



$$F(p, x) = \int_0^{\infty} f(t, x) e^{-pt} dt$$
$$F(p, x) = \int_a^{\infty} f(t, x) e^{-pt} dt$$
$$F(p, x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$
$$F(p, x) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^b$$
$$|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t} \text{ при } t > 0$$
$$K(p, x) = e^{-pt}$$
$$y = f(x)$$
$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda}$$
$$F(p) = \int_a^{\infty} K(p, x) f(x) dx$$

Л. И. Сербина

ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МОНОГРАФИЯ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»



Л. И. Сербина

ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МОНОГРАФИЯ

Ставрополь
2024

УДК 519.6:53:501

ББК 22.1

С 32

Рецензенты:

С.Ш. Рехвиашвили, доктор физико-математических наук,
заместитель директора по научной работе
Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Р.И. Паровик, доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры информатики и математики ФГБОУ ВО «Камчатский
государственный университет имени Витуса Беринга», профессор ДВО РАН

Сербина Л. И.

С 32 **Операционные методы в прикладной математике:**
монография / Л. И. Сербина. - Ставрополь: Изд-во
«Тимченко О.Г.», 2024. – 147 с.

ISBN

Изложены теоретические основы методов операционного исчисления, построенного на интегральном преобразовании Лапласа. Значительное место уделено применению методов операционного исчисления к решению задач прикладной математики: математического анализа, математической физики и расчета электрических цепей. Применение методов операционного исчисления продемонстрировано на решении типовых и нетиповых задач гидродинамики и электростатики.

УДК 519.6:53:501

ББК 22.1

ISBN

© Сербина Л.И., 2024

© ГБОУ ВО СГПИ, 2024

© Издательство «Тимченко О.Г.», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. Теоретические основы операционного исчисления	11
§ 1 Основные понятия и определения преобразования Лапласа	11
§ 2 Действительная и мнимая части изображения.....	15
§ 3 Регулярность изображения	16
§ 4 Изображения некоторых элементарных функций	17
§ 5 Свойства преобразования Лапласа	19
§ 6 Дифференцирование и интегрирование оригинала	23
§ 7 Дифференцирование и интегрирование изображения.....	26
§ 8 Применение основных теорем операционного исчисления к отысканию изображений некоторых не элементарных функций	30
ГЛАВА 2. Обращение преобразования Лапласа.....	44
§ 1 Обратное преобразование Лапласа	44
§ 2 Теорема обращения.....	46
§ 3 Теоремы разложения.....	51
ГЛАВА 3. Применение операционного исчисления к задачам математического анализа	67
§ 1 Решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	67
§ 2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом.....	72
§ 3 Решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операционным методом.....	78
§ 4 Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	80
§ 5 Дифференциальные уравнения с частными производными.....	84
§ 6 Интегральные уравнения типа свертки	87
§ 7 Линейные интегро-дифференциальные уравнения	90
§ 8 Вычисление несобственных интегралов.....	92

ГЛАВА 4. Применение операционного исчисления к решению задач математической физики	95
§ 1 Методы применения операционного исчисления к решению задач математической физики	95
§ 2 Применение операционного исчисления к решению некоторых задач математической физики.....	98
§ 3 Операционные методы в физике	111
ГЛАВА 5. Операционные методы в решении задач электротехники	118
§ 1 Основные сведения из теории преобразования Фурье	118
§ 2 Связь между преобразованиями Лапласа и Фурье	124
§ 5 Понятие о расчете электрических цепей с помощью операционного исчисления.....	126
§ 6 Импульсные функции	137
ЛИТЕРАТУРА.....	141
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	142

ВВЕДЕНИЕ

Операционное исчисление является одной из наиболее важных областей математического анализа, позволяющей в ряде случаев посредством простых правил решать сложные математические задачи. Методы операционного исчисления широко используются в прикладных задачах математики и в решении различных технических задач. Для того, чтобы более точно сформулировать предмет операционного исчисления, напомним основные определения, связанные с понятием функциональной зависимости, которое является одним из фундаментальных понятий математического анализа.

В простейшем случае функциональная зависимость определяется следующим образом: если заданы два множества X и Y , и каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что задано взаимно однозначное отображение f множества X в множество Y . Отображение f множества X в множество Y называется функцией, заданной на множестве X . Это записывается следующим образом:

$$y = f(x),$$

при этом элемент y называется образом элемента x .

К числу важных задач математического анализа относится задача о нахождении первообразной для заданной функции. Действие нахождения первообразной функции по заданной ее производной называется интегрированием этой функции. Утверждение о том, что производная интеграла с постоянным нижним пределом интегрирования и с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна значению подынтегральной функции при значении аргумента, равном верхнему пределу интеграла, является важнейшим фактом курса математического анализа. В силу чего можно считать, что другим, не менее важным примером функциональной зависимости, является неопределенный интеграл переменным верхним пределом:

$$y(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

В данном случае область определения состоит из всех интегрируемых функций $f(x)$, т.е. в этом случае элементами множеств X и Y являются функции, определенные при $a \leq x \leq b$ и подчиненные некоторым дополнительным условиям.

