числа, количество знаков после запятой случайного числа = максимальному количеству знаков после запятой границ интервала)**		
14	от	до	случайное число
15	2	10	8,21
16			2
17			число знаков после запятой

b)

Рис. 10.22. Набор случайных чисел

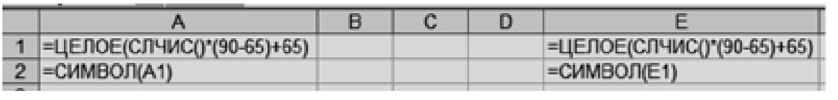
При каждом вычислении листа или при изменении значения в любой ячейке листа возвращается новое случайное число. Если нужно сохранить сгенерированную совокупность, можно заменить формулу на ее значение. Для этого:

– щелкнуть по ячейке со случайным числом;

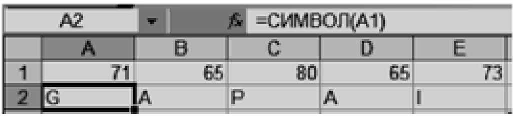
– в строке формул выделить формулу;
– нажать *F9*, затем *Enter*.

Если необходимо заменить формулу на значения в нескольких ячейках, то необходимо выделить все ячейки с формулами, выполнить копирование, открыть *Специальная вставка*, выбрать *Вставить – значения*.

Генерирование случайных чисел можно использовать и для получения случайного набора букв. Для этого нужно воспользоваться кодовой таблицей. К примеру, в кодовой таблице ASCII прописным буквам латинского алфавита соответствуют в десятичном коде номера с 65 по 90, а строчным буквам – с 97 по 122. Следовательно, для получения случайного набора букв необходимо сгенерировать случайную последовательность в этих интервалах, а затем сопоставить полученный десятичный код с буквами. Сказанное иллюстрируется рис. 10.23.



	A	B	C	D	E
1	=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(90-65)+65)				=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(90-65)+65)
2	=СИМВОЛ(A1)				=СИМВОЛ(E1)



A2 =СИМВОЛ(A1)

	A	B	C	D	E
1	71	65	80	65	73
2	G	A	P	A	I

Рис. 10.23. Генерирование случайного набора букв

При моделирование функционирования устройств и процессов возникает необходимость получать набор случайных данных, распределенных по закону, отличающемуся от равномерного. Excel позволяет генерировать случайные числа, распределенные по законам: Бернулли, биномиальному, Пуассона, нормальному, модельному, дискретному.

1. Выбрать сервис *Анализ данных* (*Инструменты анализа*) – *Генерация случайных чисел – ОК* (рис. 10.24).

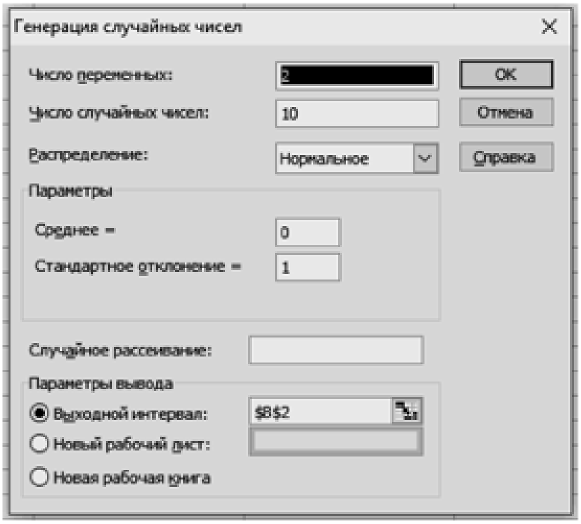


Рис. 10.24. Окно *Анализ данных*

2. В окне *Генерация случайных чисел* выбрать тип распределения (рис. 10.25).

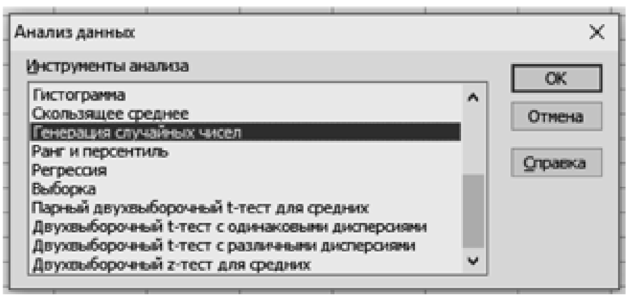


Рис. 10.25. Настройка параметров генерации случайных чисел

3. Установить требуемые параметры:

– *для равномерного распределения* – число переменных, число случайных чисел, нижнюю и верхнюю границы интервала (*Между*), случайное рассеивание (вводится любое значение от 1 до 32767, которое послужит основой для генерации случайных чисел, впоследствии можно снова использовать это значение для получения тех же самых случайных чисел и на других компьютерах, но при одинаковых других параметрах);

– *для нормального распределения* – число переменных, число случайных чисел, среднее значение, стандартное отклонение, случайное рассеивание;

– *для распределения Бернулли* – число переменных, число случайных чисел, вероятность успеха (значение p) в данной попытке;

– *для биномиального распределения* – число переменных, число случайных чисел, вероятность успеха (значение *p*) для нескольких попыток, число испытаний;

– *для распределения Пуассона* – число переменных, число случайных чисел, параметр лямбда (величина, равная обратному значению среднего);

– *для модельного распределения* – число переменных, число случайных чисел, нижняя и верхняя границы интервала (*От … до*), шаг, число повторений значений и число повторений последовательностей;

– *для дискретного распределения* – число переменных, число случайных чисел, входной интервал значений и вероятностей (диапазон должен состоять из двух столбцов: левого, содержащего значения, и правого, содержащего вероятности, связанные со значением в данной строке, сумма вероятностей должна быть равна 1).

4. Установить параметры вывода и щелкнуть *ОК*.

Видно, что технология работы во всех режимах работы «*Генерация случайных чисел*» является одинаковой, особенность заключается только в задании параметров, характерных для конкретных распределений (как правило, они задаются в области *Параметры*).

В качестве примера проведем моделирование процесса срельбы.

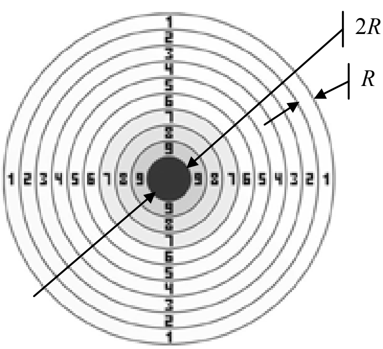


Рис. 10.26. Мишень

Пусть мастерство стрелка характеризуется вероятностью поражения мишени *p*, а вероятность промаха (1–р). Радиус центрального круга, соответствующего 10 очкам, *R*, радиус круга, соответствующего 9 очкам 2*R*, 8 очкам 3*R* и т.д. (рис. 10.6), вероятность случайного элементарного события, заключающегося в том, что стрелок попадет в кольцо мишени, соответствующее какому-либо количеству очков, пропорциональна площади кольца, события попадания в любой участок мишени распределены по равномерному закону. Необходимо построить дифференциальную функцию количества попаданий при заданных значениях *p*, *R* и *n*, где *n* – количество выстрелов.

Площадь внутреннего круга (10-очковая зона) $S_{10} = \pi R^2$, площадь круга, ограниченного 9-очковой зоной $S_9 = \pi(2R)^2$, площадь круга, ограниченного 8-очковой зоной $S_{10} = \pi(3R)^2$ и т.д. Формулы для расчета в ячейках C3:C12 (рис. 10.27).

Площадь 9-очкого кольца $S_{9k} = S_9 - S_{10}$, площадь 8-очкового кольца $S_{8k} = S_8 - S_9$ и т.д. (ячейки D3:D12 таблицы на рис. 10.7).

