А.А. ВЕНДИНА П.Ф. СЕВРЮКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и молодежной политики
Ставропольского края
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный педагогический институт»

А.А. Вендина **П.Ф. Севрюков**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ставрополь, 2017

УДК 517
ББК 22.1
В 29

Рецензенты: **В.В. Бондарь,** заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

С.П. Бабёнышев, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ТК и О технологического института сервиса (филиал) Донского государственного технического университета.

Вендина А.А., Севрюков П.Ф.

В 29 Математический анализ для педагогов: учебное пособие / А.А. Вендина, П.Ф. Севрюков. — Ставрополь : Дизайн-студия Б, 2017. — 104 с.

ISBN 978-5-6040510-7-8

Учебное пособие представляет собой краткий курс математического анализа. Рассматриваются следующие разделы: введение в математический анализ, пределы и непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисления. В каждой теме приводится набор теоретических фактов и формул, необходимый для решения практических заданий; типовые задачи с подробными решениями и большое количество задач, которые могут быть использованы при работе со студентами любой формы обучения: очной, заочной, очно-заочной.

Предназначено для студентов образовательных учреждений высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), уровень образования – бакалавриат, профили: «Начальное образование и информатика», «Математика и информатика», а также для слушателей курсов профессиональной переподготовки кадров педагогического образования по профилям: «Математика», «Физика», «Информатика».

УДК 517
ББК 22.1

ISBN 978-5-6040510-7-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Понятие функции

Пусть даны два непустых числовых множества X и Y. Закон f, который каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, называется ***числовой функцией***, определенной на множестве X и обозначается $y = f(x)$. Множество X называется ***областью определения функции***. Обозначается $D(y)$ или $D(f)$. Множество Y называется ***множеством значений функции***. Обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

Величина x называется ***аргументом*** или ***независимой переменной***, а y – ***функцией*** или ***зависимой переменной***.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$; $a \in X$ записывают $f(a)$. Например, если $f(x) = x^2 - 2x + 9$, то $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 9 = 9$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$.

1.2. Сложная функция

Пусть функция $y = f(z)$ есть функция от переменной *z*, определенной на множестве *Z* с областью значений *Y*, а переменная *z*, в свою очередь, является функцией $z = g(x)$ от переменной *x*, определенной на множестве *X*, причем $\forall x \in X$ соответствующее значение $g(x) \in Z$, тогда функция $y = f[g(x)] = f_1(x)$, заданная на множестве *X*, называется ***сложной функцией*** *x* или ***суперпозицией*** (***наложением***) ***функций*** *f* и *g*. В такой функции *x* – независимая переменная, а *z* – промежуточный аргумент. Еще часто *f* называют внешней функцией, а *z* – внутренней.

Другими словами, функция называется сложной, если она является функцией от функции. Например, $y = sin(x + 1)$. Эта функция – сложная.

Внутренняя функция z здесь равна $x+1$, а внешняя функция f – это синус. То есть $z = x+1,\ f = sin\, z$.

Чтобы найти значение сложной функции сначала подставляют заданное значение x_0 во внутреннюю функцию и находят ее значение $z_0 = g(x_0)$, а затем уже вычисляют соответствующее значение функции $y_0 = f(z_0)$.

Из определения сложной функции следует, что областью определения сложной функции $y = f[g(x)]$ является либо вся область определения функции $z = g(x)$, либо та ее часть, в которой определены значения z, не выходящие из области определения $f(z)$.

Примеры.

1. Функция $y = sin\, z$ определена на всей числовой оси, функция $z = x^3$ также определена на всей числовой оси. Суперпозиция этих функций $y = sin\, x^3$ является сложной функцией x, определенной на всей числовой оси.

2. Из функций $y = arccos\, z$ и $z = 5 + x^2$ нельзя образовывать сложную функцию, так как функция $y = arccos\, z$ определена для $z \in [-1; 1]$, а функция $z = 5 + x^2 > 1$, то есть ее значения не принадлежит этому отрезку.

3. Пусть даны функции $z = g(x) = x^2 + 1,\ y = f(z) = \sqrt{z}$. Тогда сложная функция $y = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

4. Сложную функцию $f(x) = \sqrt{log_2 sin\, x}$ представим в виде цепочки элементарных функций: будем последовательно выполнять операции, которые заданы в формуле: $z = g(x) = sin\, x,\ t = f(z) = log_2 z,\ y = \varphi(t) = \sqrt{t}$. Следовательно, заданная в условии задачи функция является суперпозицией трех функций: $y = \varphi[f(g(x))]$.

5. Даны функции $y = \sqrt{z+1}$, $z = t^4$, $t = sin\, u$, $u = 2x$. Запишем сложную функцию $y = f(x)$, подставляя последовательно функции одну в другую: $y = \sqrt{sin^4 2x + 1}$.

1.3. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, такова, что любым двум различным значениям аргумента x ставит в соответствие различные значения y, то есть, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Эта функция устанавливает ***взаимно однозначное соответствие*** между областью своего определения X и областью изменения Y.

Пусть на множестве X функция $y = f(x)$ с областью значений Y устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y. Тогда каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, то есть множестве Y определена функция $x = \varphi(y)$ с областью значений X. Такая функция называется ***обратной*** к $f(x)$ и обозначается $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются ***взаимно обратными***. Для взаимно обратных функций выполняется условие $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(f(x)) = x$. Графики взаимообратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, то есть относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

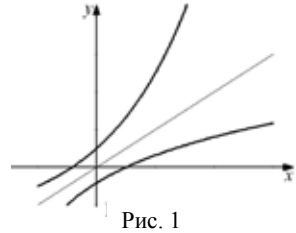


Рис. 1

Для того чтобы найти функцию $x = f(y)$, обратную функции $y = f(x)$ необходимо решить уравнение $x = f(y)$, если это возможно, и в полученном выражении $x = f^{-1}(y)$ букву x заменить буквой y, букву y – буквой x.

✦ **Пример 1.** Имеют ли функции $f(x) = 0{,}5(3x + 7)$ и $g(x) = x^2 + 1$ обратные? Если да, то найдите их.

Решение. Выразим x из формулы $y = 0{,}5(3x + 7)$: $x = \dfrac{2y - 7}{3}$. Обозначив аргумент через x, а функцию через y, получим $y = \dfrac{2x - 7}{3}$, то есть функция $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 7}{3}$ является обратной к функции $f(x) = 0{,}5(3x + 7)$.

Функция $g(x)=x^2+1$ не имеет обратной, так как она не устанавливает взаимно однозначное соответствие. Действительно, $g(-1)=g(1)=2$.

✦ **Пример 2.** Являются ли функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sqrt{x}$ взаимно обратными?

Решение. Нет, так как $g(f(x))=\sqrt{x^2}=|x|\neq x$. Однако, если данные функции рассматривать только при $x\geq 0$, то есть считать $D(f)=[0;+\infty)$, то эти функции становятся взаимно обратными.

1.4. Основные характеристики функции

Изучить функцию – это значит охарактеризовать ход ее изменения (как говорят «ее поведение») при изменении независимой переменной.

Для характеристики поведения функции используют следующие ее свойства.

А. Монотонно возрастающие и убывающие функции

Функция $y=f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** на множестве $X\subset D(f)$, если для любой пары точек x_1, $x_2\in X$ из условия $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)<f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 2).

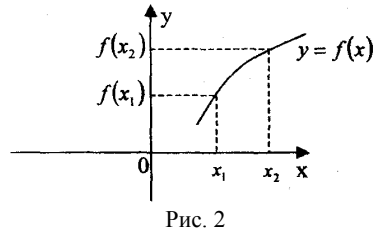


Рис. 2

Функция $y=f(x)$ называется ***монотонно убывающей*** на множестве $X\subset D(f)$, если для любой пары точек x_1, $x_2\in X$ из условия $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)>f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 3).

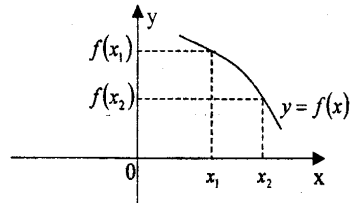


Рис. 3

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие функции называют ***монотонными***.

Монотонные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

2) произведение двух положительных монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

3) если функция $y = f(x)$ монотонно возрастающая (монотонно убывающая), то функция $y = -f(x)$ монотонно убывающая (монотонно возрастающая);

4) если положительная функция $y = f(x)$ является монотонно возрастающей (монотонно убывающей), то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является монотонно убывающей (монотонно возрастающей);

5) если функция $y = f(x)$ монотонная, то она имеет обратную функцию.

Б. **Четные и нечетные функции**

Говорят, что множество X ***симметрично относительно начала координат***, если для любой точки $x \in X$ существует противоположная точка $-x \in X$.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если выполняются два условия: а) область определения функции симметрична относительно начала координат; б) для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если выполняются два условия: а) область определения функции симметрична относительно начала координат; б) для любого x из области определения справедливо равенство

$f(-x) = -f(x)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется ***функцией общего вида***.

Из определения четной и нечетной функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 4, 5).

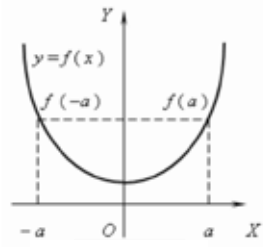


Рис. 4

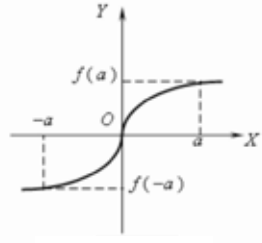


Рис. 5

Четные и нечетные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная);

2) произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная;

3) если нечетная функция $f(x)$ определена в нуле, то $f(0) = 0$;

4) всякая функция, определенная на множестве *X*, симметричном относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы двух функций, определенных на *X*, причем одна из этих функций является четной, а другая – нечетной.

✦ **Пример 3**. Исследуйте функции на четность и нечетность.

1. $f(x) = x^3 - \sin x$. 2. $f(x) = x^5 tgx$. 3. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x-1}$.

Решение. 1. $f(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) = -x^3 + \sin x = -(x^3 - \sin x)$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то функция $f(x) = x^3 - \sin x$ является нечетной.

Отметим также, что данная функция $f(x)$ представляет собой сумму двух нечетных функций $f_1(x)=x^3$ и $f_2(x)=-\sin x$, а, значит, и их сумма тоже будет нечетной функцией.

2. $f(-x)=(-x)^5 tg(-x)=-x^5(-tgx)=x^5 tgx$. Так как $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)=x^5 tgx$ является четной.

Можно было рассуждать и иначе: функции $f_1(x)=x^5$ и $f_2(x)=tgx$ – нечетные, а, значит, их произведение является четной функцией.

3. Функция $f(x)=\dfrac{2x^3}{x-1}$ является функцией общего вида, так как ее область определения не является симметричной относительно начала координат: $D(f)=R\setminus\{1\}$.

В. **Ограниченность**

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве $X\subset D(f)$, если существует такое число *M*, что значение функции в любой точке X не превосходит этого числа, то есть для любого $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\le M$.

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве $X\subset D(f)$, если существует такое число *m*, что значение функции в любой точке X не меньше этого числа, то есть для любого $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\ge m$.

Ограниченная сверху и снизу на множестве *X* функция называется о***граниченной*** на этом множестве. Другими словами, если функция $f(x)$ ограничена на множестве *X*, то существуют такие числа *m* и *M*, что $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in X$.

Г. **Точки экстремума**

Точка $x_0\in D(f)$ называется ***точкой максимума*** функции $y=f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x\ne x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума*** функции.

Заметим, что функция в области своего определения может иметь несколько точек максимума или минимума.

Д. **Набольшее и наименьшее значения**

Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает ***наибольшее значение*** на множестве *X*, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает ***наименьшее значение*** на множестве *X*, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Если множество *X* представляет собой отрезок [*a*; *b*], то наибольшее и наименьшее значения функция принимает либо в точке экстремума, либо на конце отрезка.

Е. **Периодичность**

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется ***периодической***, если на этом множестве существует такое число $T \in D$, что $\forall x \in D$ выполняется равенство $f(x) = f(x + T)$. Число T называется ***периодом функции*** $f(x)$. Если T – период функции, то периодом функции будут также являться числа $k \cdot T$ ($k = \pm 1, \pm 2, ...$).

Наименьший положительный период, если он существует, называется ***основным периодом***.

Если T – основной период функции $y = f(x)$, то число T/w является основным периодом функции $y = f(w \cdot x)$.

Если T_1 и T_2 основные периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (T_1 и T_2 целые числа), то наименьшее общее кратное чисел T_1 и T_2 является периодом (не обязательно основным) функции $f_1(x)+f_2(x)$.

График периодической функции с основным периодом T достаточно построить на любом отрезке длины T, а затем сдвигать эту кривую вправо и влево на отрезки T, $2T$, ...

Примеры.

1) $y=\sin x$, $y=\cos x$ – периодические с основным периодом $T=2\pi$;

2) $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$ – периодические с основным периодом $T=\pi$;

3) дробная часть числа: $y=\{x\}=x-[x]$– периодическая функция, где $[x]$ – целая часть числа, $T=1$.

✦ **Пример 4**. Найти основные периоды следующих функций.

1. $f(x)=(\cos x+\sin x)^2$. 2. $f(x)=\cos 6x$. 3. $f(x)=\sin 6x+tg\,4x$.

Решение. 1. Имеем $y=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x$ или $y=1+\sin 2x$– периодическая функция. Так как период функции $y=\sin x$ есть 2π, то период функции $y=\sin 2x$ есть $2\pi/2=\pi$. Следовательно, периодом функции $y=1+\sin 2x$ также будет являться число π, так как сдвиг на единицу вверх графика функции не меняет ее периодичность.

2. Поскольку основной период функции $\cos x$ есть 2π, то для функции $f(x)=\cos 6x$ он равен $\frac{2\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{3}$.

3. Здесь первая функция – периодическая с периодом $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, а вторая с периодом $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$, то есть π.

Ж. Нули функции

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю: $f(x_0)=0$.

З. Промежутки знакопостоянства функции

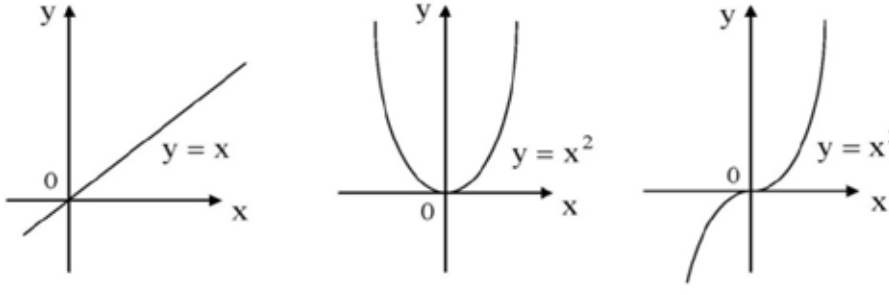
Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

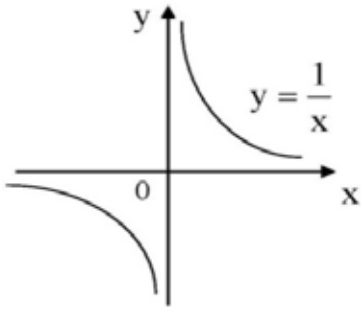
1.5. Основные элементарные функции

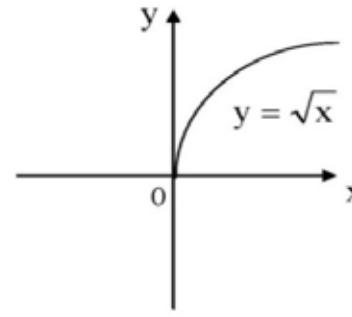
Основными элементарными функциями называются следующие функции:

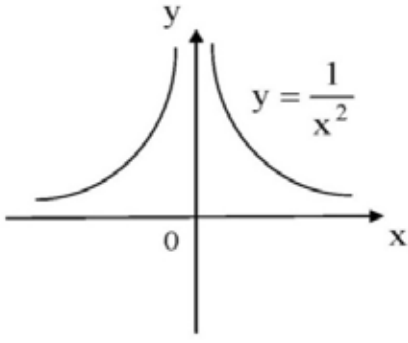
- степенная функция $y=x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathrm{R}$;
- показательная функция $y=a^{x}$, где $a>0$ и $a\neq 1$;
- логарифмическая функция $y=log_a x$, где $a>0$ и $a\neq 1$;
- тригонометрические функции: $y=sin\,x$, $y=cos\,x$, $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$;
- обратные тригонометрические функции: $y=arcsin\,x$, $y=arccos\,x$, $y=arctg\,x$, $y=arcctg\,x$.