Таким образом, обобщенное определение функциональной зависимости предполагает между двумя произвольных множествами X и Y такую зависимость, при которой каждому значению независимой переменной $x \in X$ по определенному правилу f соответствует единственное значение зависимой переменной. $y \in Y$. В этом случае говорят, что задан оператор, отображающий множество X в множество Y .

В математическом анализе в последнее время широкое распространение получили математические методы интегрального преобразования, играющие весьма важную роль в различных приложениях математики. В основе этих методов лежит идея интегральных преобразований, т.е. имеет место функциональное преобразование вида:

$$F(p) = \int_a^b K(p, x)f(x)dx, \quad (1)$$

Интеграл в формуле (1) называется интегральным преобразованием функции $f(t)$, а функция $F(p)$ — образом (изображением) функции $f(t)$, которую принято называть прообразом (или оригиналом); функция $K(p, x)$ — это ядро интегрального преобразования (1).

В зависимости от того, будет ли: $|a| + |b| < \infty$ или $|a| + |b| = +\infty$ интегральные преобразования делятся на два больших класса — *конечные и бесконечные*. Отметим, что в математическом анализе, как правило, рассматриваются бесконечные интегральные преобразования, а именно такие, где: $b = \infty$, $a = 0$ или $a = -\infty$.

Формулами обращения называются формулы, выражающие для рассматриваемого интегрального преобразования (1) оригинал $f(x)$ через изображение $F(p)$, т.е. прообраз через образ.

Тип интегрального преобразования определяется типом ядра $K(p, x)$ и значениями величин a и b . Для того, чтобы можно было пользоваться рассматриваемым преобразованием, на функцию $f(x)$ в интегральной формуле (1) накладываются дополнительные ограничения, определяемые типом интегрального преобразования (1). Использование различных интегральных преобразований позволяет свести дифференциальные, интегральные и интегродифференциальные уравнения к более простым уравнениям. Одним из важных приложений теории интегральных преобразований является интегральное преобразование Лапласа, называемое также операционным исчислением.

Операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа давно и прочно заняло своё место при рассмотрении динамических задач механики, теории колебаний и газовой динамики. Операционные методы – это один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев посредством простых правил решать сложные математические задачи. В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (образами), получаемыми из данных по определенным правилам, причем действия над оригиналами заменяются более простыми действиями над образами.

В случае интегрального преобразования Лапласа ядро $K(p, x)$ в формуле (1) имеет вид:

$$K(p, x) = e^{-pt},$$

где p - комплексное число, а числа $a = 0, b = \infty$.

Преобразование Лапласа — это интегральное преобразование, связывающее функцию комплексного переменного $F(p)$ (изображение) с функцией $f(t)$ (оригиналом) действительного переменного. Такого рода преобразования широко применяются при решении различных классов дифференциальных уравнений и в других задачах математического анализа. Операционное исчисление является одним из методов математического анализа, позволяющего в ряде случаев сводить исследование дифференциальных операторов и некоторых типов интегральных операторов и решение уравнений, содержащих эти операторы, к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Развитие и систематическое применение операционного исчисления, или так называемое символическое исчисление как показывают исторические сведения, началось с работ О. Хевисайда, который предложил формальные правила обращения с операторами дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и решил ряд прикладных задач, связанных с теорией электромагнитных колебаний. Однако, операционное исчисление в его работах не получило строгого математического обоснования. Впервые строгое математическое обоснование операционного исчисления было дано в дальнейшем, на основе применения основ теории функций комплексного переменного, обеспечивающего относительную простоту изучения свойств интегрального преобразования Лапласа. В этом обосновании операционного исчисления исходят из алгебры действий над

функциями, в которой роль действия умножения выполняет, так называемая свертка.

В основе преобразования Лапласа лежит идея интегральных преобразований, связанная с сопоставлением решению исходной задачи функции $f(t)$ действительного переменного, некоторой аналитической функции $F(p)$ комплексного переменного. Смысл введения изображений заключается в том, что с их помощью удастся упростить решение многих задач. Так, в частности, решение обыкновенных дифференциальных уравнений путем приведения их алгебраическим уравнениям или в общей ситуации уменьшить в дифференциальном уравнении с частными производными число переменных, по которым берутся частные производные, сводя ее решение к более простой задаче. При таком подходе операционное исчисление потеряло свою первоначальную трактовку, связанную с оператором дифференцирования и функциями этого оператора.

Обоснование операционного исчисления в настоящее время следует из общей теории операторов, преобразуемых по Лапласу, в которой широко используются уже известные сведения из теории функций комплексного переменного. Подлинное значение преобразования Лапласа заключается в том, что оно преобразует функцию времени в аналитическую функцию, которая передает свойства времени более совершенным образом.