D13 =”S мишени= ”&ОКРУГЛ(СУММ(D3:D12);2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**R = 2**			**p = 0,9**		**n= 100**				
2		**R круга**	**S круга**	**S кольца**	**P i круг**	**P ik кольцо**	***кол-во очков***	**P ik кольцо**	***случ. попадание***	***кол-во попаданий***
3	R10=	=B1	=ПИ()*$B3^2	=C3	=E4*C3/C4	=E3	10	=F3	5	=ЧАСТОТА(I:I;G3:G13)
4	R9=	=B3+$B$1	=ПИ()*$B4^2	=C4-C3	=E5*C4/C5	=E4-E3	9	=F4	10	=ЧАСТОТА(I:I;G4:G14)
5	R8=	=B4+$B$1	=ПИ()*$B5^2	=C5-C4	=E6*C5/C6	=E5-E4	8	=F5	1	=ЧАСТОТА(I:I;G5:G15)
6	R7=	=B5+$B$1	=ПИ()*$B6^2	=C6-C5	=E7*C6/C7	=E6-E5	7	=F6	3	=ЧАСТОТА(I:I;G6:G16)
7	R6=	=B6+$B$1	=ПИ()*$B7^2	=C7-C6	=E8*C7/C8	=E7-E6	6	=F7	3	=ЧАСТОТА(I:I;G7:G17)
8	R5=	=B7+$B$1	=ПИ()*$B8^2	=C8-C7	=E9*C8/C9	=E8-E7	5	=F8	7	=ЧАСТОТА(I:I;G8:G18)
9	R4=	=B8+$B$1	=ПИ()*$B9^2	=C9-C8	=E10*C9/C10	=E9-E8	4	=F9	8	=ЧАСТОТА(I:I;G9:G19)
10	R3=	=B9+$B$1	=ПИ()*$B10^2	=C10-C9	=E11*C10/C11	=E10-E9	3	=F10	2	=ЧАСТОТА(I:I;G10:G20)
11	R2=	=B10+$B$1	=ПИ()*$B11^2	=C11-C10	=E12*C11/C12	=E11-E10	2	=F11	4	=ЧАСТОТА(I:I;G11:G21)
12	R1=	=B11+$B$1	=ПИ()*$B12^2	=C12-C11	=D1	=E12-E11	1	=F12	1	=ЧАСТОТА(I:I;G12:G22)
13				=”S мишен		=”сумма ве	0	=1-D1	6	=ЧАСТОТА(I:I;G13:G23)
14						=”вероятно			3	

Рис. 10.27. Формулы к задаче о стрелке

События попадания в 10-очковую, 9-очковую,…, 1-очковую зоны независимые, следовательно суммарная вероятность попадания в мишень $p=\sum_{1}^{10} p_{i\text{k}}$, где p_{ik} – вероятность попадания в i-ю зону. В силу принятых условий $\frac{p_1}{p_2}=\frac{S_1}{S_2};\ \frac{p_2}{p_3}=\frac{S_2}{S_3};\ \ldots;\ \frac{p_{i+1}}{p_1}=\frac{S_{i+1}}{S_i};\ \ldots;\frac{p_{10}}{p_9}=\frac{S_{10}}{S_9}$, где p_i – вероятность по падания в круг, ограниченный i-очковой зоной. Учитывая, что p_1=p (вероятность попадания в мишень, получаем $p_{i+1}=p_iS_{i+1}/S_i;\ i=2,\ldots,9$. Вероятности попадания стрелка в круги, ограниченные i-очковыми зонами, рассчитываются в ячейках E3:E12. Вероятности попадания в кольцевые зоны $-p_{(i+1)k}=p_{i+1}-p_i$, где индекс k говорит о том, что вероятность относится не к кругу, а к кольцу. Указанные вероятности рассчитываются в ячейках F3:F12.

В ячейку D13 введена формула

="S мишени= "&ОКРУГЛ(СУММ(D3:D12);2), возвращенный результат которой в случае правильности расчет совпадает с результатом в ячейке C12 (полная площадь мишени).

В ячейке F13 формула:

="сумма вероятностей= "&СУММ(F3:F12), ее результат должен быть равен исходной вероятности p попадания в мишень.

В ячейке F14 формула:

="вероятность промаха= "&(1-D1).

Генерируем случайную последовательность имитирующую результаты выстрелов.

Для этого открываем сервис *Генерация случайных чисел – Распределение Дискретное* (рис. 10.8).

Устанавливаем *Число переменных* 1, *Число случайных чисел* 100 (можно и другое число), *Выходной интервал* – выделяем блок ячеек G3:H13 (заметим, что в первом столбце выделяемого блока должен быть указа интервал генерируемых чисел, а во втором – интервал соответствующих вероятностей).

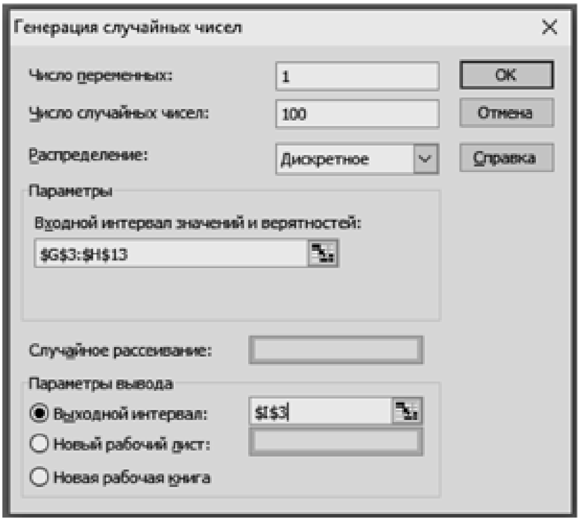


Рис. 10.28. Генерация результатов

После щелчка на *ОК* В столбце I, заданным начальной ячейкой выходного интервала I3, будет сгенерирована случайная дискретная последовательность от 0 до 10.

Для подсчета количества попаданий в зоны, соответствующие количеству очков от 0 до 10 воспользуемся функцией *ЧАСТОТА*. Вычисляет частоту появления значений в интервале значений и возвращает массив чисел.

Синаксис функции:

=*ЧАСТОТА*(*массив данных*;*массив интервалов*),

где *массив данных* – массив или ссылка на множество значений, для которых вычисляются частоты;

массив интервалов – массив или ссылка на множество интервалов, в которые группируются значения аргумента.

Сделать активной ячейку J3 (начало расположения массива частот), применив *Мастер функций*, вызвать функцию *ЧАСТОТА* (рис. 10.29).

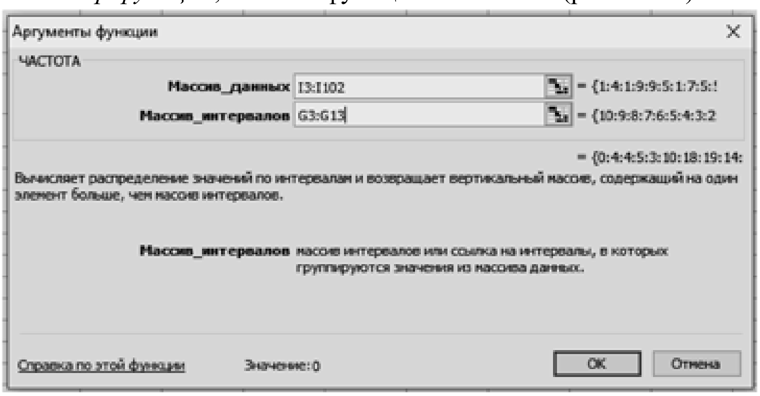


Рис. 10.29. Расчет частоты попаданий в *i*-очковые зоны

Результат решения задачи представлен на рис. 10.30, а на рис. 10.31 показана гистограмма распределения числа выбиты очков на мишени при 100 выстрелах.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	*R* = 2		*p* =	0,9	*n*=	100				
2	*R* круга		*S* круга	*S* кольца	p_i круг	p_{ik} кольцо	*кол-во очков*	p_{ik} кольцо	*случ. попадание*	*кол-во попадан*
3	R10=	2	12,57	12,57	0,009	0,009	10	0,009	4	2
4	R9=	4	50,27	37,70	0,036	0,027	9	0,027	6	2
5	R8=	6	113,10	62,83	0,081	0,045	8	0,045	8	6
6	R7=	8	201,06	87,96	0,144	0,063	7	0,063	0	7
7	R6=	10	314,16	113,10	0,225	0,081	6	0,081	1	11
8	R5=	12	452,39	138,23	0,324	0,099	5	0,099	7	10
9	R4=	14	615,75	163,36	0,441	0,117	4	0,117	6	8
10	R3=	16	804,25	188,50	0,576	0,135	3	0,135	3	16
11	R2=	18	1017,88	213,63	0,729	0,153	2	0,153	3	17
12	R1=	20	**1256,64**	238,76	0,9	0,171	1	0,171	8	20
13				**S мишени= 1256,64**		**сумма вероятностей = 0.9**	0	0,1	7	1
14						**вероятность промаха= 0,1**			9	
15									6	

Рис. 10.30 Результат моделирования стрельбы

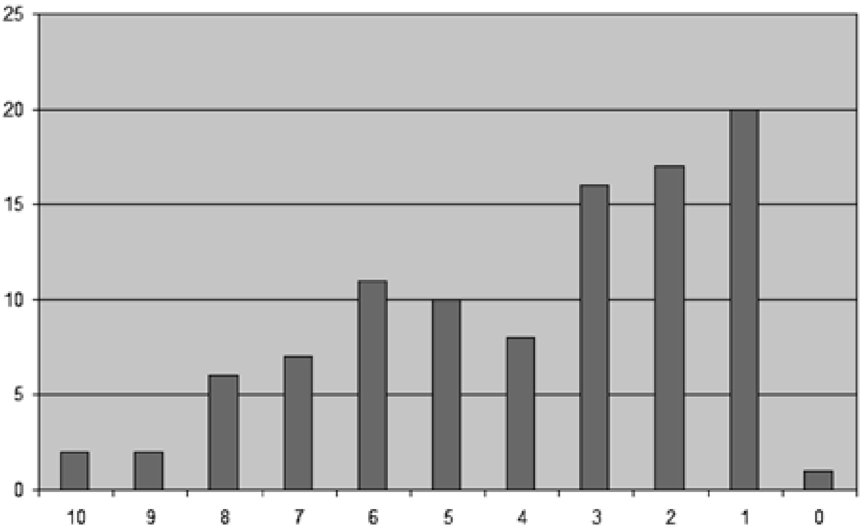


Рис. 10.31. Гистограмма распределения результаты 100 выстрелов по мишени

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вероятность того, что появится случайная величина $x \leq 42$ при нормальном законе распределения вероятностей с $M = 40$ и $\sigma = 1{,}5$.