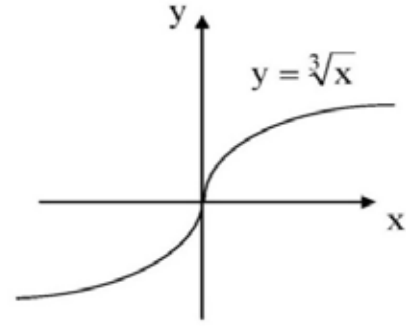
Степенная функция



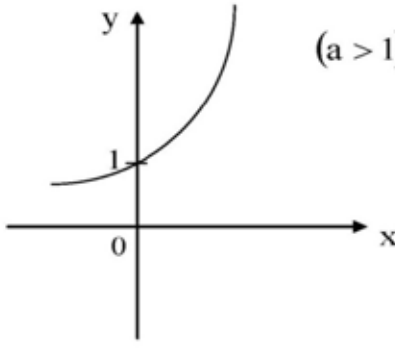


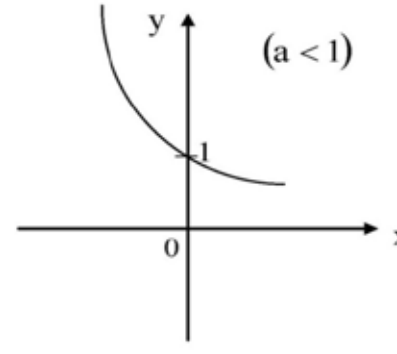




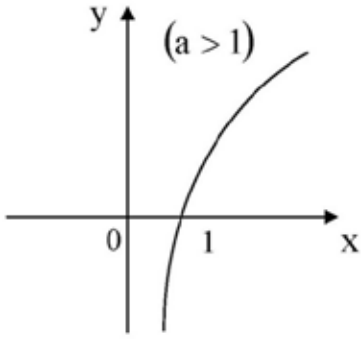


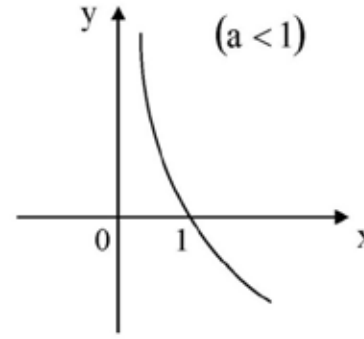
Показательная функция



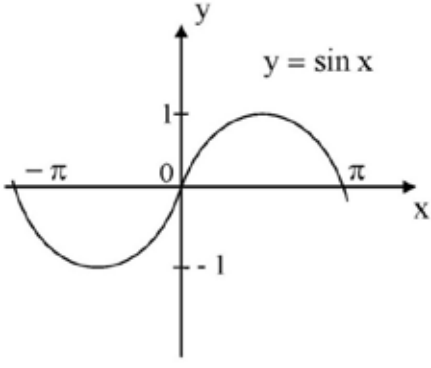


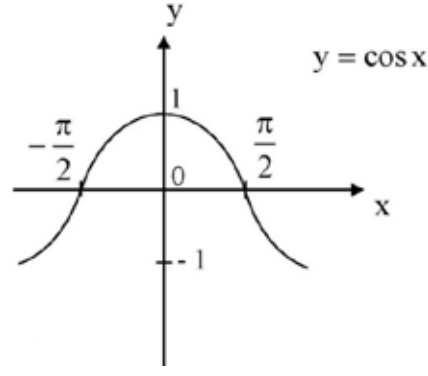
Логарифмическая функция

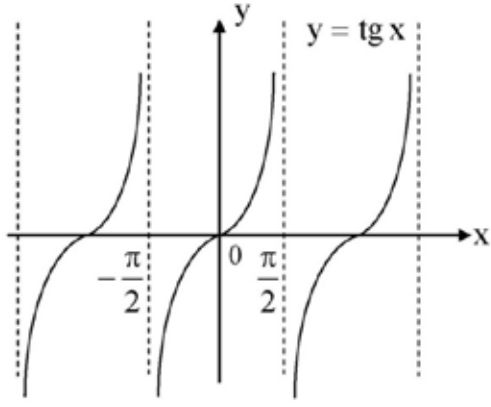


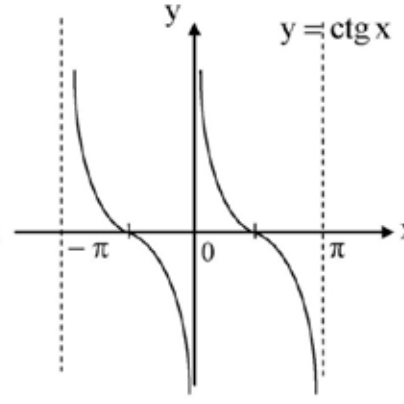


Тригонометрические функции

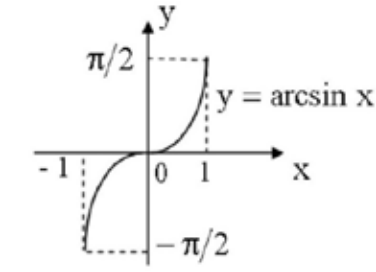


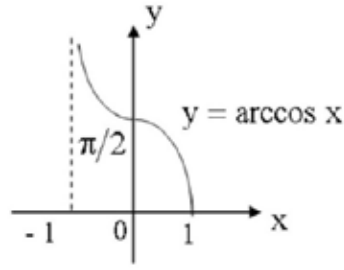


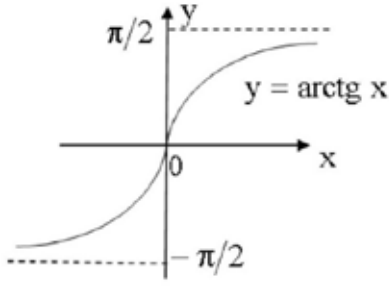


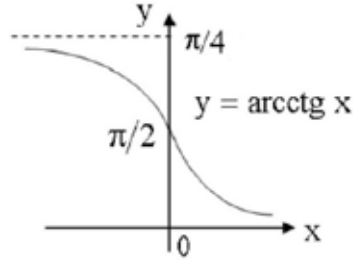


Обратные тригонометрические функции









✦ **Пример 5**. Найти область определения функций.

1. $f(x)=\dfrac{x-3}{4x-1}$.

2. $f(x)=\dfrac{ln(1+x)}{x-1}$.

3. $f(x)=\sqrt{1-2x}+3arcsin\dfrac{3x-1}{2}$.

4. $f(x)=\sqrt{x}-lg(2x-3)$.

5. $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+9)+\sqrt{x^2-2x-8}$.

Решение. 1. Функция $f(x)=\dfrac{x-3}{4x-1}$ определена, если $4x-1\neq 0$, то есть, если $x\neq\dfrac{1}{4}$. Таким образом, $D(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ или $D(f)=R\setminus\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

2. Функция $f(x)$ определена, если $x-1\neq 0$ и $1+x>0$, то есть, если $x\neq 1$ и $x>-1$. Откуда $D(f)=(-1;1)\cup(1+\infty)$.

3. Данная функция представляет собой сумму двух функций. Первая имеет смысл при $1-2x\ge 0$, а вторая – при выполнении двойного неравенства $-1\le\frac{3x-1}{2}\le 1$, равносильное системе неравенств $\begin{cases}\frac{3x-1}{2}\le 1;\\ \frac{3x-1}{2}\ge -1.\end{cases}$

Значит, область определения данной функции есть множество переменных x, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases}1-2x\ge 0;\\ \frac{3x-1}{2}\le 1;\\ \frac{3x-1}{2}\ge -1.\end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство системы: $1-2x\ge 0 \Leftrightarrow 2x\le 1$ или $x\le 1/2$.

Преобразуем второе неравенство: $\frac{3x-1}{2}\le 1 \Leftrightarrow 3x-1\le 2$ или $x\le 1$.

Преобразуем третье неравенство: $\frac{3x-1}{2}\ge -1 \Leftrightarrow 3x-1\ge -2$ или $x\ge -\frac{1}{3}$.

Наносим на числовую ось полученные промежутки (рис. 6), откуда несложно заметить, что областью определения функции будет являться отрезок $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.

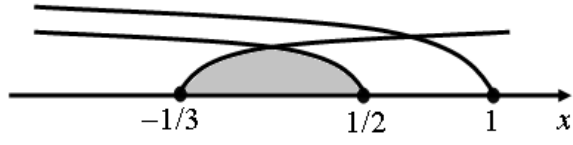


Рис 6.

4. Область определения функции найдем из системы неравенств $\begin{cases}x\ge 0\\ 2x-3>0\end{cases}$, отсюда $x>\frac{3}{2}$, или $x\in\left(\frac{3}{2};\infty\right)$.

5. Область определения заданной функции состоит из тех значений x, при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Для этого должны выполняться два условия:

$$\begin{cases} x^2+6x+9>0, \\ x^2-2x-8\ge 0. \end{cases}$$

Решим данную систему:

$$\begin{cases} (x+3)^2>0, \\ (x+2)(x-4)\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ne -3, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2, \\ x\ge 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Итак, $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup[4;+\infty)$.

✦ **Пример 6**. Найти множество значений функции.

1. $f(x)=x^2-6x+5$. 2. $f(x)=x^2+4x+1$. 3. $f(x)=4+5\sin x$.

Решение. 1. Выделим полный квадрат, получим

$$f(x)=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4.$$

Первое слагаемое является неотрицательным, а потому функция принимает значение не меньше -4. Следовательно, множеством значений функции является промежуток $[-4;+\infty)$.

2. Графиком функции $f(x)=x^2+4x+1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы: $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2}=-2$, $y_0=f(x_0)=(-2)^2+4\cdot(-2)+1=-3$. Поэтому множество значений функции $E(f)=[-3;+\infty)$.

3. Известно, что $|\sin x|\le 1$, что равносильно двойному неравенству $-1\le \sin x\le 1$. Умножим это неравенство на 5 и прибавим ко всем его частям 4, имеем

$$-5\le 5\sin x\le 5;\ -1\le 4+5\sin x\le 9.$$

Следовательно, множеством значений функции является промежуток $[-1;9]$.

➢ Задачи для работы в аудитории

1. Найти область определения следующих функций.

1.1. $y=\sqrt{10-5x}$.

1.2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

1.3. $y=lg\left(x^2+2x+3\right)$.

1.4. $y=\dfrac{1}{x-3}$.

1.5. $y=\dfrac{1}{3x^2-2x-5}$.

1.6. $y=arccos\dfrac{1-2x}{4}$.

1.7. $y=arcsin\dfrac{x}{4}$.

1.8. $y=arcsin\left(x-2\right)$.

1.9. $y=log_4\left(x-10\right)$.

1.10. $y=arccos\sqrt{2x}$.

1.11. $y=ln\left(x^2-10x+25\right)$.

1.12. $y=ln\left(5x^2+6x\right)$.

1.13. $f\left(x\right)=3arccos\dfrac{3x+4}{2}$.

1.14. $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-4x-4}}$.

1.15. $y=\dfrac{x+9}{x^3-4x}$.

1.16. $y=\sqrt{14-5x-x^2}$.

1.17. $y=log_3\left(7-4x\right)$.

1.18. $y=log_2\left(12+4x-x^2\right)$.

1.19. $y=arcsin\dfrac{1-x}{5}$.

1.20. $y=ln\left(2x-5x^2\right)$.

2. Найти область определения следующих функций.

2.1. $y=\dfrac{\sqrt{x+12}}{x^2-1}$.

2.2. $y=\sqrt{\dfrac{x-8}{x^2-16x+48}}$.

2.3. $f\left(x\right)=2^{\frac{1}{x}}+arcsin\dfrac{x+2}{3}$.

2.4. $y=lg\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)$.

2.5. $y=\sqrt{121-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-20}}$.

2.6. $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

2.7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}+lg\left(x+4\right)$.

2.8. $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

2.9. $y=lg\dfrac{x+1}{x-2}+\sqrt{9-x^2}$.

2.10. $y=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x+1}$.

2.11. $y=\sqrt{3-x}+arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

2.12. $y=\dfrac{1}{ln(10-x)}+\sqrt{x-3}$.

2.13. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}$.

2.14. $y=\dfrac{x-7}{\sqrt{x^2-9x+20}}$.

2.15. $y=\dfrac{\sqrt{15+2x-x^2}}{x}$.

2.16. $y=\sqrt{(x+1)(x^2-4x-12)}$.

2.17. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-6}}$.

2.18. $y=\dfrac{log_5(x-2)}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Найти множество значений функций.

3.1. $y=x^2-10x+17$.

3.2. $y=19-4x-x^2$.

3.3. $y=x^2+6x+1$.

3.4. $y=4cos\,2x$.

3.5. $y=-5sin\,x+2$.

3.6. $y=3\cdot 2^{4x+1}-7$.

3.7. $y=4\sqrt{x}-2$.

3.8. $y=log_2(x^2-6x+13)$.

3.9. $y=4-5\cdot e^x$.

3.10. $y=3|x|+5$.

3.11. $y=2|x+1|-4$.

3.12. $y=\sqrt{12+4x-x^2}$.

4. Доказать, что функции $y=\dfrac{3x+2}{2x+3}$ и $y=\dfrac{2-3x}{2x-3}$ являются взаимно обратными.

5. Выяснить, является ли функция четной или нечетной.

5.1. $y=x^4-3x^2-7$.

5.2. $y=2x^5+7x^3-8x$.

5.3. $y=x\cdot sin\,x+2cos\,x$.

5.4. $y=\sqrt{x^2+9}+2|x|$.

5.5. $y=(x^2+x)\cdot cos\,x$.

5.6. $y=lg\dfrac{x-1}{x+1}$.

5.7. $y=x^3-2x-sin\,x$.

5.8. $y(x)=\dfrac{|x|}{cos\,x}$.

5.9. $y=x^2-2x^4+cos\,x$.

5.10. $y(x)=\dfrac{5x^3}{tgx}$.

5.11. $y=x^3\,sin^2\,x$.

5.12. $y=x|x|$.

5.13. $y = \dfrac{|x| cos\, x^3 - 5}{3x}$.

5.14. $y = e^{x^2} - 3x^2 - 7$.

5.15. $y = \dfrac{3x^2 - x}{2x^4 + 1}$.

5.16. $y = \sqrt{x+9} + 2\,|\,x\,|$.

5.17. $y = x^5 - 5x^3 - 8$.