2. Построить диаграмму нормальной функции плотности вероятности $f(x)$ при $M = 10$ и $\sigma = 2$.

3. Построить диаграмму интегральной нормальной функции распределения вероятности $f(x)$ при $M = 30$ и $\sigma = 3$.

4. Найти квантиль для $p = 0{,}908789$ и нормального распределения с $M = 40$ и $\sigma = 1{,}5$.

5. Найти нормализованное значение x, если $x = 21$, $M = 20$, $\sigma = 1{,}5$.

6. Найти вероятности появления значений меньших и равных 11,98 в экспоненциальном распределении со среднем значением 4.

7. Повар столовой может готовить 7 различных первых блюд (уха, харчо, щи, борщ, бульон, грибной и гороховый супы). Необходимо составить меню на месяц, так чтобы первые блюда чередовались в случайном порядке.

7. Сформировать выборку из 10 случайных чисел, лежащих в диапазоне от 0 до 1.

8. Сформировать выборку из 20 случайных чисел, лежащих в диапазоне от 5 до 20.

9. Пусть спортсмену необходимо составить график тренировок на 10 дней, так чтобы дистанция, пробегаемая каждый день, случайным образом менялась от 5 до 10 км.

10. Составить расписание внеклассных мероприятий на неделю для случайного проведения: семинаров, интеллектуальных игр, КВН и спец. курса.

11. Составить расписание на месяц для случайной демонстрации на телевидении одного из четырех рекламных роликов турфирмы. Причем вероятность появления рекламного ролика №1 должна быть в два раза выше, чем остальных рекламных роликов.

12. Создать последовательность, состоящую из 10 действительных случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне от 3 до 7.

13. Создать последовательность из 10 целых случайных чисел из диапазона 2, 3, 4, 5, с равной вероятностью появления.

14. Какова вероятность того, что трое из четырех следующих новорожденных будут мальчиками?

15. Построить диаграмму биномиальной функции плотности вероятности $P(A{=}m)$ при $m{=}10$ и $p{=}0{,}2$.

16. В условиях предыдущего примера (биномиальная функция плотности вероятности $P(A{=}m)$ при $m{=}10$ и $p{=}0{,}2$) найти значение числа m, для которого вероятность интегрального распределения равна или больше 0,3 .

17. Найти значение интегрального экспоненциального распределения с параметрами: случайная величина $x{=}0{,}2$ и математическое ожидание $M(X){=}0{,}1$.

11. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования *статистических данных* для научных и практических выводов. Статистические данные здесь понимаются как сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

В первом приближении можно сказать, что главная цель математической статистики - получение осмысленных, научно обоснованных выводов из подверженных случайному разбросу данных. При этом само изучаемое явление, генерирующее эти данные, чаще всего слишком сложно, чтобы можно было составить его полное описание, отражающее все детали. Поэтому статистические выводы делаются на основе некоторой математической вероятностной модели реального случайного явления, которая должна воспроизводить его существенные черты и исключать те, которые предполагаются несущественными. Методы математической статистики позволяют по наблюдениям над изучаемым явлением определить вероятностные характеристики случайных величин, участвующих в математической модели, описывающей это явление.

11.1. Основные понятия математической статистики

Выборка - совокупность случайно отобранных объектов.

Объем выборки – количество случайно отобранных объектов.

Генеральная совокупность – совокупность объектов, из которых производится выборка/

Репрезентативность выборки – представительность выборки – ее способность представлять изучаемые явления достаточно полно - с точки зрения их изменчивости в генеральной совокупности.

Варианты – наблюдаемые значения x_k.

Вариационный ряд – последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке.

Частота – число наблюдений.

Относительная частота – отношение частот к объему выборки.

Эмпирическая функция распределения – функции $F(x)=\frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант $X<x$, n – объем выборки, x – произвольное значение аргумента.

Выборочная средняя $\bar{x}_B$ – среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности $\bar{x}_B=(x_1+x_2+...+x_n)\cdot\frac{1}{n}$, если же значение· признака $x_1,x_2,...,x_k$ имеют частоты $n_1,n_2,...,n_k$, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$, тогда $\bar{x}_B=(x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+...+x_k\cdot n_k)\cdot\frac{1}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_in_i}{n}$. При малых и средних выборках в знаменателе вместо n записывается (n-1)/

Выборочная средняя является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной средней.

Выборочная дисперсия D_B - среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего арифметического значения $D_B = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$. Если значения $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то $D_B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 \cdot n_i$.

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Вычисление дисперсии – выборочной или генеральной, можно упростить, используя формулу $D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Если выборка представлена интервальным вариационным рядом, то за x_i принимают середины частичных интервалов.

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии, т.е. математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, а равно – $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ где D_B – выборочная дисперсия. S^2 называют ***исправленной дисперсией***.

Исправленная дисперсия является несмещенной оценкой. В качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию.

Для оценки среднего квадратического генеральной совокупности используют ***исправленное среднее квадратическое отклонение*** $s = \sqrt{S^2}$

Замечание: формулы для вычисления выборочной дисперсии и исправленной дисперсии отличаются только знаменателями. При достаточно больших n выборочная и исправленная дисперсии мало отличаются, поэтому на практике исправленной дисперсией пользуются, если $n<30$.

Статистическое распределение выборки – перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот (вариационный ряд). Статистическое распределение может быть задано в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. (табл. 11.1).

Табл. 11.1. Вариационный ряд

x_1	x_2	x_3	…	x_k	– варианты
n_1	n_2	x_3	…	n_k	– частоты $\left(\sum_{i-1}^{k} n_i = n\right)$
f_1=$n1/n$	f_1=n_2/n	f_1=x_3/n	…	f_1=n_k/n	– относительные частоты $\left(\sum_{i-1}^{k} f_i = 1\right)$

Ассиметрия – показатель, характеризующий отклонение формы статистического распределения выборки от симметричности:

$$A_S = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right), \text{ либо } A_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s^3}\right).$$

При $A_s > 0$ ассиметрия правосторонняя (положительная), при $A_s < 0$ ассиметрия левосторнняя (отрицательная) (рис. 11.1*a*, *b* соответственно).

Эксцесс – показатель, характеризующий островершинность или плосковершинность статистического распределения:

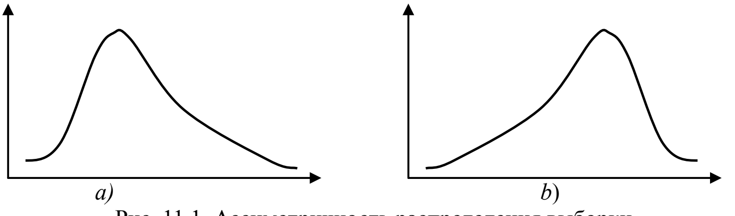


Рис. 11.1. Ассиметричность распределения выборки

$$E_k = \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s} \right)^4 \right) - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}, \text{ либо } E = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4}{s} - 3.$$

Энтропия классификации – степень неопределенности в результатах исходов опыта по выбору элементов n_j из n: $K = -\sum_{j=1}^{J} \frac{n_j}{n} \log \frac{n_j}{n}$.

Стандартная ошибка (стандартная ошибка среднего) – оценка стандартного отклонения распределения выборочного среднего, отклонение результатов, полученных с помощью выборочного наблюдения от истинных данных генеральной совокупности

Доверительный интервал **–** интервал, вычисленный по выборочным данным, который с заданной вероятностью (доверительной) накрывает неизвестное истинное значение оцениваемого параметра распределения.

Доверительная вероятность – вероятность того, что доверительный интервал накроет неизвестное истинное значение параметра, оцениваемого по выборочным данным. В практике исследований чаще всего используют 95%-ую доверительную вероятность. Ошибка выборки (доверительный интервал).

Доверительный интервал $t_{1,2} = \overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} c_\gamma$, где $t_{1,2}$ – нижняя и верхняя границы доверительного интервала; $\overline{x}$ – выборочное среднее арифметическое; s – Среднее квадратичное отклонение по выборке (не смещенное); n – размер выборки; γ – доверительная вероятность (обычно равна 0,9, 0,95 или 0,99); $c_\gamma = \Phi^{-1}((1+\gamma)/2)$ – обратное значение функции стандартного нормального распределения.

Уровень надежности (уровень доверия) – вероятность того, что интервал содержит истинное значение оцениваемого параметра распределения.

Ковариация – среднее произведение отклонений каждой пары значений случайных величин X и Y в исследуемых массивах данных: $\operatorname{cov}(x,y) = \overline{(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$

Корреляция, ***корреляционная зависимость*** — взаимозависимость двух или нескольких случайных величин. Суть ее заключается в том, что при изменении значения одной переменной происходит закономерное изменение (уменьшению или увеличению) другой(-их) переменной(-ых).

Линейный коэффициент корреляции r_{xy} – коэффициент, характеризующий степень «тесноты» *линейной* связи между двумя коррелируемыми признаками.

Линейная вероятностная зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины, другая имеет тенденцию возрастать (или убывать).

При малых выборках (n<30) $r_{xy} = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2\right]\left[n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i)^2\right]}}$, при n>30 $r_{xy} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$. Формулы справедливы для нахождения генерального коэффициента корреляции. Для расчета выборочного коэффициента корреляции необходимо генеральные средние заменить на выборочные средние, а генеральные стандартные отклонения – на выборочные стандартные отклонения.

11.2. Описательная статистика в Excel

Задача описательной статистики заключается в том, чтобы с использованием математических инструментов свести сотни значений выборки к нескольким итоговым показателям, которые дают представление о выборке. В качестве таких показателей используются: среднее, медиана, мода, дисперсия, стандартное отклонение, стандартная ошибка, ассиметричность, эксцесс выборки, уровень надежности.

В разделе 10 была рассмотрена технология расчета ряда показателей (среднее, медиана, мода, дисперсия, стандартное отклонение). Однако, следует обратить внимание на тот факт, что при расчете соответствующих параметров в п. 10.2.1 не учитывались частоты (число наблюдений) исследуемого свойства.

При вычислении соответствующих параметров можно воспользоваться мастером функций, либо, как в п. 10.2.1 вводить соответствующие формулы вручную.

Предлагается самостоятельно выполнить соответствующие расчеты аналогично расчетам в п. 10.2.1 при некотором вариационном ряде, сгенерированном случайным образом.

Отметим особенности ряда функций, рассмотренных в разделе 10.

Функция =*ДИСП*(*число*1;*число*2;…) оценивает генеральную дисперсию по выборке.

Функция *ДИСПР*(*число*1;*число*2;…) возвращает значение несмещенной выборочной дисперсии, рекомендуется применять при малых выборках.

Функция =*СТАНДОТКЛОН*(*число*1;*число*2;…) предполагает, что аргументы являются выборкой из генеральной совокупности.

Функция =*СТАНДОТКЛОНП*(*число*1;*число*2;…) предполагает, что аргументы представляют всю генеральную совокупность.

Для расчета эксцесса Excel имеет встроенную функцию =*ЭКСЦЕСС*(*число1*;*число2*;…). Число аргументов от 1 до 30. Эксцесс оценивается по выборке.

Асимметричность рассчитывает функция =*СКОС*(*число*1;*число*2;…). Число аргументов от 1 до 30. коэффициент асимметрии оценивается по выборке.

Решение задач, связанных с определением показателей описательной статистики намного упрощается, если воспользоваться надстройкой *Пакет анализа.*

Пусть выборка, содержащая 100 вариант, расположена в первом столбце первого рабочего листа текущей рабочей книги (рис 11.2).

Для нахождения точечных оценок числовых параметров неизвестного распределения, которому подчинена генеральная совокупность, следует из меню *Сервис* выбрать пункт *Анализ данных* (рис. 11.3) (для ленточного интерфейса –

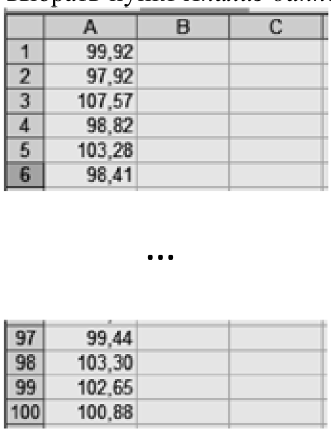


Рис. 11.2. Набор данных

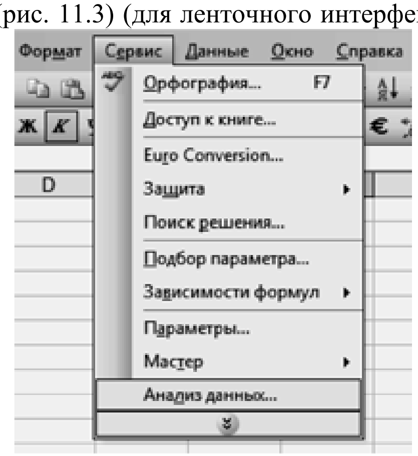


Рис. 11.3. Сервис *Анализ данных*

на вкладке *Данные* следует нажать *Анализ данных*).

В списке *Инструменты анализа* выбрать пункт *Описательная статистика* (рис. 11.4).

В диалоговом окне *Описательная статистика* необходимо указать диапазон рабочего листа, содержащий выборку; в данном примере – \$A\$1:\$A\$100. В качестве выходного интервала достаточно указать первую ячейку второго столбца – \$B\$1. Дополнительно следует установить флажок Итоговая статистика (рис. 11.5). Нажать Enter. Результаты анализа будут помещены во второй столбец (рис. 11.6).

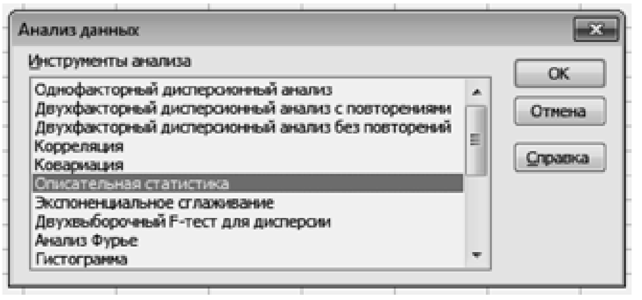


Рис. 11.4. Инструменты анализа

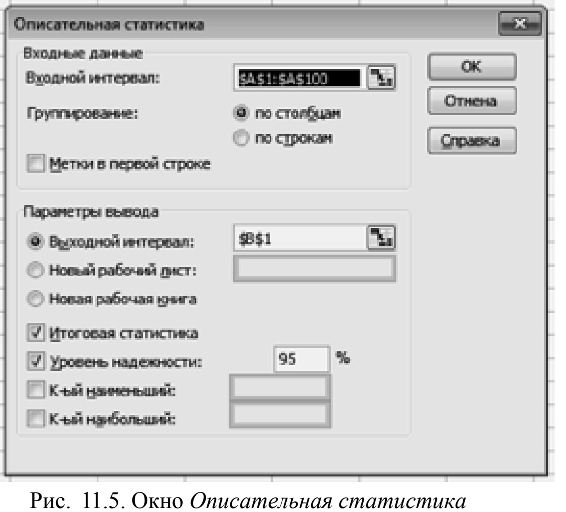


Рис. 11.5. Окно *Описательная статистика*

	A	B	C
1	98,81848	*Столбец1*	
2	96,59832		
3	95,71763	Среднее	99,36420431
4	98,19215	Стандартная ошибка	0,436922039
5	93,02725	Медиана	99,0983838
6	93,24987	Мода	#Н/Д
7	101,4213	Стандартное отклонение	4,369220389
8	102,6194	Дисперсия выборки	19,09008681
9	93,3112	Эксцесс	0,042191976
10	100,8802	Асимметричность	-0,14050704
11	104,8311	Интервал	24,04512998
12	99,65491	Минимум	86,13493517
13	95,21505	Максимум	110,1800651
14	90,42461	Сумма	9936,420431
15	102,9477	Счет	100
16	110,1801	Уровень надежности(95,0%)	0,866948094

Рис. 11.6. Параметры описательной статистики

Указать диапазон, содержащий выборку, можно следующим образом: после установки курсора в поле *Входной интервал* щелкнуть на первой ячейке диапазона ($A$1), затем удерживая клавиши Shift и Control нажать PageDown; при этом диапазон будет расширен до последней заполненной ячейки ($A$100).

Пакет анализа Excel содержит встроенные средства построения непрерывного вариационного ряда и гистограммы, однако эти средства функционируют не совсем корректно. Поэтому часть данных, необходимых для построения гистограммы, следует подготовить отдельно.

Найдем границы интервалов, на которые разбивается общий интервал изменения вариант. Интервал изменения вариант (в данном примере – от 86,1 до 110,2) уже известен. В качестве левой границы первого разряда выберем 85, в качестве правой границы последнего – 111. Выберем длину каждого частичного интервала равную 2. Тогда общее количество интервалов равно (111-85)/2=13.

Вычисление границ частичных интервалов (карманов) удобно выполнять с использованием автозаполнения. В ячейку D1 вводим 90, в ячейку D2 вводим 92. Затем следует выделить ячейки D1 и D2, подвести курсор к маркеру автозаполнения и, удерживая левую клавишу мыши, перевести маркер до ячейки D14 (рис. 11.7).