5.18. $y = \dfrac{lg|x| - 3}{x^3}$.

6. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует.

6.1. $y = 4\,sin\,2x$.

6.2. $y = 5cos\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$.

6.3. $y = 2\,tg\left(3x - \dfrac{5\pi}{12}\right)$.

6.4. $y = ctg(0{,}4x)$.

6.5. $y = sin\,3x + cos\,2x$.

6.6. $y = tg\,2x + cos\,5x$.

6.7. $f(x) = sin\dfrac{x}{2} - tgx$.

6.8. $f(x) = sin^4 x - cos^4 x$.

6.9. $f(x) = sin\,3x \cdot cos\,3x$.

6.10 $f(x) = 1 + cos\dfrac{\pi x}{2}$.

7. Какие из следующих функций являются периодическими?

7.1. $y = cos^2 x$.

7.2. $y = sin\,x^2$.

7.3. $y = x \cdot sin\,x$.

7.4. $y = cos\dfrac{1}{x}$.

7.5. $y = sin\,3x + cos\,x$.

7.6. $y = cos^2 3x$.

8. Составить суперпозиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 3$;

б) $f(x) = cos\,x$, $g(x) = x^2$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + x + 1$;

г) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = 2x - 1$.

9. Представить в виде цепочки основных элементарных функций.

9.1. $y = cos^4 x$.

9.2. $y = \sqrt[5]{(3-x)^3}$.

9.3. $y = ln\,cos\,2x$.

9.4. $y = 10^{(3x-1)^3}$.

9.5. $y = 3^{cos\, x^2}$.

9.6. $y = cos\left(5^{x^3}\right)$.

10. Найти нули и промежутки знакопостоянства функций.

10.1. $y = x - 5$.

10.2. $y = 3^{x+1}$.

10.3. $y = x^2 - 3x + 2$.

10.4. $y = \sqrt{x-2} - 1$.

10.5 $y = \dfrac{x-1}{3x^2 - 4x + 1}$.

10.6 $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{x + 5}$.

10.7. $y = log_3(3 - 2x)$;

10.8. $y = log_4\left(x^2 - 3x + 3\right)$.

10.9. $y = 2^{3x-1} - 4$.

10.10. $y = 3^{x^2 - 2x} - 27$.

10.11. $y = log_3\left(x^2 - 2x + 1\right)$;

10.12. $y = \dfrac{1}{1 + |x|}$.

11. Построить кластер «Функция».

12. Построить графики функций (линий) в одной системе координат и найти точки пересечения графиков. Результат проверить вычислением.

12.1. $f_1(x) = x - 4$ и $f_2(x) = x^2 - 5x + 5$.

12.2. $f_1(x) = x - 1$ и $f_2(x) = 6 / x$.

12.3. $x^2 + y^2 = 25$ и $3y = 4x$.

12.4. $x^2 + y^2 = 16$ и $x - y = 4$.

12.5. $x^2 + y^2 = 25$ и $x + y = 5$.

13. Написать эссе по одной из следующих тем.

13.1. Функции вокруг нас.

13.2. Функции в школьном курсе физики.

13.3. Прямая и обратная пропорциональности в школьном курсе математики.

13.4. Прямая и обратная пропорциональности в начальном курсе математики.

13.5. Зачем будущему учителю информатики изучать функции и их свойства?

13.6. Графики функций на уроках информатики.

13.7. Построение графиков функций в табличном редакторе.

13.8. Описание природных и общественных процессов с помощью функций.

13.9. Линейные и нелинейные функциональные зависимости в природе.

13.10. Различные способы задания функции.

13.11. Различные трактовки понятия «функция».

14. Какое из перечисленных уравнений задает функцию $y = f(x)$? Ответ обоснуйте.

14.1. $y = x^2 - 4$.

14.2. $x = y^2 - 4$.

14.3. $x^2 + y^2 = 9$.

14.4. $x^2 - y^2 = 16$.

14.5. $xy = 10$.

14.6. $y^2 = x^3$

2. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1. Пределы функции в бесконечности и в точке

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при x стремящимся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Функция $y = f(x)$ имеет ***бесконечный предел*** в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно большого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x)| > \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Если функция $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$ ***имеет предел, то этот предел единственный.***

2.2. Односторонние пределы

В сформулированном определении предела функции в точке считается, что x стремится к a любым способом, оставаясь меньше a или больше a.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента к a существенно меняет значение предела функции. При этом если аргумент x стремится к точке a слева, то есть, оставаясь меньше этого значения, то пишут: $x \to a - 0$, если x стремится к a справа, то есть, оставаясь больше этого значения, то пишут: $x \to a + 0$. Например, $\lim\limits_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0+0}} = e^{+\infty} = +\infty$, но если x стремится к нулю слева, то значение предела изменится:

$$\lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Пределы функции при стремлении аргумента к значению a слева или справа называются ***односторонними пределами функции***.

Если при стремлении x к a предел функции существует и равен A, то оба односторонних предела существуют и тоже равны A, то есть для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Если односторонние пределы функции в точке существуют, но не равны друг другу, то предела функции в этой точке не существует (как в разобранном выше примере).

2.3. Основные свойства пределов

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$, где $c - const.$

2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $c - const.$

3. Необходимое условие существования предела: пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.

4. Пусть в некоторой окрестности точки a имеет место неравенство $f(x)\le g(x)$. Тогда, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

5. Теорема «о двух милиционерах». Пусть в некоторой окрестности точки a для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ имеют место неравенства

$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x).$

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x).$

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \left[\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \ne 0\right].$

9. Если существует предел: $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, а $f(x)$ – элементарная функция, то

$$\lim_{x\to a} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim_{x\to a} \varphi(x)\right].$$

10. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

11. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при x, стремящимся к a, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при x, стремящимся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ или $x \to \infty$.

2. Если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая функция.

3. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то бесконечно малыми являются функции:

а) $\alpha(x) \pm \beta(x)$;

б) $c \cdot \alpha(x)$, где $c - const$;

в) $\delta(x) \cdot \alpha(x)$, где $\delta(x)$ – ограниченная функция;

г) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$;

д) $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0$.

4. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие величины при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то бесконечно большими будут являться функции:

а) $f(x) \cdot g(x)$;

б) $f(x) \cdot \varphi(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0$;

в) $f(x) + g(x)$;

г) $f(x) + \delta(x)$, где $\delta(x)$ – ограниченная функция;

д) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0$.

5. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы:

$f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

2.5. Эквивалентные бесконечно малые

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой, более высокого порядка чем*** $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой, более низкого порядка чем*** $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***несравнимыми***.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка***.

Среди бесконечно малых одного порядка важную роль при вычислении пределов играют ***эквивалентные бесконечно малые функции***, то есть такие функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, для которых $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначают эквивалентные бесконечно-малые символом «~».

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится если хотя бы одну из них заменить на эквивалентную ей функцию.

Ниже приведены важнейшие эквивалентности при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$.
2. $\arcsin x \sim x$.
3. $tgx \sim x$.
4. $arctgx \sim x$.
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.
6. $\ln(1+x) \sim x$.
7. $e^x - 1 \sim x$.
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$.
9. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.
10. $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$.

2.6. Техника вычисления пределов

✦ **Пример 7.** Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,3x}{6x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Решение. 1. Находим: $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(-5)^2-25}{(-5)^2+8\cdot(-5)+15}=\dfrac{0}{0}$,

то есть имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим и числитель и знаменатель на множители. Используя формулу разности квадратов, получаем $x^2-25=(x-5)(x+5)$. Для того чтобы разложить на множители квадратный трехчлен $x^2+8x+15$, решим квадратное уравнение

$$x^2+8x+15=0,$$

откуда находим $x_1=-5$, $x_2=-3$. Следовательно, $x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$. Возвращаясь к данному пределу, находим

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+8x+15}=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x+3)}=\lim_{x\to -5}\frac{x-5}{x+3}=\frac{-5-5}{-5+3}=\frac{-10}{-2}=5.$$

2. Так как при $x\to 0$ $arcsin\,3x\sim 3x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,3x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\dfrac{\sqrt{1+8}-3}{1-1}=\dfrac{0}{0}$, то и здесь имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Умножим и числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на выражение, сопряженное числителю: $\left(\sqrt{x+8}+3\right)$. Получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{6}.$$

✦ **Пример 8.** Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+2x}{5x^4-4x+2}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n}}{5n+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^{x+1}-3^x}{5^x+4^{x+1}}$.

Решение. 1. Имеем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. И в числителе, и в знаменателе вынесем старшую степень дроби $\left(x^2\right)$ за скобки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{14x^2}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{7x^2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+14}{\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{2}{x}+7} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{\infty}+14}{\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}+7} = \frac{0+14}{0+0+7} = 2.$$

2. Старшая степень дроби равна четырем. Разделим и числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+2x}{5x^4-4x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(-\dfrac{3x^3}{x^4}+\dfrac{2x}{x^4}\right)}{x^4\left(\dfrac{5x^4}{x^4}-\dfrac{4x}{x^4}+\dfrac{2}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{-\dfrac{3}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}}{5-\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}} = \frac{0}{5} = 0.$$

3. Выполним преобразования:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n}}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{\frac{n^3}{n^2}-\frac{2n}{n^2}}}{n\left(\frac{5n}{n}+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-\frac{2}{n}}}{5+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{\infty-\frac{2}{\infty}}}{5+\frac{1}{\infty}}=\frac{\sqrt{\infty-0}}{5+0}=\frac{\infty}{5}=\infty.$$

4. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Избавимся от нее следующим образом: разделим числитель и знаменатель на степень с наивысшим основанием, то есть на 5^x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3^x}{5^x+4^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1+4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x}=\frac{5-0}{1+4\cdot 0}=5.$$

Здесь воспользовались свойством $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$, если $0<a<1$.

✦ **Пример 9.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

Возвращаясь к пределу, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

✦ **Пример 10.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$, так как $\frac{2x+3}{2x-1}\to 1$ и $3x\to\infty$. Выделим у дроби целую часть:

$$\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{(2x-1)+4}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1}.$$

Причем при $x\to\infty$ $1+\frac{4}{2x-1}=1+\frac{1}{\infty}\to 1$. Преобразуем предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-1}\cdot 3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{2x-1}}=e^{6}.$$

✦ **Пример 11**. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arcsin(x-2)}{(x-2)^2}$.

Решение. Очевидно, что при $x\to 2$, $x-2\to 0$, следовательно, можно записать, что $arcsin(x-2)\sim x-2$, тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{arcsin(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0}=\infty.$$

➢ **Задачи для работы в аудитории**

15. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-6x-9}{2x}$.

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$.

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-4}{x+3}$.

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{6x^2-x-1}{x-0,5}$.

з) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$.

и) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

к) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$.

л) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$.

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{3x}$.

н) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.

о) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$.

п) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

р) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{\sqrt{2-x}-2}$.

с) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

т) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^6-1}$.

у) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$.

ф) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{3-\sqrt{2x+1}}$.

16. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^3+2}{3x^2+x-1}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-10}{2x^5+x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^2-x+10}{6x^5+x^4-3}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^8}{2x^8+3}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^7+5x-3}{6x^7+x^4-3}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-x}{3x^2-2x-1}$.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^5}{64x^5-2}$.

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+3}\right)^{x^2+1}$.

и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}$.

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-7}{-x^2+x-1}$.

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{3x-1}\right)^{x}$.

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x}{x^3+1}$.

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2(n+2)^5}{(5n-1)^5}$

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n^2+\right)\left(n^2+2\right)}{(2n-1)^4}$.

17. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-5x}\right)$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2+3x}\right)$.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)$.

д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x}\right)$.

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x^2\right)$.

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

18. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 18x}{27x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 12x}{6x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 3x}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

д) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sin\frac{1}{x-2}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)\sin\frac{5}{x-4}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 6x}{2x^2}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x+tg4x}{\arcsin 12x}$.

19. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin 3x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg5x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-6x)}{2x}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-1}{\ln(1+2x)}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\sin 3x}$.

е) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{arctg(x-3)}{x^2-3x}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^3}}{\sin x^3}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{8x}-1}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin 9x^2}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^2}$.

л) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}-1}{\sin(x-1)}$.

м) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x^2}$.

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin^2 3x}{sin^2 5x}$.

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{arcsin^2 2x}$.

20. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{2x+1}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{6x}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+4}\right)^{x-1}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty} 5x\left[ln(2x+2)-ln(2x-1)\right]$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[ln(x-1)-ln\,x\right]$.

к) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left[ln(3x)-ln(3x+1)\right]$.

21. Вычислить пределы.

21.1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{sin\,x-sin\,a}{x-a}$.

21.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

21.3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{cos\,x-cos\,a}{x-a}$.

21.4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$.

21.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2+x-6}$.

21.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

21.7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-tg3x)^{\frac{1}{x}}$.

21.8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+sin\,3x)^{\frac{1}{tg4x}}$.

21.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x+x^2)}{ln(1+2x+3x^2)}$.

21.10. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\left(sin\sqrt{x}\right)^2}{2x}$.

2.7. Непрерывность функции

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) она определена в точке x_0;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;

3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если не выполнено хотя бы одно из условий непрерывности 1) – 3), то функция терпит в точке x_0 разрыв, причем:

а) если оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то x_0 называется точкой ***неустранимого разрыва первого рода***. Модуль разности значений односторонних пределов $\Delta f = \left| \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|$ называется ***скачком функции***;

б) если оба односторонних предела конечны, равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq$ $\neq f(x_0)$, то x_0 называется точкой ***устранимого разрыва первого рода***;

в) если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен, то точка x_0 называется точкой разрыва ***второго рода***.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что $g(x_0) \neq 0$) являются функциями непрерывными в точке x_0.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$.

3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, такой что $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Свойства функций непрерывных на отрезке

1. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке свое наименьшее и наибольшее значения.

3. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков (то есть $f(a)\cdot f(b)<0$), то внутри отрезка обязательно найдется такая точка $\xi\in(a,b)$, что $f(\xi)=0$.

Примечание. Последнее свойство является основой решения неравенств методом интервалов.

✦ **Пример 12.** Дана функция $y=2^{\frac{1}{2+x}}$ и два значения аргумента $x=-2$, $x=1$. Требуется установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого значения x_1 и x_2. Сделать схематический чертеж.

Решение. При $x=1$ функция $y=2^{\frac{1}{2+x}}$ определена и непрерывна, так как $y(1)=2^{\frac{1}{2+1}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ и $\lim\limits_{x\to1}2^{\frac{1}{2+x}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ равен значению функции в точке $x=1$.

В точке $x=-2$ функция не определена, так как на нуль делить нельзя. Найдем левосторонний и правосторонний пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to-2-0}2^{\frac{1}{2+x}}=2^{\frac{1}{2-2-0}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

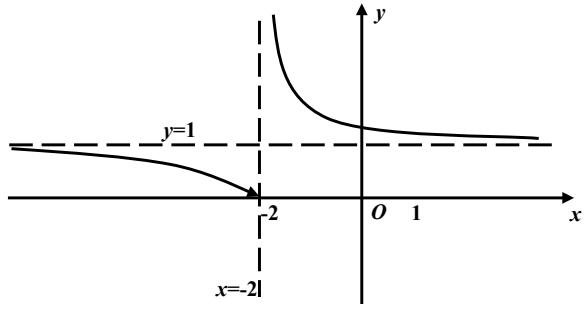
$$\lim_{x\to-2+0}2^{\frac{1}{2+x}}=2^{\frac{1}{2-2+0}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=\infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен ∞, то функция в точке $x=-2$ имеет разрыв второго рода, а линия $x=-2$ является вертикальной асимптотой.