	A	B	C	D
1	98,81848	*Столбец1*		85
2	96,59832			87
3	95,71763	Среднее	99,36420431	89
4	98,19215	Стандартная ошибка	0,436922039	91
5	93,02725	Медиана	99,0983838	93
6	93,24987	Мода	#Н/Д	95
7	101,4213	Стандартное отклонение	4,369220389	97
8	102,6194	Дисперсия выборки	19,09008681	99
9	93,3112	Эксцесс	0,042191976	101
10	100,8802	Асимметричность	-0,14050704	103
11	104,8311	Интервал	24,04512998	105
12	99,65491	Минимум	86,13493517	107
13	95,21505	Максимум	110,1800651	109
14	90,42461	Сумма	9936,420431	111
15	102,9477	Счет	100	
16	110,1801	Уровень надежности(95,0%)	0,866948094	

Рисунок 11.7. Определение границ карманов

Из меню *Сервис вновь следует* выбрать *Анализ данных*, и в списке инструментов анализа выбрать пункт *Гистограмма*. Как и ранее, входным интервалом будет диапазон $A$1:$A$100. Интервал, содержащий границы разрядов, указывается в поле *Интервал карманов* (в данном примере – $D$1:$D$14). В качестве выходного интервала достаточно указать первую ячейку пятого столбца – $E$1 (рис. 11.8).

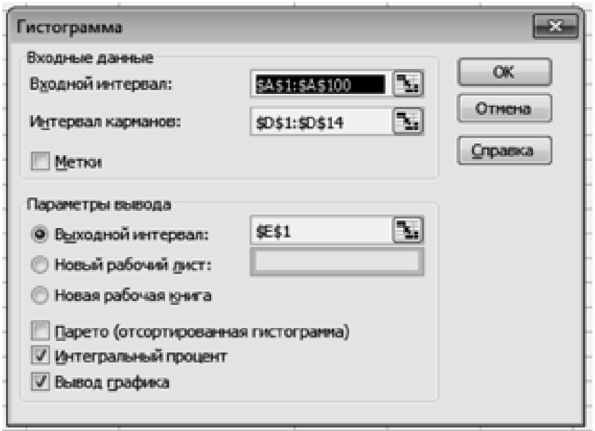


Рис. 11.8. Параметры гистограммы

Результат расчета приведен на рис. 11.9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	98,81848	*Столбец1*		85	*Карман*	*Частота*	*Интегральный %*
2	96,59832			87	85	0	0,00%
3	95,71763	Среднее	99,36420431	89	87	1	1,00%
4	98,19215	Стандартная ошибка	0,436922039	91	89	0	1,00%
5	93,02725	Медиана	99,0983838	93	91	3	4,00%
6	93,24987	Мода	#Н/Д	95	93	2	6,00%
7	101,4213	Стандартное отклонение	4,369220389	97	95	6	12,00%
8	102,6194	Дисперсия выборки	19,09008681	99	97	20	32,00%
9	93,3112	Эксцесс	0,042191976	101	99	16	48,00%
10	100,8802	Асимметричность	-0,14050704	103	101	13	61,00%
11	104,8311	Интервал	24,04512998	105	103	17	78,00%
12	99,65491	Минимум	86,13493517	107	105	12	90,00%
13	95,21505	Максимум	110,1800651	109	107	7	97,00%
14	90,42461	Сумма	9936,420431	111	109	2	99,00%
15	102,9477	Счет	100		111	1	100,00%
16	110,1801	Уровень надежности(95,0%)	0,866948094		Еще	0	100,00%

Рис. 11.9. Результат расчета параметров описательной статистики

На рис. 11.9 показана гистограмма распределения и интегральное распределение случайной последовательности, полученные автоматически.

При необходимости диаграмма и интегральное распределение могут быть построены с использованием *Мастера диаграмм* и результатов расчета из ячеек F2:F16 (Частота) G2:G16 (Интегральный %) таблицы рис 11.9.

В рассмотренном примере величина частичных интервалов определялась пользователем. Если диапазоны карманов не заданы, Excel автоатически их определит в соответствии с формулой $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\{n\} - 1}$, где $\{n\}$ – округленное оптимальное число групп, определяемое по формуле Стерджесса: V=1+3,332lg n, n – число единиц совокупности.

В рассмотренном примере n=100, V=1+3,332lg100=7,644. Приняв n=8, получим h=(111-85)/(8-1)=3,7.

Рис. 11.10 Гистограмма и интегральное распределение

При проведении анализа взаимного расположения значений признака в наборе данных наряду с такими понятиями, как мода, медиана, квартиль используются также понятия ранга и процентранга.

Ранг – номер (порядковое место) значения случайной величины в набое данных.

Если в наборе данных все числа разные, то каждому числу x_i присваивается уникальный ранг R_i.

Если в наборе встречается группа из k одинаковых чисел, то ранг у них одинаковый и равен рангу первого числа из этой группы.

Процентранг – процентное отношениедля каждого значения в наборе данных.

Ранги характеризуют взаимное расположение значений признака в наборе данных.

Синтаксис:

=*РАНГ*(*число*;*ссылка*;*порядок*), где *число* – число, для которого определяется ранг; *ссылка* – массив или ссылка на список чисел; *порядок* – число, определяющее способ упорядочения (если *порядок* = 0 или опущен, то определяется ранг числа, упорядочивая исходный набор данных в порядке убывания; если аргумент порядок является любым не нулевым числом, то ранг определяется, упорядочивая набор данных в порядке возрастания.

На рис. 11.11 показан исходный набор данных и окно функции ранг с выбранными аргументами, а на рис. 11.12 – результат вычисления рангов (после ввода формулы в ячейку В1 необходимо установить абсолютные адреса для блока ячеек А1:А9 и скопировать формулу из ячейки В1 перетягиванием в ячейки В2:В9.

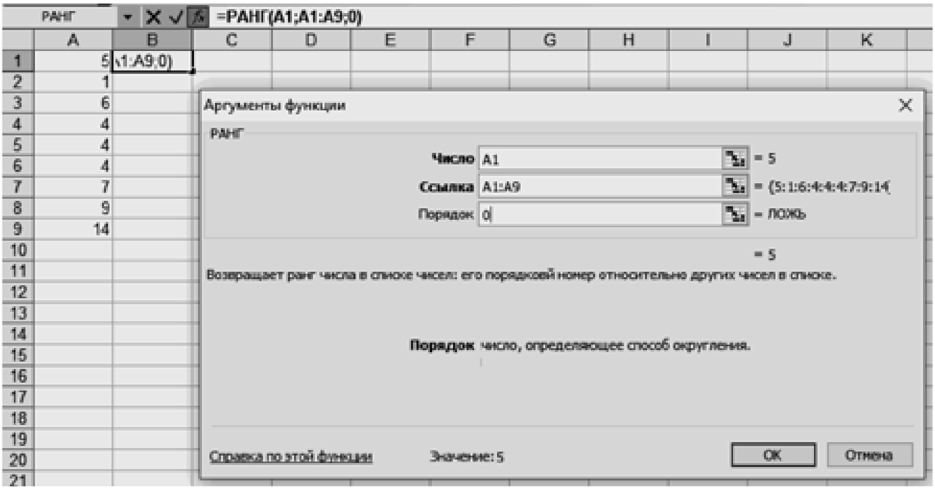
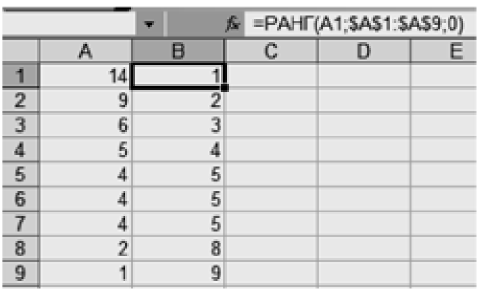


Рис. 11.11. Определения ранга чисел в наборе данных



	A	B
1	14	1
2	9	2
3	6	3
4	5	4
5	4	5
6	4	5
7	4	5
8	2	8
9	1	9

Рис. 11.12. Результат вычисления рангов

Функция КОВАР рассчитывает значение ковариации между двумя массивами данных.

Синтаксис:

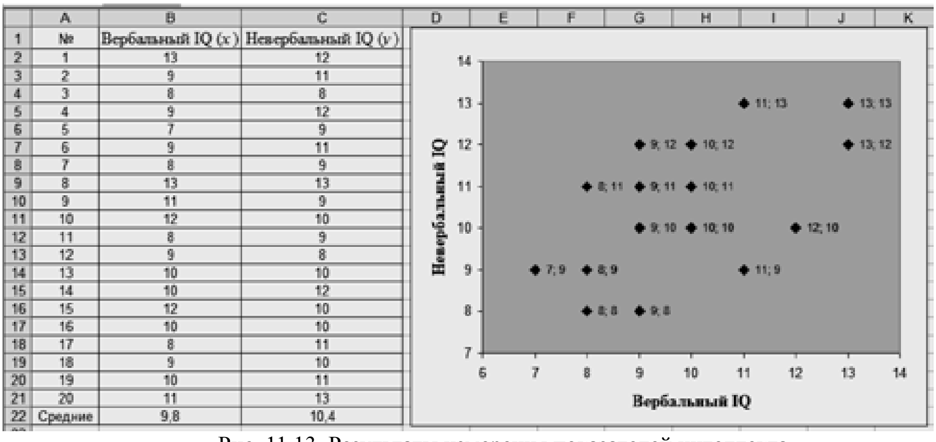
=*КОВАР*(*массив*1;*массив*2).

Функция КОРРЕЛ рассчитывает линейный коэффициент корреляции между массивами данных.

Синтаксис:

=*КОРРЕЛ*(*массив*1;*массив*2).

Пример. На рис. 11.13 в таблице приведен пример исходных данных двух показателей интеллекта (вербальный и невербальный) у 20 учащихся 8-го класса и диаграмма рассеивания для этих данных. Визуально можно предположить, что между данными жесткой связи нет, связь случайная, но имеет положительную тенденцию (при больших значениях x значения y, как правило, увеличиваются. Для определения коэффициента корреляции воспользуемся функцией *КОРРЕЛ* (рис. 11.14).



№	Вербальный IQ (x)	Невербальный IQ (y)
1	13	12
2	9	11
3	8	8
4	9	12
5	7	9
6	9	11
7	8	9
8	13	13
9	11	9
10	12	10
11	8	9
12	9	8
13	10	10
14	10	12
15	12	10
16	10	10
17	8	11
18	9	10
19	10	11
20	11	13
Средние	9,8	10,4

Рис. 11.13. Результаты измерения показателей интеллекта

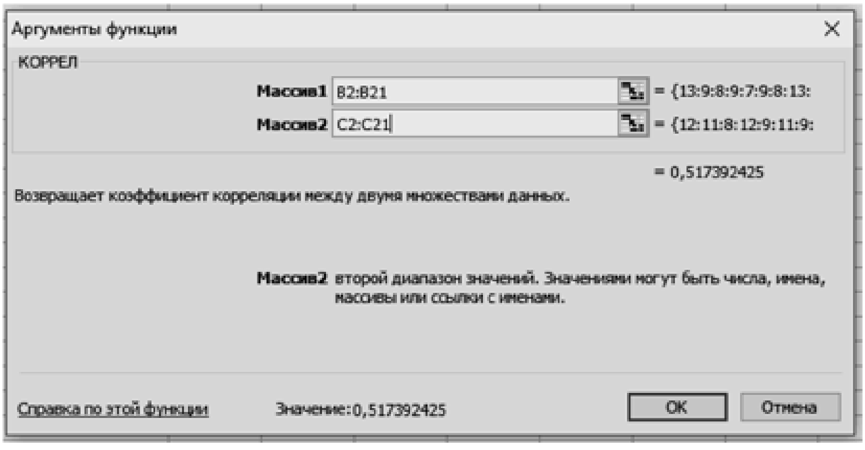


Рис. 11.14. Вычисление коэффициента корреляции

Коэффициент корреляции равен 0,52. Связь между наборами данных имеется – положительная, уровень связи умеренный.

Функция КВПИРСОН – вычисляет коэффициент детерминации r, показывающий величину вариации переменной y, которая объясняется переменной x при наличии статистической линейной связи этих величин. В случае строгой линейной зависимости r=1, при отсутствии зависимости r=0.

Синтаксис:

=*КВПИРСОН*(*массив1*;*массив2*).

Для рассмотренного примера коэффициент детерминации равен 0,27.

Функция ДОВЕРИТ – возвращает доверительный интервал для среднего генеральной совокупности с нормальным распределением.

Синтаксис:

=*ДОВЕРИТ*(*альфа*;*стандартное_откл*;*размер*), где *альфа* – уровень значимости, используемый для вычисления доверительного уровня. Доверительный уровень равен 100*(1–альфа) процентам или, иными словами, значение аргумента *альфа*, равное 0,05, означает 95-процентный доверительный уровень;

стандартное_откл – стандартное отклонение генеральной совокупности для диапазона данных, предполагается известным;

размер – размер выборки.

Пример. Определить доверительный интервал средней продолжительности поездки на работу при объеме выборки 50, уровне значимости 0,05 и стандартном отклонении 2,5.

Решение представлено на рис. 11.15.

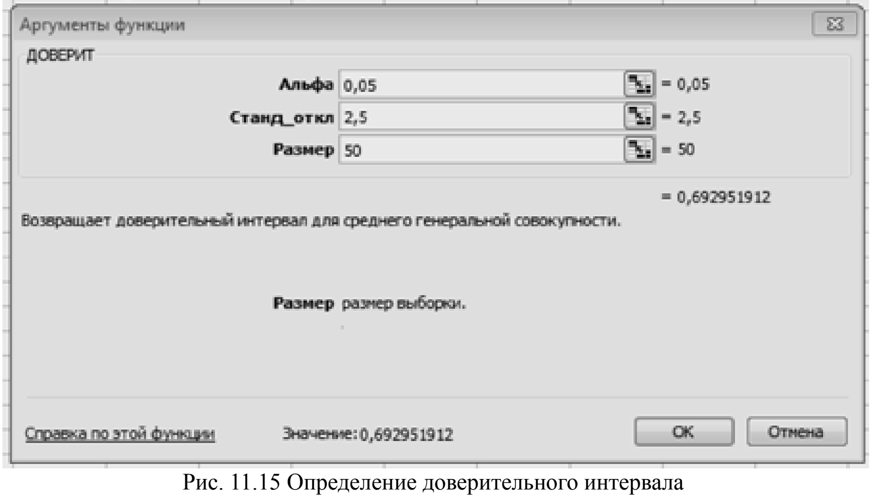


Рис. 11.15 Определение доверительного интервала

Доверительный интервал средней продолжительности поездки на работу для генеральной совокупности составляет 30 ± 0,692952 минуты или от 29,3 до 30,7 минут.

11.3. Анализ и прогнозирование на основе трендов

Начнем с простейшей задачи – интерполяции.

Интерполяция это оценка значения неизвестной величины, находящейся между двумя точками ряда известных величин. Например, известно, что в 7.00 утра температура воздуха была +10 град., в 8.00 +12 град, в 11.00 +18 град., в 12 часов +20 град. Какая была температура воздуха в 10 часов?

Математическая постановка задачи. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Задача интерполяции (или интерполирования) состоит в построении функции $g(x)$, совпадающей с заданной $f(x)$ в некотором наборе точек $\{x_1,x_2,...,x_n+1\}$ из отрезка $[a,b]$ (эти точки называются узлами интерполяции), т.е. должны выполняться условия:

$g(x_k)=y_k$, $k=1,2,...,n+1$,

где y_k – известные значения функции $f(x)$ в точках x_k. Функция $g(x)$ называется интерполянтом функции $f(x)$.

Пример интерполяции с четырьмя узлами приведен на рис. 11.16, из которого видно, что узлы интерполяции не обязательно должны располагаться равномерно на отрезке $[a,b]$.

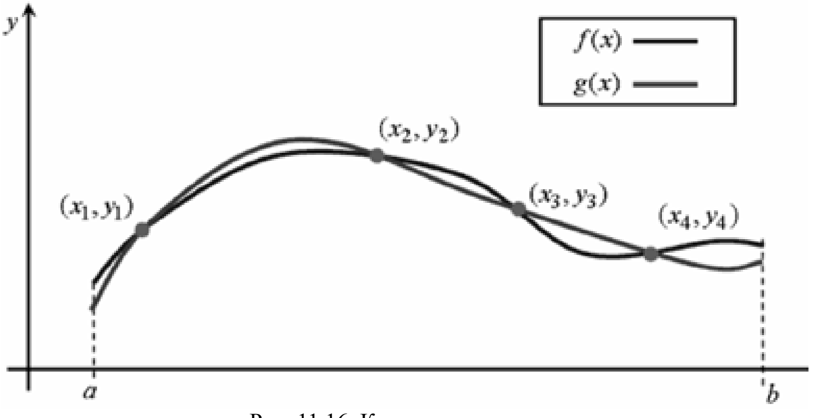


Рис. 11.16. К понятию интерполяции

Если $f(x)$ табличная функция, скажем полученная из эксперимента, т.е. известны только ее значения y_k в точках x_k, то, вообще говоря, о качестве полученного приближения судить трудно. Однако, если значения $f(x)$ могут быть вычислены в любой точке отрезка $[a,b]$, то в этом случае можно исследовать качество получающегося приближения, например найдя максимальное уклонение функции $g(x)$ от функции $f(x)$. На качество приближения сильное влияние оказывает количество и расположение узлов, а также гладкость функции $f(x)$. Линейной интерполяцией называется такая, при которой функция $g(x)$ разыскивается в виде линейной комбинации некоторых функций $g(x)=\sum_{k=1}^{n+1} a_k\varphi_k(x)$, где для $k=1,2,...,n+1$: $\varphi_k(x)$ – заданные функции, а a_k – искомые коэффициенты.

В Excel присутствует функция *ПРЕДСКАЗ*, позволяющая выполнить интерполяцию. Рассмотрим данные, размещенные в таблице, представленной ниже.