Вычислим предел

$$\lim_{x\to -2\pm\infty} 2^{\frac{1}{2+x}} = 2^{\frac{1}{\pm\infty}} = 2^0 = 1,$$

в силу чего $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Используя полученные данные, сделаем схематический чертеж:



✦ **Пример 13**. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Построить график функции.

Решение. Функция не определена в точке $x=1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\left(x^2\right)=1.$$

Односторонние пределы конечны и равны. Таким образом, в точке $x=1$ функция терпит устранимый разрыв.

Построим график функции $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$. Выполним преобразования:

$$\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2.$$

Таким образом, график функции $f(x)$ представляет собой параболу $y=x^2$, при $x\neq 1$ (рис. 7).

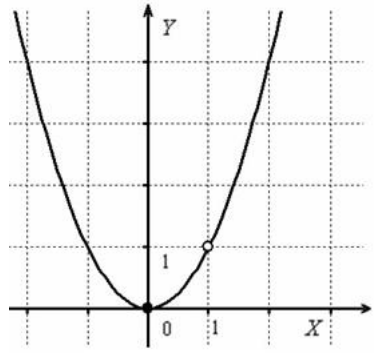


Рис. 7

✦**Пример 14**. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x, & при \quad x \le -\pi, \\ \sin x, & при \quad -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & при \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, то есть в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x \to -\pi - 0} f(x) = \lim_{x \to -\pi} x = -\pi; \qquad \lim_{x \to -\pi + 0} f(x) = \lim_{x \to -\pi} \sin x = 0,$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x \to -\pi - 0} f(x) \neq \lim_{x \to -\pi + 0} f(x),$$

то есть точка $x_1 = -\pi$ является для данной функции точкой неустранимого разрыва первого рода. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

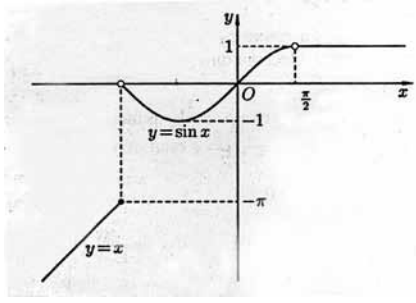
$$\Delta f(-\pi) = \left| \lim_{x \to -\pi + 0} f(x) - \lim_{x \to -\pi - 0} f(x) \right| = \pi .$$

Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 1 = 1,$$

а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва первого рода.



➢ **Задачи для работы в аудитории**

22. Исследовать функцию на непрерывность в точке $x = 1$ и установить характер разрыва (если он существует) в данной точке:

22.1. $y = \frac{(x-1)^3}{x-1}$.

22.2. $y = \frac{x}{x-1}$.

22.3. $y = \frac{|x-1|}{x-1}$.

22.4. $y = \begin{cases} x-1, & x \geq 1; \\ x+1, & x \leq 1. \end{cases}$

22.5. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

22.6. $y = x - 1$.

23. Построить графики функций.

23.1. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$.

23.2. $y = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$.

23.3. $y=\dfrac{x^2-25}{x+5}$.

23.4. $y=\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}$.

23.5. $y=\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^2-4}$.

23.6. $y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$.

24. Исследовать на непрерывность и установить характер разрыва функций.

24.1. $y=e^{-\frac{5}{x+2}}$.

24.2. $y=e^{-\frac{1}{x-3}}$.

24.3. $y=\dfrac{2}{5+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

24.4. $y=4e^{-\frac{1}{2-x}}$.

24.5. $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

24.6. $y=\dfrac{2}{5+4^{\frac{3}{5-x}}}$.

24.7. $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$.

24.8. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}x-2$.

24.9. $y=\dfrac{x}{|x|}-2x$.

24.10. $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

24.11. $y=\dfrac{x-2}{x^2+2}$.

24.12. $y=\dfrac{x^2+2}{x-2}$.

25. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и установить характер разрыва функций. Изобразить указанные функции.

25.1. $y=\begin{cases}x-2, & x\ge 1;\\ x+2, & x\le 1.\end{cases}$

25.2. $y=\begin{cases}x^2-2, & x\ge 1;\\ x-2, & x\le 1.\end{cases}$

25.3. $y=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ 3, & x=0;\\ x^2-3, & x>0.\end{cases}$

25.4. $y=\begin{cases}x+4, & x<0;\\ 4, & x=0;\\ -x+4, & x>0.\end{cases}$

25.5. $y=\begin{cases}-x, & \text{при}\quad x\le 0;\\ x^2, & \text{при}\quad 0<x<2;\\ x+1, & \text{при}\quad x>2.\end{cases}$

25.6. $y=\begin{cases}-x, & \text{при}\quad x<-1;\\ -(x+2)^2, & \text{при}\quad -1<x<0;\\ -x^3+3, & \text{при}\quad x\ge 0.\end{cases}$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Дифференцирование функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Придадим аргументу x приращение Δx таким образом, чтобы точка $x + \Delta x$ принадлежала $D(f)$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (рис. 8).

Производной функции $f(x)$ ***в точке*** x называется предел отношения

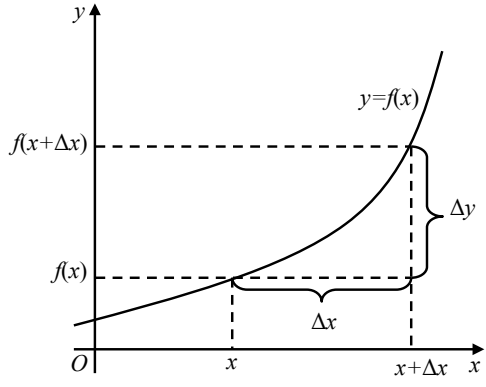


Рис. 8

приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается:

$$y';\ y'_x;\ f'(x);\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Таким образом, в соответствии с определением производной можно записать

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ или } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Как следует из определения, производная функции $f(x)$ в точке x есть число, зависящее от значения аргумента x, но не зависящее от приращения Δx.

Если зафиксировать значение *x*, то есть положить $x = x_0$, то производная функции $y = f(x)$ в этой точке обозначается как

$$y'(x)|_{x=x_0};\ f'(x_0);\ \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Процесс нахождения производной называется ***дифференцированием функции***.

Функция, имеющая производную, называется ***дифференцируемой функцией***.

Если функция $f(x)$ в точке x имеет производную, то она в этой точке непрерывна.

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c - const$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

5. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$, где $c - const$.

6. Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

7. Если функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$.

Таблица производных

1.	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$	1.	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'.$
2.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ (x>0).$	2.	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}},\ (u>0).$
3.	$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a,$ $(a>0,\ a\neq 1).$	3.	$\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a \cdot u',$ $(a>0,\ a\neq 1).$
4.	$\left(e^{x}\right)' = e^{x}.$	4.	$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'.$
5.	$(\sin x)' = \cos x.$	5.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
6.	$(\cos x)' = -\sin x.$	6.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
7.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	7.	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$
8.	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	8.	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$
9.	$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ (x>0).$	9.	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',\ (u>0).$
10.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1).$	10.	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a} \cdot u',$ $(u>0,\ a>0,\ a\neq 1).$
11.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\lvert x\rvert < 1.$	11.	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$ $\lvert u\rvert < 1.$
12.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\lvert x\rvert < 1.$	12.	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$ $\lvert u\rvert < 1.$
13.	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$	13.	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$
14.	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$	14.	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Таблица производных составлена следующим образом: в левом столбце приведены производные основных элементарных функций, в правом столбце приведены производные сложных функций на основании правила дифференцирования сложной функции.

Дифференцирование неявно заданной функции

Пусть функция задана уравнением $F(x;y)=0$. Чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x;y)=0$, считая y функцией от x и применяя правило 6 дифференцирования сложной функции.

Логарифмическое дифференцирование

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)>0$ $\forall x\in[a;b]$. Тогда определен логарифм $ln\,y=ln\,f(x)$.

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(ln\,y)'=(ln\,f(x))'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y}=(ln\,f(x))'$ и $y'=y\cdot(ln\,f(x))'$.

Производная $(ln\,f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется ***логарифмической производной***.

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях:

– при нахождении производной большого числа сомножителей,

– при нахождении производной степенно-показательной функции.

✦ **Пример 15.** Найти первую производную функций.

1. $y=4x^3+3\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}$. 2. $y=sin^2\,x$. 3. $y=ln(arctg3x)$.

Решение. 1. Запишем функцию в виде: $y=4x^3+3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-2}$. Используя формулу производной степенной функции (первая формула в таблице), находим

$$y'=4\cdot3x^2+3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-2\cdot(-2)x^{-3}=12x^2+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-3}=12x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{x^3}.$$

2. Функция $y=sin^2\,x$ является композицией двух функций $u=sin\,x$ и $f(u)=u^2$. Так как $u'=cos\,x$, а $f'(u)=2u$, то

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x .$$

3. Функция $ln(arctg3x)$ есть композиция функций $u = arctg3x$ и $f(u) = \ln u$, следовательно,

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{arctg3x} \cdot (arctg3x)' .$$

Функция $arctg3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v(x) = 3x$ $u(v) = arctgv$, поэтому

$$(arctg3x)' = (arctgv)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2} .$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{arctg3x} \cdot (arctg3x)' = \frac{3}{(1+9x^2) \cdot arctg3x} .$$

✦ **Пример 16.** Найти производную первого порядка $y = (arcsin\, x)^{\ln x}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \ln(arcsin\, x)^{\ln x}; \quad \ln y = \ln x \ln(arcsin\, x).$$

Продифференцируем обе части последнего уравнения:

$$(\ln y)' = (\ln x \ln(arcsin\, x))',$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln x)' \ln(arcsin\, x) + (\ln x)(\ln(arcsin\, x))',$$

$$y' = y\left[\frac{1}{x} \cdot \ln(arcsin\, x) + \ln x \cdot \frac{(arcsin\, x)'}{arcsin\, x}\right],$$

$$y' = (arcsin\, x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(arcsin\, x)}{x} + \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}\, arcsin\, x}\right].$$

✦ **Пример 17**. Найти производную первого порядка.

$$\left(y^2 - x^2\right)^3 + x^2 y - y - x = 0 .$$

Решение. Продифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция от аргумента x:

$$\left[\left(y^2-x^2\right)^3+x^2y-y-x\right]'=0',$$

$$3\left(y^2-x^2\right)^2\left(y^2-x^2\right)'+\left(x^2\right)'y+x^2y'-y'-x'=0,$$

$$3\left(y^2-x^2\right)^2\left(2yy'-2x\right)+2xy+x^2y'-y'-1=0,$$

$$y'\left[6y\left(y^2-x^2\right)^2+x^2-1\right]=1-2xy+6x\left(y^2-x^2\right)^2.$$

Откуда находим:

$$y'=\frac{1-2xy+6x\left(y^2-x^2\right)^2}{6y\left(y^2-x^2\right)^2+x^2-1}.$$

3.2. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0, то есть $k=f'(x_0)$. Уравнение касательной имеет вид: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой***. Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1=-\frac{1}{k_2}$, то уравнение нормали кривой в точке $M(x_0;y_0)$ примет вид: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Механический смысл производной: производная есть скорость движения точки в момент времени t_0: $\upsilon=s'(t_0)$.

Вообще говоря, можно сказать, что если функция $y=f(x)$ описывает некоторый процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом и состоит ***физический смысл производной***.

✦ **Пример 18**. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3-4x^2+8$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Найдем ординату точки касания:

$$y_0 = y(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 = 5.$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$$k = y'(x_0) = \left(x^3 - 4x^2 + 8\right)'\Big|_{x=1} = \left(3x^2 - 4 \cdot 2x\right)\Big|_{x=1} = -5.$$

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение касательной:

$$y = 5 - 5(x - 1),$$

откуда

$$y = -5x + 10.$$

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение нормали:

$$y = 5 - \frac{1}{-5}(x - 1),$$

откуда,

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}.$$

3.3. Понятие дифференциала

Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Например, найдем приращение функции $y = x$: из формулы $dy = f'(x)\Delta x$ следует, что $dy = dx = x' \cdot \Delta x$, то есть $dx = \Delta x$. Следовательно, дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.

Поэтому формулу для вычисления дифференциала можно представить в виде: $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Свойства дифференциала

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной:

1) $dc = 0$, $c = const$;

4) $d(uv) = udv + vdu$;

2) $d(cu) = cdu$, $c = const$;

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3.4. Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ называется ***производной первого порядка***. Производная от функции $f'(x)$ называется ***производной второго порядка*** (***или второй производной***) и обозначается y'' или $f''(x)$. Аналогичным образом формулируется определение производной n-го порядка: производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***производной n-го порядка***, то есть $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

✦ **Пример 19.** Найти производную второго порядка y'' от функции $y = ln(ln\, x)$.

Решение. Находим производную первого порядка:

$$y' = \left[ln(ln\, x)\right]' = \frac{1}{ln\, x} \cdot (ln\, x)' = \frac{1}{x\, ln\, x}.$$

Производная второго порядка есть первая производная от производной первого порядка, следовательно,

$$y'' = \left(\frac{1}{x\, ln\, x}\right)' = -\frac{(x\, ln\, x)'}{(x\, ln\, x)^2} = -\frac{1 \cdot ln\, x + x\frac{1}{x}}{x^2\, ln^2\, x} = -\frac{ln\, x + 1}{x^2\, ln^2\, x}.$$

3.5. Дифференциалы высших порядков

В общем случае дифференциал функции dx есть функция от x и от нее может быть определен дифференциал.

Дифференциалом второго порядка (или ***вторым дифференциалом***) называется дифференциал от дифференциала функции первого порядка: $d^2y;\ d(dy)$.

По определению

$$d^2y = d(dy) = (dy)'\,dx = (f'(x)dx)'\,dx = f''(x)dx^2.$$

Дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала второго порядка

$$d^3y = \left(d^2y\right)'dx = \left(f''(x)dx^2\right)'dx = f'''(x)dx^3$$

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

3.6. Производная от функции, заданной параметрически

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически дифференцируемыми в точке t_0 функциями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, причем одна из них, например, $x(t)$ непрерывна, строго монотонна в некоторой окрестности точки t_0 и $x'(t_0) \neq 0$. Тогда

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Производная второго порядка функции, заданной параметрически, может быть найдена по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

а производная n-го порядка – по формуле:

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

3.7. Правило Лопиталя

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x) = \lim\limits_{x\to a(\infty)} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to a(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел существует (конечный или бесконечный).

Правило Лопиталя раскрывает в пределе неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а также $(0\cdot\infty)$ после соответствующего преобразования.

✦ **Пример 20.** Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$.

Решение. 1. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \ln \sin 3x = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = \infty$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и поэтому, применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln \sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos 3x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} = 1.$$

2. Так как $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = \lim\limits_{x\to 0} (x - \sin x) = 0$, то имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и поэтому применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=6\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды.

3.8. Исследование функций

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, то есть $f'(x)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в точке наименьшего или наибольшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) она непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$;

3) на концах отрезка принимает равные значения, то есть $f(a)=f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайней мере одна точка $\xi\in(a;b)$, в которой производная равна нулю: $f'(\xi)=0$.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$;

Тогда внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайней мере одна точка $\xi\in(a;b)$, в которой производная равна частному от деления приращения

функции на приращение аргумента на этом отрезке, то есть $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ или $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Следствие. Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором промежутке X, то функция тожественно постоянна на этом промежутке.