Предположим, что нам нужно узнать значение для аргумента $x=28$. Для этого: выделить любую пустую ячейку на листе табличного процессора, куда будет выводиться результат от осуществленных действий, например C1; вызвать Мастер функций; в категории *Математические*; выбрать функцию *ПРЕДСКАЗ* и нажимают на «ОК». В окне аргументов есть 3 поля. В первое ввести с клавиатуры значение аргумента (в конкретной задаче это 28). Заполнить поле *Известные_значения_y*, выделив соответствующую область на листе. В конкретном случае это часть столбца B с адресами из диапазона B2:B7. Точно так же заполняют поле *Известные_значения_x* и нажать на кнопку «Ок». В результате в выделенной ячейке C1 отображается значение 176, являющееся итогом процедуры интерполяции (рис. 11.17).

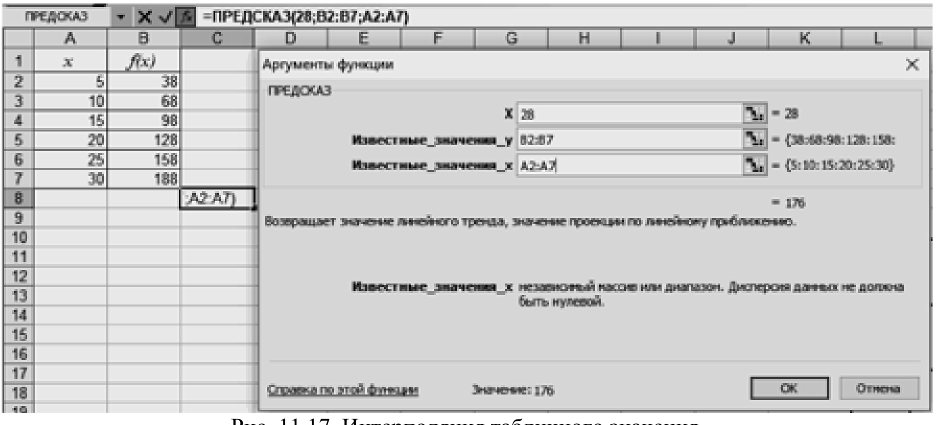


Рис. 11.17. Интерполяция табличного значения.

Тренд – это функция заданного вида, с помощью которой можно аппроксимировать построенный по данным таблицы график. Тренд служит для выявления тенденций развития процесса, представленного в виде диаграммы, и обеспечивает прогноз на заданный период.

В Excel предусмотрено несколько стандартных типов тренда: линейный, логарифмический, степенной, экспоненциальный, полиномиальный, скользящее среднее.

Тренд можно строить для диаграмм типа:

линейчатый график,

гистограмма,

диаграмма с областями,

XY-точеная диаграмма.

При установлении наиболее подходящего типа регрессионной зависимости для описания процесса изменения показателей какой-либо величины используют показатель достоверности описания функции. Тип регрессионной линии считается установленным, если величина достоверности аппроксимации $R^2=1$. Однако, если аппроксимации $R^2<0{,}6$ уместно говорить о том, что тип зависимости для описания процесса изменения показателя не подходит.

Если ни в одном из вариантов исследуемых типов регрессионных линий (трендов) величина достоверности аппроксимации не равна единице, то выбирают тот тип, для которого величина достоверности аппроксимации максимальна.

Технологию анализа и прогнозирования рассмотрим на примере.

Имеются две наблюдаемые величины *x* и *y*. Для того чтобы построить прогноз развития какой-либо ситуации на практике зачастую необходимо знать закономерность изменения исследуемой величины или объекта.

Для выявления тенденций развития процесса необходимо построить тренды и осуществить их анализ.

Исходным пунктом моделирования трендов является построение диаграммы.

По исходным данным, используя Мастер диаграмм, построим графическую зависимость данных, представленных в таблице (рис. 11.18).

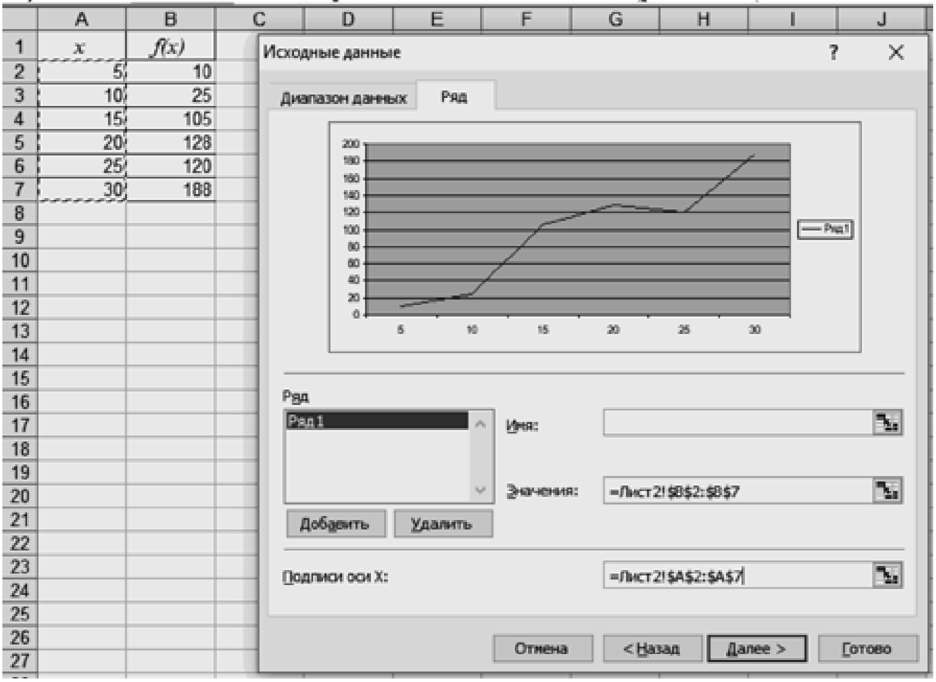


Рис. 11.18. Построение диаграммы процесса $f(x)$

Построить линейный тренд для диаграммы. Для этого необходимо:

установить указатель мыши на линии диаграммы и щелкнуть левой кнопкой мыши так, чтобы на линии появились черные метки

для выделенной диаграммы вызвать контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши;

выполнить команду *Добавить линию тренда* (рис. 11.19);

в диалоговом окне *Линия тренда* на вкладке *Тип* выбрать окно *Линейная* (рис. 11.20);

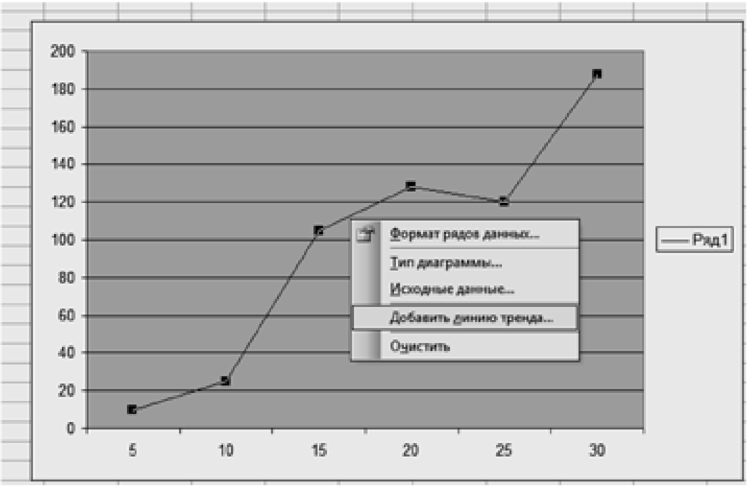


Рис. 11.19. Добавление линии тренда

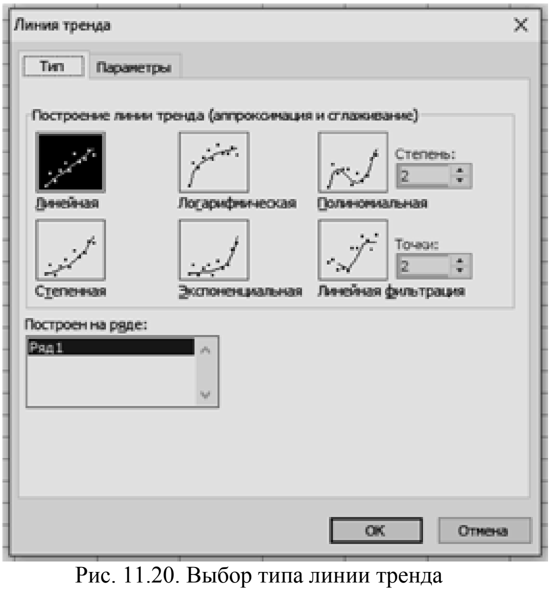


Рис. 11.20. Выбор типа линии тренда

на вкладке *Параметры* установить следующие параметры (рис. 11.21):

название аппроксимирующей кривой: автоматическое

прогноз: вперед на 2 периода;

показывать уравнение на диаграмме: установите флажок;

поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации: установите флажок.