Необходимое условие возрастания (убывания) функции. Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для любого x из интервала $(a;b)$.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для любого x из интервала $(a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется ***максимумом*** (***минимумом***), если оно является наибольшим (наименьшим) значением среди ее значений во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума*** функции.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке либо равна нулю $f'(x)=0$, либо не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю, либо не существует, а сама функция определена и непрерывна, называются ***критическими***.

Достаточное условие экстремума. Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и при переходе слева направо производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; а если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Правило нахождения экстремума функции

1. Найти производную функции $f'(x)$ и критические точки, в которых

производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, а сама функция в этих точках определена и непрерывна.

2. Определить знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0 слева направо функция производная $f'(x)$

1) меняет знак с «+» на «–», то x_0 – ***точка максимума***;

2) меняет знак с «–» на «+», то x_0 – ***точка минимума***;

3) не меняет своего знака, то в точке x_0 нет экстремума.

График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ для любого x из данного интервала, то график функции выпуклый вниз.

Необходимое условие существования точки перегиба.

Если x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$ и данная функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, причем в самой точке x_0 функция непрерывна, то вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Для нахождения точек перегиба используется следующая теорема.

Достаточное условие существование точек перегиба. Если вторая производная при переходе через точку x_0, в которой она равно нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. Если по крайней мере один из пределов функции $y = f(x)$ в точке a справа или слева равен ± бесконечности, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Горизонтальные асимптоты. Если существует конечный предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то есть, если

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c,$$

то прямая $y = b$ $(y = c)$ является горизонтальной асимптотой.

Наклонные асимптоты. Если существуют конечные пределы:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 x\right).$$

то $y = k_1 x + b_1$ служит наклонной (правой) асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Аналогично, если существуют пределы:

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_2 x\right),$$

то прямая $y = k_2 x + b_2$ является наклонной (левой) асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Схема полного исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.

6. Найти y'. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.

7. Найти y''. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.

8. Найти область значений функции.

9. Построить график функции.

✦ **Пример 21.** Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Решение. 1. В точке $x = -1$ функция не существует. Найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{+0} = \infty,$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{-0} = -\infty,$$

следовательно, $x = -1$ – вертикальная асимптота графика функции при $x \to -1$ справа и слева.

2. Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[y(x) - kx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = -1.$$

Аналогично получим и при $x \to -\infty$, значит, наклонной асимптотой будет являться прямая $y = x - 1$.

✦ **Пример 22.** Провести полное исследование и построить график функции $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 9}$.

Решение. 1. Область определения функции $D(f) = R \setminus \{\pm 3\}$.

2. Область определения функции симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2 - 9} = \frac{5x^2}{x^2 - 9} = f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси Oy.

3. Функция имеет две точки разрыва: $x = 3$ и $x = -3$. Определим тип разрывов:

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3-0} \frac{5x^2}{(x-3)\cdot(x+3)} =$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3-0-3)\cdot(3-0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(-0)\cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{-0} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3+0} \frac{5x^2}{(x-3)\cdot(x+3)} =$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3+0-3)\cdot(3+0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(+0)\cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{+0} \right) = +\infty.$$

Итак, точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 3$ – вертикальной асимптотой графика функции.

Учитывая симметрию графика функции относительно оси Oy, для точки $x = -3$ получаем:

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = \lim_{x \to -3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -3+0} f(x) = \lim_{x \to -3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = -\infty.$$

Следовательно, точка $x = -3$ тоже является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = -3$ – вертикальной асимптотой графика функции.

4. Функция определена при сколь угодно больших x, следовательно, возможно существование наклонных асимптот. При $x \to +\infty$ имеем

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{(x^2-9)x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x^2}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{x}\right) = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2-9} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{x^2-9} = 5.$$

Следовательно, прямая $y = 0\cdot x + 5$ (то есть прямая $y = 5$) является горизонтальной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая $y = 5$ будет горизонтальной асимптотой и для левой части графика функции (так как график функции симметричен относительно оси Oy).

5. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x^2}{x^2-9} = 0, \quad \Rightarrow \quad 5x^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5\cdot 0^2}{0^2-9} = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат $O(0;0)$.

6. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем

$$f' = \left(\frac{5x^2}{x^2-9}\right)' = 5\cdot \frac{2x\cdot(x^2-9) - x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = -\frac{90x}{(x^2-9)^2},$$

$\Rightarrow$ а) $f' = 0$ при $x = 0$; б) f' не существует при $x = \pm 3 \notin D(f)$.

Таким образом, критической точкой первого рода является только точка $x = 0$.

Критическая точка $x = 0$ и точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них (рис. 9).

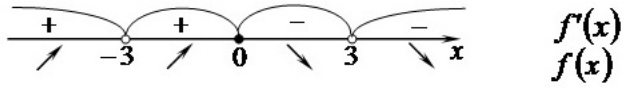


Рис. 9

Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty;-3)$, $(-3;0)$, и убывает на интервалах $(0;3)$ и $(3;+\infty)$. Точка $x=0$ – точка максимума. Максимум функции равен

$$f_{max}=y(0)=0.$$

7. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем

$$f''=\left(-\frac{90x}{\left(x^2-9\right)^2}\right)'=-90\cdot\frac{1\cdot\left(x^2-9\right)^2-x\cdot 2\cdot\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}=\frac{270\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3},$$

$\Rightarrow$ а) $f''\neq 0$ при $\forall x\in D(y)$;

б) f'' не существует при $x=\pm 3$, но в этих точках функция не непрерывна.

Таким образом, критических точек второго рода функция не имеет. Значит, график функции не имеет точек перегиба.

Точки разрыва $x=\pm 3$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них (рис. 10).

Рис. 10

Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(-3;3)$ и вогнутый на интервалах $(-\infty;-3)$ и $(3;+\infty)$.

8. Область значений функции $E(y)=R\setminus(0;5)$.

9. На основании проведенного исследования строим следующий график (рис. 11).

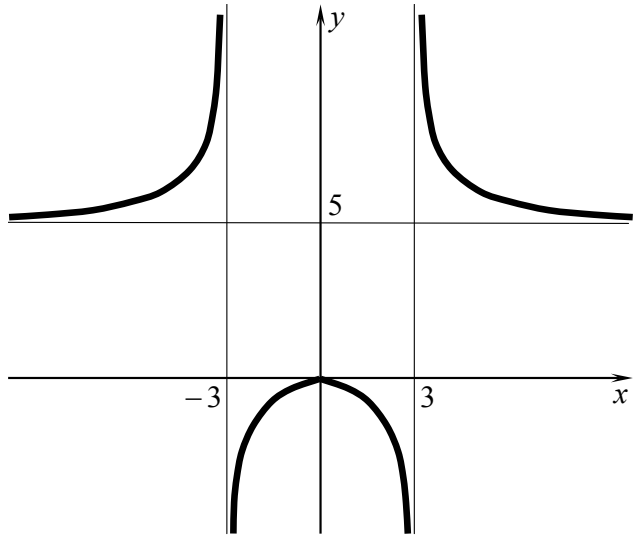


Рис. 11

3.9. Наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения функция может принимать либо во внутренней точке отрезка, либо на его границах.

Правило нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a,b]$. Вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции).

2. Вычислить значения функции на концах отрезка, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$.

3. Сравнить полученные значения функции из п. 1. и 2. Самое большое

из них будет наибольшим значением функции на рассматриваемом отрезке, самое меньшее – наименьшим значением функции на отрезке.

✦ **Пример 23.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+6x^2$ на отрезке $[-3;\,1]$.

Решение. 1. Найдем критические точки функции, принадлежащие отрезку $[-3;\,1]$:

$$f'=3x^2+12x,\ 3x^2+12x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0.$$

Откуда $x_1=0$, $x_2=-4$. Точка $x_2=-4$ не принадлежит отрезку $[-3;\,1]$, поэтому ее оставляем без внимания; а $f(0)=0$.

2. Вычислим значение данной функции на концах отрезка:

$$f(-3)=27,\quad f(1)=7.$$

3. Сравнивая полученные значения, заключаем, что

$$\max_{[-3;\,1]} f(x)=f(-3)=27,\ \text{а}\ \min_{[-3;\,1]} f(x)=f(0)=0.$$

✦ **Пример 24.** Найти наименьшее (наибольшее) значения функции $y=e^{x^3-4x^2-3x}$ на отрезке $[1;4]$.

Решение. 1. Согласно алгоритму, находим первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$y'=\left(e^{x^3-4x^2-3x}\right)'=e^{x^3-4x^2-3x}\left(x^3-4x^2-3x\right)'=e^{x^3-4x^2-3x}\left(3x^2-8x-3\right)=0.$$

Так как показательная функция не обращается в нуль, ни при одном значении $x\in R$, то

$$3x^2-8x-3=0.$$

Решив последнее квадратное уравнение, находим его корни $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=3$ – критические точки данной функции. Так как значение $-\frac{1}{3}\notin[1;4]$, то его не рассматриваем.

Находим значения функции в критической точке, принадлежащей дан-

ному отрезку, то есть $x=3$: $y(3)=e^{-18}=\frac{1}{e^{18}}$.

2. Находим значения функции на концах отрезка: $y(1)=e^{-6}=\frac{1}{e^{6}}$, $y(4)=e^{-12}=\frac{1}{e^{12}}$.

3. Сравнив полученные значения, заключаем, что $\min\limits_{[1;4]} y(x)=y(3)=\frac{1}{e^{18}}$, $\max\limits_{[1;4]} y(x)=y(1)=\frac{1}{e^{6}}$.

➢ Задачи для работы в аудитории

26. Найти производные первого порядка.

26.1. $y=x^3-\frac{1}{5}x^2+2x-4$.

26.2. $y=\frac{2x+1}{x^2-1}$.

26.3. $y=\sqrt{x}-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}$.

26.4. $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

26.5. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+5\cos x$.

26.6. $y=3\sqrt[4]{x^3}+\frac{10}{\sqrt{x^5}}+5e^x$.

26.7. $y=\frac{4x^2-3x}{x+2}$.

26.8. $y=\frac{10e^x-5}{3x^4-6}$.

26.9. $y=\left(x^2-4x\right)tgx$.

26.10. $f(x)=x\,arccos\,x-2arctgx$.

26.11. $y=\frac{x^2+1}{arctgx}$.

26.12. $y=\frac{arctgx}{arcctgx}$.

26.13. $y=\frac{\cos x}{tgx+1}$.

26.14. $y=\frac{3\,arcsin\,x}{\sqrt{x}+1}$.

26.15. $y=\sqrt[3]{x}(2\sin x+4)$.

26.16. $y=\sqrt{x^3}(log_5 x-3)$.

26.17. $y=4^x(1-6ctgx)$.

26.18. $y=5e^x\ln x$.

26.19. $y=\frac{1}{\sin x}$.

26.20. $y=\frac{6}{3+e^x}$

27. Найти производные функций.

27.1. $y=\sqrt{2x-45}$.

27.2. $y=\sqrt[3]{(1-3x)^2}$.

27.3. $y=arctg(1-x)$.

27.4. $y=cos\,5x$.

27.5. $y=sin(5-8x)$.

27.6. $y=(2x^3-4)e^{2x-3}$.

27.7. $y=tg^3x$.

27.8. $y=e^{ctg\,4x}$.

27.9. $y=e^{3\sqrt{x}+4}$.

27.10. $y=tg(3x^2-17)$.

27.11. $y=5cos\dfrac{3}{x}$.

27.12. $y=arctg^5x$.

27.13. $y=arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

27.14. $y=e^{x^2\,ln\,x}$.

27.15. $f(x)=3cos^{10}x-4x$

27.16. $y=x^3\,sin(cos\,x)$

27.17. $y=sin^3\,2x$.

27.18. $y=sin^4\,3x+cos\sqrt{x}$.

27.19. $y=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

27.20. $y=ln(ln^2\,x-1)$.

27.21. $y=\dfrac{arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}$.

27.22. $y=\dfrac{\sqrt{x^5+2\,sin\,x}-e^x}{x}$.

27.23. $y=\sqrt[3]{log_2\left(2^x-x\right)}$.

27.24. $y=\sqrt[3]{(1+sin^3\,2x)^2}$.

27.25. $y=arccos\sqrt{4x+5}\cdot\sqrt{x-1}$.

27.26. $y=e^{3x\,ln\,x}$.

27.27. $y=\dfrac{\sqrt{1+cos^3\,x}}{1+sin\,3x}$.

27.28. $y=\dfrac{ln^3(3x^2-4x)}{\sqrt[3]{(2x^{12}+7x^3)^2}}$.

27.29. $y=ln\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}\right)$.

27.30. $y=\sqrt{\dfrac{2}{5-sin\,x}}$.

28. Найти производные функций в указанной точке.

28.1. $y=xarctgx$, $y'(1)-?$

28.2. $y=\dfrac{ln\,x}{x}$, $y'(e)-?$

28.3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $f'(2)-?$

28.4. $y=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7-5x-x^3}}$, $x_0=1$.

29. Найти производные первого порядка.

29.1. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

29.2. $y = x^{x^2+1}$.

29.3. $y = (x+2)^{\ln x - 10}$.

29.4. $y = (\cos x - 4)^x$.

29.5. $y = (tgx)^{\cos x}$.

29.6. $y = x^{\sqrt{\ln x}}$.

29.7. $y = (ctgx)^{\sin 2x}$.

29.8. $y = (\arcsin x)^{x^2+1}$.

29.9. $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$.

29.10. $y = (\ln x)^x$.

30. Найти производные y'_x от неявных функций.

30.1. $x \ln y + y \ln x = 0$.

30.2. $e^{xy} - \cos(x^2 + y^2) = 0$.

30.3. $arctg(x+y) = x$.

30.4. $xy - arctg(xy) = 0$.

30.5. $y^2 x - x^2 + 4y = e^{3x}$.

30.6. $x \sin y + (x+2y)^3 - 4y = 0$.

30.7. $\dfrac{\cos y}{(x+y)^2} = x$.

30.8. $\sin \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = 0$.

31. Найти производные второго порядка функций.

31.1. $y = e^{2x+10}$.

31.2. $y = arctg(e^x)$.

31.3. $y = \ln \cos x$.

31.4. $y = \sin^2 3x$.

31.5. $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

31.6. $y = \dfrac{x-1}{2x+5}$.

31.7. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = arctgt. \end{cases}$

31.8. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 1 + t; \end{cases}$

31.9. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^5; \end{cases}$

31.10. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

31.11. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

31.12. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$

32. С помощью правила Лопиталя вычислить пределы.

32.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$.

32.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

32.3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2(x-2)}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

32.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

32.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

32.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$.

32.7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^{\ln x}-x}{\ln x}$.

32.8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$.

32.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(tg\,x)}{\ln(tg\,2x)}$.

32.10. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

32.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

32.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

32.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$.

32.14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

32.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

32.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

32.17. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\arcsin x}$.

32.18. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x}$.

32.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

32.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$.

33. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций.

33.1. $f(x)=x^3-27x$.

33.2. $f(x)=3\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+2$.

33.3. $y=x^3(x-1)$.

33.4. $y=e^{x^2+x}$.

33.5. $y=\frac{e^x}{x}$.

33.6. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$.

33.7. $y=x^3\ln x$.

33.8. $y=x+\ln x^2$.

33.9. $y=\frac{x^2}{x+1}$.

33.10. $y=\frac{1+x+x^2}{x^2+1}$.

33.11. $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

33.12. $y=\sqrt{x^2-\dfrac{16}{x}}$.

34. Найти асимптоты графика функции.

34.1. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

34.2. $y=\dfrac{4x^2+x+4}{x-1}$.

34.3. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

34.4. $y=\dfrac{2x^5-x^3}{x^4-16}$.

34.5. $y=5x+\dfrac{\ln x}{x}$.

34.6. $y=xe^{4x}+2$.

34.7. $y=1-\dfrac{9}{x^2}$.

34.8. $y=\dfrac{3x^2-4x}{x-1}$.

35. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в указанной точке.

35.1. $f(x)=2x+\sqrt[4]{x}$, $x_0=1$.

35.2. $y=x^2-x+1$, $x_0=-1$.

35.3. $y=\dfrac{x-4}{2x+1}$, $x_0=0$.

35.4. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0=2$.

35.5. $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$, $x_0=1$.

35.6. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, $x_0=-1$.

35.7. $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t^2+t-3,\end{cases}$ $M_0(3;1)$.

35.8. $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=4\sin t,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

35.9. $\begin{cases}x=t^2-3t+3,\\ y=t^2-4t+3,\end{cases}$ $M_0(1;-1)$.

35.10. $\begin{cases}x=\cos 2t,\\ y=\sin 2t,\end{cases}$ $t_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

36. Исследовать функцию и построить ее график.

36.1. $y=2x^4-3x^2-6$.

36.2. $y=\ln\sqrt{1+x^2}$.

36.3. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-4x+5}$.

36.4. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

36.5. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

36.6. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)}$.

36.7. $y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

36.8. $y = \dfrac{x}{e^x}$.

36.9. $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$.

36.10. $y = \dfrac{6-x^2}{x^2-4}$.

37. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

37.1. $y = x^3 - 3x^2$, $[-1;4]$.

37.2. $y = x\ln x$, $[0{,}1;1]$.

37.3. $y = e^{6x-x^2}$, $[-3;3]$.

37.4. $y = 108x - x^4$, $[-1;4]$.

37.5. $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$, $[\dfrac{1}{4};4]$.

37.6. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $[1;9]$.

37.7. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, $[1;4]$.

37.8. $y = \dfrac{x}{2+x^3}$, $[0;3]$.

37.9. $y = \dfrac{x+1}{e^x}$, $[-1;1]$.

37.10. $y = \dfrac{2x-1}{2+x^2}$, $[-2;0]$.

38. Составить кластер «Производная функции».

39. Написать эссе по одной из указанных тем.

39.1. Производные функций в школьном курсе физики.

39.2. Применение производных функций в науке и технике.

39.3. Применение производных функций в химии.

39.4. Применение производных функций в географии.

39.5. Применение производных функций в электротехнике.

39.6. Применение производных функций в экономике.

39.7. Производные функций в задачах ЕГЭ.

39.8. Численное дифференцирование в Excel.

39.9. Применение производных при решении уравнений и неравенств.

39.10. Пропедевтика производной функции в курсе решения текстовых задач.

40. Решить творческое задание.

40.1. Разработать алгоритм урока по теме «Геометрические приложения производной» (базовый уровень).

40.2. Разработать олимпиадные задачи для школьников по теме «Экстремальные задачи».

40.3. Разработать олимпиадные задачи для школьников по теме «Применение производной к решению алгебраических задач».

40.4. Разработать олимпиадные задачи для школьников по теме «Применение производной к решению геометрических задач».

40.5. Разработать алгоритм урока по теме «Геометрические приложения производной» (профильный уровень).

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполнятся равенство: $F'(x) = f(x)$. Любые две первообразные функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупность первообразных $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\ C-const.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int f'(x)dx = f(x)+C$.

2. $\int d[f(x)] = f(x)dx$.

3. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x)+C$, где $G(x)$ – первообразная функции $g(x)$.

5. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,\ A-const$.

6. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a, b-const,\ a \neq 0$.

7. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $\varphi(u)$ – любая дифференцируемая функция, то $\int f[\varphi(u)]dx = F(\varphi(u))+C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1.	$\int 0 \cdot du = C.$	10.	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C.$
2.	$\int du = u + C.$	11.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C,$ $-a < u < a,\ a > 0.$
3.	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$	12.	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C,\ n \neq -1.$
4.	$\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C.$	13.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C.$
5.	$\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$	14.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C.$
6.	$\int e^u du = e^u + C.$	15.	$\int tgudu = -ln\lvert cos\, u\rvert + C.$
7.	$\int sin\, udu = -cos\, u + C.$	16.	$\int ctgudu = ln\lvert sin\, u\rvert + C.$
8.	$\int cos\, udu = sin\, u + C.$	17.	$\int \frac{du}{sin\, u} = ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C.$
9.	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C.$	18.	$\int \frac{du}{cos\, u} = ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C.$

В приведенной таблице интегралов символ u может обозначать как переменную, так и некоторую дифференцируемую функцию.

✦ **Пример 25**. Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 2. $\int \frac{dx}{2x^{10}}$. 3. $\int\left(2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8\right)dx$.

Решение. Вычислим интегралы, используя свойства степеней и правила интегрирования.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/2}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$

2. $\int \frac{dx}{2x^{10}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^{10}} = \frac{1}{2}\int x^{-10} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + C = -\frac{x^{-9}}{18} + C = -\frac{1}{18x^9} + C.$

$$3.\ \int\left(2\sqrt{x}-\frac{7}{x^2}+3x-8\right)dx=2\int x^{1/2}dx-7\cdot\int x^{-2}dx+3\int xdx-8\int dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}-7\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+3\cdot\frac{x^2}{2}-8\cdot x+C=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{2}x^2-8x+C.$$

4.2. Методы интегрирования

А. **Непосредственное интегрирование**

Метод непосредственного интегрирования заключается в применении тождественных преобразований с использованием свойств неопределенного интеграла, приводящих к одному или нескольким табличным интегралам.

Б. **Метод интегрирования подстановкой**

Метод интегрирования подстановкой (замены переменной) заключается в том, что вводится новая переменная $x=\varphi(t)$ (то есть подстановка), при этом заданный интеграл приводится к новому интегралу с новой переменной:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,.$$

После интегрирования с новой переменной необходимо от переменной t вернуться к переменной x на основании равенства $x=\varphi(t)$.

В. **Интегрирование методом по частям**

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int udv=uv-\int vdu\,. \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой интегрирования по частям. Интегрирование методом по частям может применяться для интегрирования функций, представляющих собой произведения:

1) степенной функции на тригонометрическую;

2) степенной функции на показательную;

3) степенной функции на логарифмическую.

В первых двух случаях за u принимают степенную функцию, в третьем случае за u принимают логарифмическую функцию.

Постоянная C, возникающая при нахождении функции v не входит в

запись окончательного ответа, поэтому она исключается в процессе решения.

✦ **Пример 26**. Найти интегралы.

1. $\int sin\frac{2}{3}xdx$. 2. $\int \frac{dx}{x-10}$. 3. $\int (1-3x)^7 dx$.

4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 5. $\int \frac{cos\,x}{4+sin^2 x}dx$. 6. $\int x\,cos(2x-11)dx$.

Решение. 1. Используя формулу $dy = y'dx$, где $y = y(x)$, получаем

$$d\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{3}dx \Rightarrow dx = \frac{3}{2}d\left(\frac{2}{3}x\right),$$

тогда

$$\int sin\frac{2}{3}xdx = \frac{3}{2}\int sin\frac{2}{3}xd\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{3}{2}cos\frac{2}{3}x + C.$$

2. Путем подведения линейного множителя $kx+b$ под знак дифференциала мы получаем один из табличных интегралов. Действительно,

$$d(x-10) = dx.$$

Тогда из табличной формулы 4 следует, что

$$\int \frac{dx}{x-10} = \int \frac{d(x-10)}{x-10} = ln|x-10| + C.$$

3. Так как $d(1-3x) = -3dx$, то, используя табличный интеграл от степенной функции, получим

$$\int (1-3x)^7 dx = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^7 d(1-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{7+1}}{7+1} + C = -\frac{(1-3x)^8}{24} + C.$$

4. Введем новую функцию $t = 1+e^x$, $dt = d\left(1+e^x\right) = e^x dx$, тогда исходный интеграл сведется к табличному:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2}dt = 2t^{1/2} + C = 2\sqrt{1+e^x} + C.$$

5. Положим $t = sin\,x$, $dt = d(sin\,x) = cos\,xdx$, тогда

$$\int \frac{cos\,x}{4+sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{sin\,x}{2} + C.$$

6. Подынтегральная функция представляет собой произведение степенной функции $P(x)=x$ и тригонометрической $Q(x)=cos(2x-11)$, поэтом за u обозначим x, а за dv оставшееся подынтегральное выражение: $dv=cos(2x-11)dx$. Решение удобно записывать в виде таблицы:

$$\int x\cos(2x-11)dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=cos(2x-11)dx & v=\frac{1}{2}\int cos(2x-11)d(2x-11)=\frac{1}{2}sin(2x-11)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x\,sin(2x-11)-\frac{1}{2}\int sin(2x-11)dx=\frac{1}{2}x\,sin(2x-11)+\frac{1}{4}cos(2x-11)+C.$$

✦ **Пример 27**. Вычислить интегралы.

1. $\int\frac{x^2+2}{1+x^2}dx$. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$.

Решение. 1. Преобразуем данный интеграл:

$$\int\frac{x^2+2}{1+x^2}dx=\int\frac{\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}dx=\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=x+arctgx+C.$$

2. Умножим и разделим подынтегральную функцию на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{x-1-(x+1)}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right).$$

Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)dx=-\frac{1}{2}\int(x-1)^{1/2}dx+\frac{1}{2}\int(x+1)^{1/2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(x-1)^{1/2}d(x-1)+\frac{1}{2}\int(x+1)^{1/2}d(x+1)=-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}+\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}+\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C.$$

Г. Интегрирование рациональных функций

Функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $n \in N$, a_i, $(i = 0,1,\ldots,n)$ – постоянные числа, называется ***многочленом степени*** n.

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной*** дробью) называется выражение вида: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен m-й степени, $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$ и неправильной, если $m \geq n$.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, путем деления числителя на знаменатель, можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $L(x)$ – частное, а $R(x)$ – остаток от деления.

Пусть знаменатель правильной рациональной дроби разлагается на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{s_2} \ldots, \qquad (2)$$

причем уравнения $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$, … не имеют действительных корней.

Примем без доказательства утверждение, что всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой представим в виде (2) можно представить в виде суммы ***простейших рациональных*** дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}+$$

$$+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{F_2x+G_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{F_{s_2}x+G_{s_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{s_2}}+\ldots,$$

где все коэффициенты разложения уточняются в процессе разложения дроби.

Примеры: представим в виде простейших дробей следующие рациональные дроби:

1. $\dfrac{5x^2+14}{(x-1)(x+3)(x+5)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x+5}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа с $n=1$.

2. $\dfrac{7x^2+8x-1}{(x+3)^4}=\dfrac{A}{(x+3)^4}+\dfrac{B}{(x+3)^3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}+\dfrac{D}{x+3}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

3. $\dfrac{5x^2+2x+4}{(x^2+x+1)(x^2+x+5)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+5}.$

Дробь правильная, множители знаменателя нельзя разложить на множители, так как $D_1=1-4<0$, $D_2=1-20<0$, поэтому она сводится к сумме двух простейших дробей второго типа.

4. $\dfrac{3x^2+x-1}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}.$

5. $\dfrac{3x^4+7x-1}{x^2(x+2)\left(x^2+x+5\right)^2\left(x^2-x+2\right)}=$

$$=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+F}{\left(x^2+x+5\right)^2}+\frac{Cx+E}{x^2+x+5}+\frac{Lx+M}{x^2-x+2}.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. Интегралы вида $\int \frac{Adx}{(kx+b)^n}$, $n \in N$ вычисляются методом подведения выражения $kx+b$ под знак дифференциала.

При $n=1$, находим

$$\int \frac{Adx}{kx+b} = \frac{A}{k}\int \frac{d(kx+b)}{kx+b} = \frac{A}{k}\ln|kx+b| + C.$$

При $n \neq 1$, получаем

$$\int \frac{Adx}{(kx+b)^n} = \frac{A}{k}\int (kx+b)^{-n} d(kx+b) = \frac{A}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A(kx+b)^{1-n}}{k(1-n)} + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$. Возможны случаи:

а) дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ больше нуля $(D>0)$, тогда квадратный трехчлен в знаменателе подынтегральной функции раскладывается на множители: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

В этом случае подынтегральная функция представима в виде суммы двух простейших рациональных дробей:

$$\frac{ex+f}{ax^2+bx+c} = \frac{ex+f}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_2)},$$

то есть исходный интеграл сводится к сумме двух интегралов вида **1**;

б) дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ меньше нуля $(D<0)$. В этом случае выделяется полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right);$$

в) дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен нулю $(D=0)$. В этом случае, если x_0 – корень уравнения, то знаменатель подынтегрального выражения преобразуется к виду: $a(x-x_0)^2$. В результате получаем интеграл вида:

$$\int \frac{ex+f}{a(x-x_0)^2}\,dx,$$

который легко вычислить с помощью подстановки $x-x_0=t$.

3. Интегрирование дробей вида $\dfrac{ex+f}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\beta}}$, где дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ меньше нуля, а $\beta\geq 2$, в данном пособии не рассматривается.

✦ **Пример 28**. Найти интегралы.

1. $\int \dfrac{3x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$. 2. $\int \dfrac{x-3}{x^2-4x+5}\,dx$.

Решение. 1. Подынтегральная дробь – правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя. Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^3+3x^2+2x=x\left(x^2+3x+2\right)=x(x+1)(x+2).$$

Следовательно,

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}.$$

Дроби равны, равны знаменатели, следовательно, равны и их числители:

$$3x+2=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1). \qquad (3)$$

Равенство (3) выполняется для любого значения x. Подставам в левую и правую части значения аргумента $x=0$, $x=-1$, $x=-2$:

$x=0$: $\quad 2=2A\Rightarrow A=1$,

$x=-1$: $\quad -1=B$,

$x=-2$: $\quad -4=2C\Rightarrow C=-2$.

Откуда

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int\frac{3x+2}{x^3+3x^2+2x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=ln|x|-ln|x+1|-2\,ln|x+2|+C=ln\left|\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\right|+C.$$

2. Выпишем квадратное уравнение $x^2-4x+5=0$. Так как $\frac{D}{4}=-1<0$, то действительных корней нет. Выделим в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат:

$$x^2-4x+5=\left(x^2-2\cdot 2x+2^2\right)-2^2+5=(x-2)^2+1.$$

Положим $t=x-2\Rightarrow dt=d(x-2)=dx$, $x=t+2$ тогда

$$\int\frac{x-3}{(x-2)^2+1}dx=\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=.$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|t^2+1\right|-arctgt+C=\frac{1}{2}ln\left|(x-2)^2+1\right|-arctg(x-2)+C.$$

$$I=\frac{1}{2}ln\left|x^2-4x+5\right|-arctg(x-2)+C.$$

Д. Интегрирование тригонометрических функций

Тип I. 1. Интегралы типа $\int sin^m x\,cos^n x dx$. Для вычисления таких интегралов используются следующие приемы:

1) если n – целое положительное нечетное число, то в этом случае отделяют один множитель $cos\,x$ и заменяют функцию $sin\,x$ новой переменной: $t=sin\,x$, $dt=cos\,xdx$;

2) если m – целое положительное нечетное число, то в этом случае отделяют один множитель $sin\,x$ и заменяют функцию $cos\,x$ новой переменой: $t=cos\,x$, $dt=-sin\,xdx$;

3) если под знаком интеграла содержится $cos\,x$ или $sin\,x$ в четной сте-

пени, то в этом случае используются формулы понижения степени $sin^2 x = \frac{1-cos 2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1+cos 2x}{2}$, $sin x cos x = \frac{1}{2} sin 2x$;

4) если $m+n$ – целое отрицательное число, то в этом случае применяется подстановка $t = tgx$, $dt = \frac{dx}{cos^2 x}$.