подтвердить действия нажатием кнопки ОК

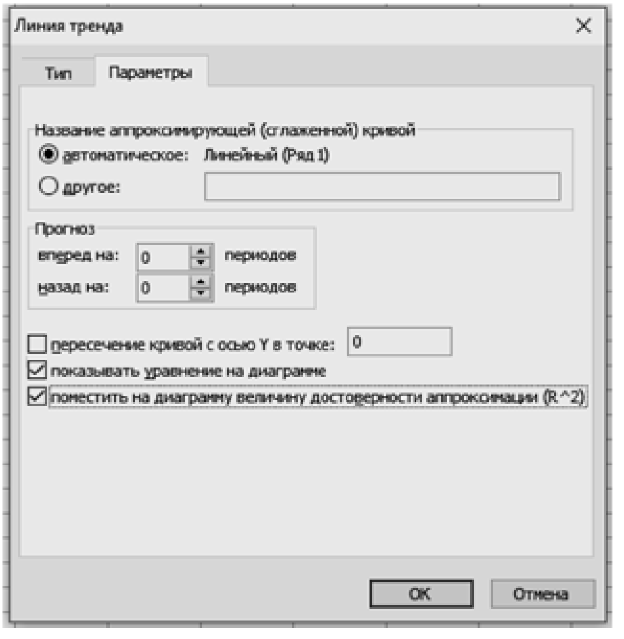


Рис. 11.21. Установка параметров тренда

Построенная аппроксимирующая линия тренда показана на рис. 11.21, здесь же линия тренда типа полинома пятой степени.

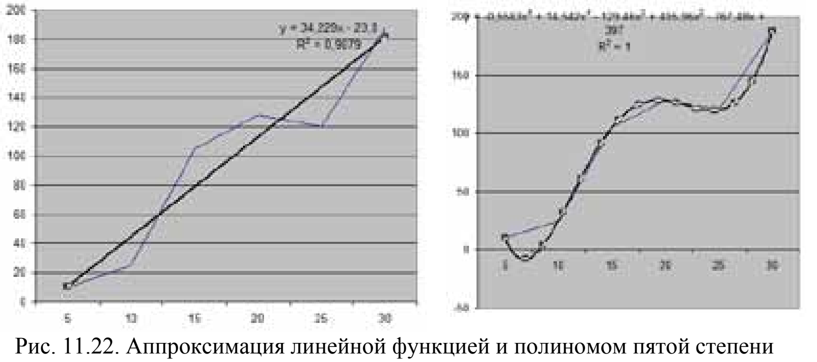


Рис. 11.22. Аппроксимация линейной функцией и полиномом пятой степени

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии, а также найти доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности 0,95 для распределения содержания железа в руде по данным, представленным в таблице. Допустить, что содержание железа подчиняется нормальному закону.

Интервалы, %	28-32	32-26	36-40	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
Частоты	1	9	29	55	72	56	27	7	1

2. Выполнить полиномиальную аппроксимацию функции $F(x) = \sqrt{1+x^2} + 2^{-x}$ на интервале [-1;3].

3. Учебные достижения учащихся некоторого класса по математике характеризуются данными, представленными в таблице.

Количество баллов *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число учащихся *n*	1	1	2	3	4	4	6	5	3	3	2	1

Построить полигон частот.

4. По результатам тестирования по математике учащихся 7-го класса получены данные о доступности заданий теста (отношение числа учащихся, правильно выполнивших задания, к числу тестировавшихся учащихся), предствленные ниже, в таблице. Тест содержал 25 заданий. Построить гистограмму.

Доступность задания *x*, %	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
Количество задач *n*	1	1	5	7	7	3	1

5. По данным таблицы составить кумулятивный вариационный ряд, для которого построить кумуляту.

Количество баллов *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число учащихся *n*	1	1	2	3	4	4	6	5	3	3	2	1

6. Два стрелка сделали 100 выстрелов. Первый выбил 8 очков 40 раз, 9 очков - 10 раз и 10 очков - 50 раз. Второй выбил 8, 9 и 10 очков соответственно - 10, 60 и 30 раз. Какой из стрелков стреляет лучше?

7. Вычислить моду, медиану, среднее значение, среднее квадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс по выборке: 0,73; 1,49; 1,56; 0,06; 0,87; 0,85; 0,39; 0,06; 1,22; 1,77; 0,27; 0,03; 0,11; 0,88; 3,36; 0,63; 1,32; 0,74; 0,04; 0,39; 0,74; 2,54; 0,74; 0,29; 0,18; 3,13; 0,05; 0,05. Сделать выводы.

8. В таблице представлены данные, собранные по 13 странам мира, включающие затраты на образование в процентном выражении от ВВП (y), количество лет обучения населения старше 25 лет (x1), долю населения в возрасте до 14 лет в общей численности населения (x2). Проверить предположение о наличии связи между переменными, рассчитав показатели тесноты связи.

Y	2	4,3	4,7	9	4,4	6,3	3,5	4,5	4,8	5,4	4,3	4,1	7,3
X1	5,7	8,1	3,2	9	5,7	4,4	4,4	7,2	5,4	7,6	3,6	5,9	4,4
X2	0,3	0,3	0,2	0	0,2	0,3	0,3	0,2	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3

9. На телефонной станции проводились наблюдения над числом X неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие 60 значений:

3; 1; 3; 1; 4; | 1; 2; 4; 0; 3; | 0; 2; 2; 0; 1; | 1; 4; 3; 1; 1;
4; 2; 2; 1; 1; | 2; 1; 0; 3; 4; | 1; 3; 2; 7; 2; | 0; 0; 1; 3; 3;
1; 2; 1; 2; 0; | 2; 3; 1; 2; 5; | 1; 2; 4; 2; 0; | 2; 3; 1; 2; 5.

10. Вычислить описательные статистики, используя режим *Описательная статистика*.

11. По выборке объема $n = 9$ найдено среднее значение $\bar{x}_в = 1.5$. Считая, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с $\sigma = 2$, определить интервальную оценку для математического ожидания с надежностью $\gamma = 0.95$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным критерием современного общеобразовательного учреждения является создание условий для перехода к новому уровню образования на основе информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) посредством формирования компетентностной информационной образовательной среды. Применение современных образовательных технологий в практике обучения является неотъемлемым условием интеллектуального, творческого и нравственного развития учащихся.

В настоящее время ИКТ востребованы не только школьниками, но и учителями, педагогами-психологами, руководством образовательных учреждений любого типа. В XXI веке компьютер стал незаменимым и уникальным инструментом, который в руках учителя-мастера, администратора-профессионала, ученика-интеллектуала служит средством творческой работы, успешной учебы и интересного общения.

Современные компьютерные технологии предполагают отказ от веками складывавшихся представлений о способах работы с информацией. Изучение новых технологий для людей, не связанных с вычислительной техникой зачастую вызывает неуверенность в своих силах и даже страх перед техникой. К учительской аудитории, как одной из наиболее консервативных, это относится даже в еще большей степени.

Построение учебно-методического пособия основано на следующих положениях:

Преодоление психологического барьера. Это один из наиболее важных моментов. С самого начала, опираясь на известные каждому учителю принципы наглядности, доступности, перехода от простого к более сложному, в пособии предпринята попытка показать, что компьютерные технологии – это не просто, а очень просто. Это технология в «чистом» виде: выполнив определенную последовательность действий всегда получаем нужный результат.

Ориентация при обучении на внутреннюю мотивацию и технологию контекстного обучения. Учитель должен четко видеть преимущества и выгоды компьютерной технологии, понимать ее необходимость.

Четкая организация самостоятельной работы. При этом используются подробно разработанные алгоритмы для первых разделов, при дальнейшем освоении технологий решения задач степень детализации действий уменьшается.

Материал учебно-методического пособия в основном соответствует тематике дисциплин Алгебра и Геометрия средней общеобразовательной школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзек, М.П., Финков, М.В., Прокди, Р.Г. вычисления, графики и анализ данных в Excel 2013. Самоучитель. – СПб.: Наука и техника, 2015. – 416 с.
2. Васильев, А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel. – М. Издательский дом "Вильямс", 2004. – 512 с.
3. Васильков, Ю.В., Василькова, Н.Н. компьютерные технологии в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. -256 с.
4. Гельман, В.Я.. Решение математических задач средствами Excel. Практикум. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 240 с.
5. Зенков, А.В. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Юрайт, 2017. – 122 с.
6. Лялин, В.С. Статистика: теория и практика в Excel: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2010. - 448 с.
7. Макарова, И.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
8. Опойцев, В.И. Школа Опойцева: Арифметика и алгебра. Краткий курс (6-11). – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 200 с.
9. Пантелеев, А.В., Кудрявцев, И.А.Численные методы. Практикум. Учеб. пособие. – Инфра-М, 2017. – 512 с.
10. Посветов, Г.И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения: Учебно-практическое пособие. – М.: Издательство «Альфа_Пресс», 2015. – 160 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Сдано в печать 15.12.2017. Усл. печ. л. 12,54. Гарнитура Georgia.

Отпечатано в типографии ООО «Дизайн-студия Б».
Ставрополь, ул. Краснофлотская, 88.

Учебно-методическое пособие рассчитано на повышенный уровень сложности владения MS Excel при реализации математических моделей из разделов геометрии, алгебры, дискретной математики, основ математического анализа, теории вероятности и математической статистики, хотя включает в кратком изложении и ряд базовых положений работы с программой.

В пособии приведены примеры использования MS Excel и задачи для самостоятельного решения.