✦ **Пример 29**. Вычислить интегралы.

1. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt{cos^5 x}} dx$. 2. $\int sin^2 4x dx$. 3. $\int \frac{dx}{sin^2 x + 4cos^2 x + 4}$.

Решение. 1. Под знаком интеграла функция $sin x$ задана в нечетной степени, согласно правилу 2) (п. Д.) отделяем от нечетной степени один множитель и полагаем $t = cos x$:

$$\int \frac{sin^3 x}{\sqrt{cos^5 x}} dx = \int \frac{sin^2 x \, sin x}{\sqrt{cos^5 x}} dx = \int \frac{\left(1-cos^2 x\right) sin x}{\sqrt{cos^5 x}} dx = \left| \begin{matrix} t = cos x \\ dt = -sin x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{\left(1-t^2\right)}{t^{5/2}} dt = -\int t^{-5/2} dt + \int t^{-1/2} dt = -\frac{t^{-3/2}}{-3/2} + \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3\sqrt{t^3}} + 2\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{cos^3 x}} + 2\sqrt{cos x} + C.$$

2. Применяя формулу понижения степени (правило 3), данный интеграл сводим к табличному:

$$\int sin^2 4x dx = \frac{1}{2}\int (1 - cos 8x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos 8x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\int cos 8x d(8x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} sin 8x + C.$$

3. Используя основное тригонометрическое тождество, четверку в знаменателе можно записать в виде: $4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot \left(cos^2 x + sin^2 x\right)$. Выполним преобразования:

$$\int \frac{dx}{sin^2 x + 4cos^2 x + 4} = \int \frac{dx}{sin^2 x + 4cos^2 x + 4\left(cos^2 x + sin^2 x\right)} =$$

$$\int \frac{dx}{5\sin^2 x + 8\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(5tg^2 x + 8\right)}.$$

Полагаем $t = tgx$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(5tg^2 x + 8\right)} = \int \frac{dt}{5t^2 + 8} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{5}t\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\sqrt{5}t\right)}{\left(\sqrt{5}t\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{40}} arctg \frac{\sqrt{5}t}{\sqrt{8}} + C == \frac{1}{2\sqrt{10}} arctg \frac{\sqrt{5}tgx}{2\sqrt{2}} + C.$$

Тип II. Интегралы вида $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$ вычисляются путем преобразования подынтегральных функций:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right).$$

✦ **Пример 30**. Найти интеграл $\int \sin 4x \cos 5x dx$.

Решение.

$$\int \sin 4x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-x) - \cos 9x\right] dx = \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Тип III. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$, где R – рациональная функция относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, вычисляются с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

✦ **Пример 31**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение. Полагая $t = tg\frac{x}{2}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{5\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} =$$

$$= \frac{1}{4} ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2}{tg\frac{x}{2}-2}\right| + C.$$

Е. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Тип 1. Интегралы вида

$$\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ \int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$$

где R – рациональная функция, находятся с помощью подстановок:

$$x = a\sin t,\quad x = atgt,\quad x = \frac{a}{\cos t}.$$

Тип II. Интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt[n_1]{x^{m_1}};\sqrt[n_2]{x^{m_2}};...;\sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right)$ упрощаются с помощью подстановки $x = t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, …, n_k.

Наиболее простым случаем является интеграл вида $\int R\left(x;\sqrt[n]{x^m}\right)$, который рационализируется с помощью замены $x = t^n$.

Обобщением интегралов данного вида являются интегралы вида:

$$\int R\left(x;\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}};\sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}};...;\sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)$$

Для их вычисления используется подстановка: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, …, n_k.

✦ **Пример 32**. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx$.

Решение. Здесь x входит в подынтегральную функцию с дробными показателями 1/2 и 1/3. Поэтому применяем подстановку $x=t^6$, откуда

$$dx=6t^5dt,\quad \sqrt{x}=t^3,\quad \sqrt[3]{x}=t^2$$

и данный интеграл принимает вид

$$\int\frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=\int\frac{t^3-2}{t^6\left(t^2+1\right)}6t^5dt=6\int\left(1-\frac{t+2}{t^3+t}\right)dt=6t-6\int\frac{t+2}{t\left(t^2+1\right)}dt.$$

Для нахождения последнего интеграла разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{t+2}{t\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

откуда

$$t+2==A\left(t^2+1\right)+\left(Bt+C\right)t.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим $A=2$, $B=-2$, $C=1$. Следовательно,

$$\int\frac{t^3-2}{t^6\left(t^2+1\right)}6t^5dt=6t-6\int\left(\frac{2}{t}+\frac{1-2t}{t^2+1}\right)dt=6t-12\,ln\,t+6ln\left(t^2+1\right)-6arctgt+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$$\int\frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=6\sqrt[6]{x}-12\,ln\sqrt[6]{x}+6ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)-6arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

Тип III. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен под знаком корня:

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}dx.$$

Для их решения выделяют полный квадрат под знаком корня, после че-

го интеграл рационализируется либо посредством необходимой подстановки, либо подведением под знак дифференциала.

✦ **Пример 33.** Вычислить интеграл: $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Решение. Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$x^2+2x+2=x^2+2\cdot 1x+1+1=(x+1)^2+1.$$

Полагаем, $t=x+1$, $dx=dt$, тогда $x=t-1$ и исходный интеграл преобразуется к виду:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int \frac{3x-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx=\int \frac{3t-4}{\sqrt{t^2+1}}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(t^2+1\right)-4\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{3\cdot 2}{2}\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-4\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|=$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

➢ **Задачи для работы в аудитории**

41. Вычислить интегралы.

41.1. $\int \sqrt[5]{x^2}dx$.

41.2. $\int \frac{dx}{x^2}$.

41.3. $\int \left(2x^2+1\right)^2 dx$.

41.4. $\int \left(2e^x-3x^2+4\right)dx$.

41.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^7}}$.

41.6. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

41.7. $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

41.8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^5}-5x}{3x^2}dx$.

41.9. $\int \frac{x\cos x-4x^2+5}{x}dx$.

41.10. $\int \frac{2x-xe^x+3}{x}dx$.

41.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

41.12. $\int \frac{dx}{cos^2 6x}$.

41.13. $\int sin(2x+3)dx$.

41.14. $\int tg(5-x)dx$.

41.15. $\int 3^{2-11x}dx$.

41.16. $\int (1-4x)^5 dx$.

41.17. $\int cos(4-x)dx$.

41.18. $\int e^{11x-1}dx$.

41.19. $\int \frac{dx}{(5-6x)^3}$.

41.20. $\int \frac{3dx}{9x+4}$.

41.21. $\int \sqrt[5]{2x-8}dx$.

41.22. $\int (3x-5)^7 dx$.

41.23. $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{5x-6}}$.

41.24. $\int \frac{dx}{9x^2+7}$.

41.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$.

41.26. $\int \frac{dx}{16x^2+25}$.

42. Вычислить интегралы методом подстановки.

42.1. $\int \frac{ln^2 x}{x}dx$ $(t = ln\,x)$.

42.2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

42.3. $\int \sqrt[5]{sin^4 x}\,cos\,xdx$ $(t = sin\,x)$.

42.4. $\int e^{sin^2 x}\,sin\,2xdx$.

42.5. $\int \frac{e^x dx}{3e^x+2}$ $(t = 3e^x + 2)$.

42.6. $\int \frac{cos\,ln\,x}{x}dx$.

42.7. $\int \frac{sin\,xdx}{cos^2 x}$ $(t = cos\,x)$.

42.8. $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx$.

42.9. $\int \frac{xdx}{4-5x^2}$ $(t = 4-5x^2)$.

42.10. $\int \frac{dx}{x(ln^2 x-5)}$.

42.11. $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$ $(t = e^x)$.

42.12. $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$.

42.13. $\int xe^{7x^2+5}dx$ $(t = 7x^2 + 5)$.

42.14. $\int sin\,xe^{5cos\,x+4}dx$.

42.15. $\int x(3x^2-4)^5 dx$.

42.16. $\int \frac{cos\,xdx}{\sqrt{sin\,x}}$.

42.17. $\int \frac{dx}{tg^5 x\,cos^2 x}$.

42.18. $\int \frac{e^{3ctgx+10}}{sin^2 x}dx$.

42.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+16}}$.

42.20. $\int e^x\left(5e^x+4\right)^9 dx$.

42.21. $\int \frac{arcsin^8 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

42.22. $\int \frac{(2\ln x-5)^6}{x}dx$.

42.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

42.24. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sin^2 x+10}$.

42.25. $\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^3\right)^4}$.

42.26. $\int \frac{e^{arcsin\, x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

42.27. $\int \frac{x^2dx}{x^6+81}$.

42.28. $\int \frac{dx}{x(\ln x+5)^3}$.

42.29. $\int \frac{\cos xdx}{4\sin x+15}$.

42.30. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

42.31. $\int x^2\cos\left(5+2x^3\right)dx$.

42.32. $\int x\cos\left(5x^2-12\right)dx$.

43. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

43.1. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ $(u=\ln x,\ dv=\frac{dx}{x^2})$.

43.2. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ $(u=x,\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x})$.

43.3. $\int arctgxdx$ $(u=arctgx,\ dv=dx)$.

43.4. $\int(2x-1)\cos xdx$ $(u=2x-1,\ dv=\cos xdx)$.

44. Вычислить интегралы.

44.1. $\int \ln xdx$.

44.2. $\int arcsin\, xdx$.

44.3. $\int(x+3)\cos 5xdx$.

44.4. $\int x\sin(3x-4)dx$.

44.5. $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

44.6. $\int(4x+5)e^x dx$.

44.7. $\int\sqrt{x}\ln xdx$.

44.8. $\int x^2e^{3x+4}dx$.

44.9. $\int xe^{-2x}dx$.

44.10. $\int x^4\ln xdx$.

44.11. $\int \ln^2 xdx$.

44.12. $\int x^2\sin xdx$.

44.13. $\int (4x+5)\sin 2x dx$.

44.14. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} dx$.

45. Вычислить интегралы.

45.1. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^2}$.

45.2. $\int \frac{dx}{3-2x}$.

45.3. $\int \frac{dx}{(3x-1)^{11}}$.

45.4. $\int \frac{dx}{(x+5)^2}$.

45.5. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$.

45.6. $\int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)} dx$.

45.7. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

45.8. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

45.9. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-8x+7}$.

45.10. $\int \frac{(x-4)dx}{x^2-5x+6}$.

45.11. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

45.12. $\int \frac{(x+5)dx}{2x^2+2x+13}$.

45.13. $\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-x} dx$.

45.14. $\int \frac{3x^3-1}{x^4-2x^3+x^2} dx$.

46. Вычислить интегралы.

46.1. $\int \cos^2 8x dx$.

46.2. $\int tg^2(7x+1)dx$.

46.3. $\int ctg^2(2x)dx$.

46.4. $\int \sin^3 x dx$.

46.5. $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^3 x dx$.

46.6. $\int \sin^2(5x-4)dx$.

46.7. $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$.

46.8. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

46.9. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}} dx$.

46.10. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

46.11. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

46.12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

47. Вычислить интегралы.

47.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$.

47.2. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

47.3. $\int \cos^4 5x dx$.

47.4. $\int \sin^4 2x dx$.

47.5. $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

47.6. $\int \sin 7x \sin 9x \sin 4x dx$.

47.7. $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x}$.

47.8. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

47.9. $\int \cos^5 x dx$.

47.10. $\int \sin x \cos 3x dx$.

47.11. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

47.12. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

48. Вычислить интегралы.

48.1. $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

48.2. $\int \sqrt{9+x^2} dx$.

48.3. $\int \sqrt{x^2+4x+5} dx$.

48.4. $\int \sqrt{4x^2-1} dx$.

48.5. $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x-1}}$.

48.6. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx$.

48.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$.

48.8. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

48.9. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx$.

48.10. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

49. Вычислить интегралы.

49.1. $\int \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

49.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

49.3. $\frac{dx}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}$.

49.4. $\int \frac{dx}{3x-4\sqrt{x}}$.

49.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{15-9x^2-6x}}$.

49.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-20}}$.

49.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

49.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

49.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{80-2x-x^2}}$.

49.10. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+18}}$.

49.11. $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

49.12. $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

4.3. Определенный интеграл

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на отрезке $[a;b]$, то имеет место ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Введем обозначение $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$, тогда формула Ньютона – Лейбница запишется в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства определенных интегралов

1. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
2. $\int_a^b A\cdot f(x)dx = A\cdot\int_a^b f(x)dx$, $A-const$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c\in(a;b)$.
4. Если $f(x)\ge 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
5. Если $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a;b]$, то

а) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

б) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

6. ***Теорема о среднем***: $\exists \xi \in [a;b]$, $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, где $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a;b]$ функция.

7. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

8. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

✦ **Пример 34**. Вычислить интегралы.

1. $\int_1^2 \frac{x^2+3x-4}{x^2}dx$. 2. $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Решение. 1.

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x-4}{x^2}dx = \int_1^2 dx + 3\int_1^2 \frac{dx}{x} - 4\int_1^2 x^{-2}dx =$$

$$= x\Big|_1^2 + 3\ln|x|\Big|_1^2 + 4\frac{1}{x}\Big|_1^2 = 2-1+3(\ln 2-\ln 1)+4\left(\frac{1}{2}-1\right) = 3\ln 2-1.$$

2. Решим данный интеграл ***методом подстановки***. При вычислении определенного интеграла с помощью подстановки необходимо изменить пределы интегрирования для новой переменной, при этом, после нахождения первообразной, возвращаться к старой переменной не нужно, непосредственно используя формулу Ньютона – Лейбница.

Положим, $t = -x^2$, тогда $dt = \left(-x^2\right)'dx = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2}$. Переходя к новой переменной, мы обязательно должны перейти и к новым пределам интегрирования для переменной t. Для этого подставим нижний и верхний пределы интегрирования в функцию $t = -x^2$:

$$x=0\Rightarrow t(0)=0,$$
$$x=1\Rightarrow t(1)=-1.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^t dt=-\frac{1}{2}e^t dt\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{e-1}{2e}.$$

3. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на $[a;b]$, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

В соответствии с формулой интегрирования по частям находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\sin x \end{vmatrix}=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

4.4. Несобственные интегралы первого рода и второго рода

А. Несобственный интеграл 1 рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на произвольном промежутке $[a;b]$. Несобственные интегралы первого рода определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

Если пределы в правых частях равенств (4) конечные, то говорят, что несобственные интегралы ***сходятся***. Если же указанные пределы не сущест-

вуют или они бесконечны, то говорят, что интегралы ***расходятся***.

Б. Несобственный интеграл 2 рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=b$. Несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

Если предел в правой части равенства (5) конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке $x=a$, то несобственный интеграл второго рода определяют формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{6}$$

Если функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка $[a;b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7}$$

В этом случае интеграл, стоящий в левой части равенства (7) называется сходящимся, если оба несобственных интеграла в правой части (7) сходятся.

✦ **Пример 35.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

1. $\int_1^{+\infty} xe^{2x^2+4}dx$. 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. 1. По определению несобственного интеграла первого рода имеем

$$\int_1^{+\infty} xe^{2x^2+4}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b xe^{2x^2+4}dx = \left|\begin{array}{lll} t=2x^2+4 & x=1 & t(1)=6 \\ dt=d\left(2x^2+4\right)=4xdx & x=b & t(b)=2b^2+4 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\int_6^{2b^2+4} e^t dt = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} e^t\Big|_6^{2b^2+4} = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{2b^2+4} - e^6\right) = \frac{1}{4}\left(e^{+\infty} - e^6\right) = \infty.$$

Вывод: интеграл расходится.

2. Находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5} = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{dx}{x^2+4x+5} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{dx}{(x+2)^2+1} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} arctg(x+2)\Big|_c^0 + \lim_{c\to+\infty} arctg(x+2)\Big|_0^c =$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\left[arctg2 - arctg(c+2)\right] + \lim_{c\to+\infty}\left[arctg(c+2) - arctg2\right] =$$

$$= -arctg(-\infty) + arctg(+\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

✦ **Пример 36**. Найти значения интегралов или доказать, что они расходятся.

1. $\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^2}$. 2. $\int_0^2\frac{dx}{x^2+2x}$.

Решение. 1. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=2$ $\left(\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty\right)$. По формуле (5) находим:

$$\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2} = -\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{x-2}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{2-\varepsilon-2} - \frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{0} + \frac{1}{2} = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

2. При $x\to0$ функция $\frac{1}{x^2+2x}\to\infty$. Согласно формуле (6) имеем

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2+2x+1-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} ln\left|\frac{x+1-1}{x+1+1}\right|_{0+\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln\left|\frac{1}{2}\right| - ln\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(ln\frac{1}{2} - ln\,0\right) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

➢ Задачи для работы в аудитории

50. Вычислить интегралы.

50.1. $\int_0^2 \left(3x^2-1\right)dx$.

50.2. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-4x^2\right)dx$.

50.3. $\int_0^{\pi/2} sin\,3x dx$.

50.4. $\int_0^{\pi/2} (cos\,2x+1)dx$.

50.5. $\int_{-2}^1 e^{2x-4}dx$.

50.6. $\int_1^2 \frac{3x^4-2x+1}{x}dx$.

50.7. $\int_0^{\pi} (x+4)sin\,2x dx$.

50.8. $\int_0^{\pi} x\,cos\,3x dx$.

50.9. $\int_1^e \frac{ln^3 x}{x}dx$.

50.10. $\int_1^2 \frac{xdx}{5x^2-4}$.

50.11. $\int_1^e \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

50.12. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

50.13. $\int_1^3 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

50.14. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

50.15. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

50.16. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

50.17. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

50.18. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

50.19. $\int_1^2 x\cos\left(2x^2-2\right)dx$.

50.20. $\int_1^e x^4 \ln x dx$.

50.21. $\int_0^2 x^2\left(x^3-8\right)^2 dx$.

50.22. $\int_0^1 xe^{4x-5}dx$.

50.23. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$.

50.24. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

50.25. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$.

50.26. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgxdx$.

51. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

51.1. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$.

51.2. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

51.3. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

51.4. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx$.

51.5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

51.6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

51.7. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$.

51.8. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

51.9. $\int_0^{+\infty} arctg\, xdx$.

51.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x}dx$.

51.11. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}dx$.

51.12. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

52. Вычислить несобственные интегралы или доказать, что они расходятся.

52.1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

52.2. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

52.3. $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

52.4. $\int_{-1}^1 \frac{x-3}{\sqrt{x}}dx$.

52.5. $\int\limits_0^1 \frac{ln^5 x}{x} dx$.

52.6. $\int\limits_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}}$.

52.7. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

52.8. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

52.9. $\int\limits_0^1 ln\, x dx$.

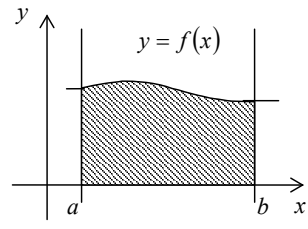
52.10. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x+1}$.

4.5. Некоторые геометрические приложения определенных интегралов

А. Вычисление площадей плоских фигур

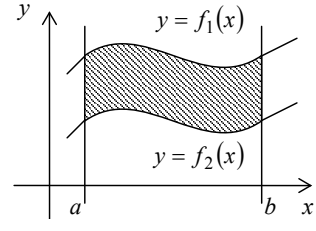
Существует несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда площадь криволинейной трапеции, заключенной между графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, численно равна определенному интегралу



$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

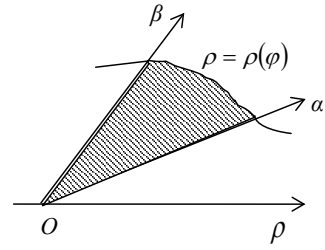
Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями: $y = f_1(x)$ – сверху, $y = f_2(x)$ – снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой



$$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = f(x),\ x \in [a;\ b] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha;\ \beta]$, определяется формулой

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt .$$

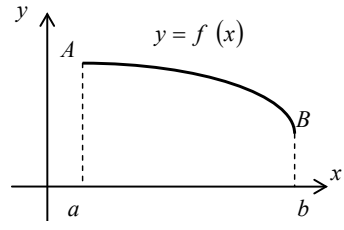


Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi .$$

Б. Вычисление длины дуги кривой

Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x),\ x \in [a;\ b]$, длина дуги находится по формуле

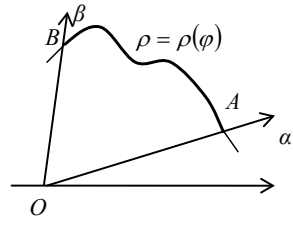


$$l_{AB} = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Для кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = f(x),$ $x \in [a;\ b] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha;\ \beta]$, длина дуги находится по формуле

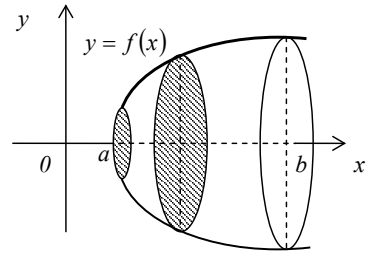
$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha;\ \beta]$, длина дуги находится по формуле



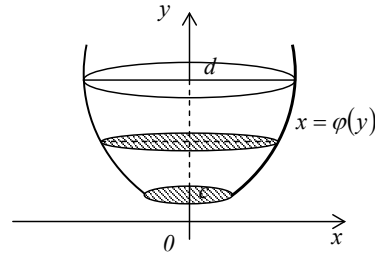
$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi .$$

В. Вычисление объемов тел вращения



Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (8)$$



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, равен:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

✦ **Пример 37**. Вычислить объём тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$ (рис. 12).

Решение. По формуле (8) находим.

$$V_x = -\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} =$$

$$\pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2} sin\, 2x \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{1}{2} sin\, 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} sin\, 0 \right) \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

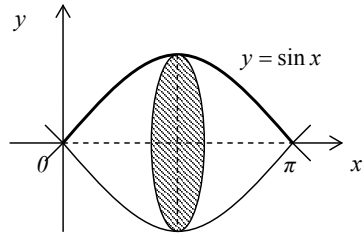
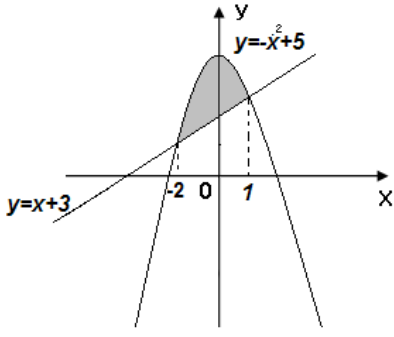


Рис. 12

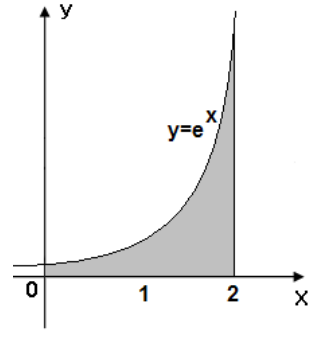
➢ **Задачи для работы в аудитории**

53. Вычислить площадь заштрихованной части фигуры.

53.1.

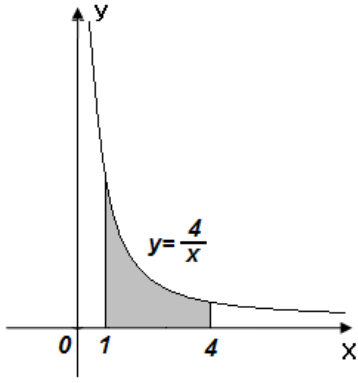


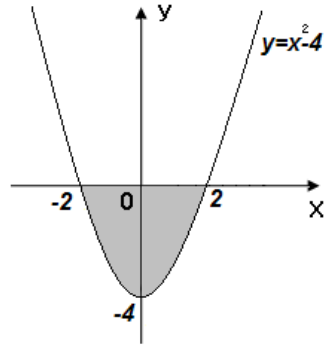
53.2.



53.3.

53.4.





54. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

54.1. $y = 4 - x^2,\ y = 0.$

54.2. $y = x^2,\ y = 2 - x^2.$

54.3. $xy = 4,\ x = 4,\ y = 4,\ x = 0,\ y = 0.$

54.4. $y = x^2,\ y = 2 - x^2,\ y = -x^2,\ x + y + 2 = 0.$

54.5. $y = \dfrac{16}{x^2},\ y = 17 - x^2,\ x > 0.$

54.6. $y = x^3,\ y = x.$

54.7. $y = x^3,\ y = x,\ y = 2x.$

54.8. $xy = 4\sqrt{2},\ y = 4,\ x = 3.$

54.9. $y = \dfrac{1}{4}x^2,\ y = 3x - \dfrac{1}{2}x^2.$

54.10. $y = x^2 - 2x,\ y = x,\ y = 2 - x,\ x \geq 1.$

54.11. $xy = 4,\ x + y = 5.$

54.12. $y = ln\, x,\ y = 0,\ x = 2.$

54.13. $\rho = 4cos\, 3\varphi,\ \rho = 2,\ (\rho \geq 2).$

54.14. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\, cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\, sin^3 t, \end{cases}\ x = 2,\ (x \geq 2).$

54.15. $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi$, $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

55. Вычислить объем тела, получаемого при вращении вокруг оси Ox, плоской фигуры, ограниченной линиями.

55.1. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

55.2. $y = e^{2x}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$.

55.3. $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

55.4. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

55.5. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

55.6. $y = 3 - x$, $x = 0$, $y = 0$.

56. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Oy фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями.

56.1. $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$.

56.2. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

56.3. $x = \sqrt{y-1}$, $y = 2$, $y = 5$, $x = 0$.

56.4. $xy = 6$, $y = 1$, $y = 6$, $x = 0$.

56.5. $y = x^2$, $y = 4$.

57. Найти длину дуги параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от начала координат до точки $A(2;2)$.

58. Найти длину кривой, заданной параметрически.

59.1. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

59.2. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} (0 \le t \le \pi)$.

59. Найти длину кривой, заданной в полярной системе координат.

59.1. $\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

59.2. $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

60. Найти длину дуги кривой.

60.1. $y = \ln\sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

60.2. $y = \ln x$, $x \in \left[\sqrt{3}; \sqrt{8}\right]$.

60.3. $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0;5]$.

60.4. $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [2;7]$.

61. Решить творческое задание.

61.1. Разработать алгоритм проведения урока по теме «Первообразная и ее свойства» (базовый уровень).

61.2. Разработать алгоритм проведения урока по теме «Первообразная и ее свойства» (профильный уровень).

61.3. Разработать алгоритм урока по теме «Определенный интеграл» (базовый уровень).

61.4. Разработать алгоритм урока по теме «Определенный интеграл» (профильный уровень).

62. Написать эссе по одной из указанных тем.

62.1. Приближенное вычисление определенного интеграла.

62.2. Применение определенного интеграла в экономике.

62.3. Применение определенного интеграла в биологии, химии, медицине.

62.4. Применение определенного интеграла в физике и механике.

62.5. Применение определенного интеграла в социальных науках.

62.6. Численное интегрирование в Excel.

62.7. Формулы объемов конуса и шара в школьном курсе геометрии.

62.8. Физические задачи для изучения интеграла в школьном курсе алгебры и начал анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баврин, И.И. Математический анализ для педагогических вузов: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 327 с

2. Балдин, К.В. Математический анализ: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, МПСУ, 2013. – 368 с.

3. Боярчук, А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.3. Часть 2: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / А.К. Боярчук, И.И. Ляшко, Я.Г. Гай. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 256 с.

4. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. – СПб.: Лань, 2012. – 544 с.

5. Гаврилов, В.И. Математический анализ: Учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования / В.И. Гаврилов, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. – М.: ИЦ Академия, 2013. – 336 с.

6. Горлач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 308 с.

7. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2011. – 416 с.

8. Дюпре, Ж.-Л. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / Ж.-Л. Дюпре. – СПб.: Лань П, 2016. – 544 с.

9. Зисман, Г.А. Математический анализ: Учебное пособие / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – СПб.: Лань П, 2016. – 448 с.

10. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.) / В.А Зорич. – М.: МЦНМО, 2012. – 702 с.

11. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 2 (6-е изд.) / В.А Зорич.– М.: МЦНМО, 2012. – 818 с.

12. Ильин, В.А. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 660 с.

13. Ильин, В.А. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 357 с.

14. Кирнев, А.Д. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / А.Д. Кирнев. – СПб.: Лань П, 2016. – 288 с

15. Кытманов, А.М. Математический анализ. учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 607 с.

16. Лейнартас, Е.К. Математический анализ: Учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, В.Н. Лукин; Под ред. А.М. Кытманов. – М.: Юрайт, 2012. – 607 с.

17. Лоссиевская, Т.В. Математический анализ: несобственные интегралы: Учебное пособие / Т.В. Лоссиевская. – М.: МИСиС, 2012. – 61 с.

18. Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т.1. Ч.1: Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – М.: Ленанд, 2015. – 238 с.

19. Никитин, А.А. Математический анализ. углубленный курс: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.А. Никитин, В.В. Фомичев. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 460 с.

20. Очан, Ю.С. Математический анализ: учебное пособие. / Ю.С. Очан, В.Е. Шнейдер. – М.: Альянс, 2016. – 880 с.

21. Сидоров, А.В. Математический анализ. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл / А.В. Сидоров. – М.: МГИУ, 2006. – 114 с.

22. Соловьев, И.А. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая

геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. – СПб.: Лань, 2007. – 320 с.

23. Просветов, Г.И. Математический анализ: задачи и решения: Учебное пособие / Г.И. Просветов. – М.: БИНОМ. ЛЗ, 2011. – 208 с.

24. Протасов, Ю.М. Математический анализ: Учебное пособие / Ю.М. Протасов. – М.: Флинта, Наука, 2012. – 168 с.

25. Шершнев, В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 164 с.

26. Шубин, М.А. Математический анализ для решения физических задач / М.А. Шубин. – М.: МЦНМО, 2003. – 40 с.

Издательство «Дизайн-студия Б».
г. Ставрополь, ул. Краснофлотская, 88. Тел. (8652) 75-06-09.

Сдано в печать 28.12.2017. Усл. печ. л. 7,41. Гарнитура Georgia.
Отпечатано в типографии ООО «Дизайн-студия Б». Ставрополь, ул. Краснофлотская, 88.

Учебное пособие представляет собой краткий курс математического анализа. Рассматриваются следующие разделы: введение в математический анализ, пределы и непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисления. В каждой теме приводится набор теоретических фактов и формул, необходимый для решения практических заданий; типовые задачи с подробными решениями и большое количество задач, которые могут быть использованы при работе со студентами любой формы обучения: очной, заочной, очно-заочной.