В основе методов операционного исчисления лежит идея интегрального преобразования Лапласа, представляющих собой своеобразный способ решения различных математических задач, в первую очередь различных типов модельных дифференциальных уравнений, получивших широкое распространение в научных методах исследования.

Суть операционного исчисления состоит в том, что функции $f(t)$, действительного переменного t ставится в соответствие определенная функция $F(p)$, комплексного переменного p . При выполнении некоторых условий, накладываемых на функцию $f(t)$, такое соответствие является взаимно однозначным, то есть каждой функции $f(t)$, удовлетворяющей таким дополнительным условиям соответствует единственная функция $F(p)$, и наоборот, каждой функции $F(p)$, соответствует единственная функция $f(t)$.

При этом оказывается, что операциям дифференцирования и интегрирования функции $f(t)$ соответствуют операции умножения и деления функции $F(p)$, на переменную p . В результате этого

становится возможным свести решение системы дифференциальных уравнений для функций $f(t)$ к решению системы алгебраических уравнений для функции $F(p)$. Затем, по найденным решениям $F(p)$ алгебраической системы, можно найти соответствующие им функции $f(t)$, которые и будут решениями исходной системы дифференциальных уравнений. В результате более сложную задачу отыскания решений дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений сводят к более простой задаче отыскания решений алгебраических уравнений.

С подобным положением приходилось встречаться ранее при изучении теории логарифмов, где операции умножения чисел соответствовала операция сложения их логарифмов, действию делению чисел вычитание их логарифмов и т.д. Иными словами, при выполнении достаточно сложных действий над числами переходят к выполнению более простых действий над логарифмами, выполняя их по определенным правилам действия над логарифмами, соответствующих действиям над числами. Это обстоятельство предопределяет аналогию между схемами практического приложений логарифмов и операционного исчисления.

Схема применения логарифмов реализуется с помощью таблиц оригиналов и их изображений. Таблицы логарифмов составляются, как известно из курса математического анализа, с помощью приближенных вычислений сумм степенных рядов. Таблицы изображений составляются непосредственно на основе их определения интегралом Лапласа, или с помощью основных теорем операционного исчисления, рассматриваемых в первой главе.

Методы операционного исчисления представляют собой своеобразный способ решения различных математических задач. В настоящее время современная теория методов операционного исчисления, тесно связанная с интегральным преобразованием Лапласа, приобрело широкую известность многочисленными приложениями к вопросам математического анализа, математической физике и механики, являясь, например, основным методом решения задач теории переходных процессов в электрических цепях и теории теплопроводности.

Следует отметить, если какая-нибудь прикладная задача математически сформулирована в виде, например, дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, то метод операционного исчисления предполагает вполне

однозначный путь решения, независимо от того, какой физический смысл имеют величины, входящие в это уравнение. Иными словами, прикладные задачи математики, приводящие после математической формулировки к одним и тем же уравнениям, могут быть решены одним и тем же единообразным способом решения.

Для многих теоретических проблем математики и решения разнообразных технических задач операционный метод является фактически математическим фундаментом для рассмотрения динамических процессов в сложных системах. Поэтому, важно для обоснованного применения преобразования Лапласа к решению прикладных задач математики необходимо знать и понимать основные необходимые теоретические сведения и навыков их применения в прикладных задачах математики.

ГЛАВА 1

Теоретические основы операционного исчисления

В основе этих методов операционного исчисления лежит идея интегрального преобразования Лапласа, связанная с сопоставлением функции $f(t)$ действительного переменного, некоторой функции $F(p)$ комплексного переменного. Основную роль в операционном исчислении играет интегральное преобразование Лапласа.

Рассмотрим определения и основные свойства интегрального преобразования Лапласа, которое строится на определенном множестве функций, называемых оригиналами и их образов, называемых функциями –изображениями.

§ 1 Основные понятия и определения преобразования Лапласа

Определение преобразования Лапласа. Построение операционного исчисления в настоящее время базируется на идее интегрального преобразования Лапласа. Обозначим через $f(t)$ функцию действительного переменного t где $0 \leq t < +\infty$, интегрируемую на любом интервале $(0, b)$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ действительного переменного t называется функция $F(p)$ комплексного переменного, определяемая формулой:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (1.1.1)$$

Несобственный интеграл в правой части равенства, зависящий от комплексного параметра $p = s + i\sigma$, называется *интегралом Лапласа*, а определяемая им функция $F(p)$ комплексного переменного p называется *изображением по Лапласу* $f(t)$.

Вполне естественно, что этот несобственный интеграл (1.1.1) не для всякой функции $f(t)$ имеет смысл. Определим, какой класс функций $f(t)$ следует рассматривать, для которых несобственный интеграл (1.1.1) сходится и действительно определяет некоторую функцию $F(p)$.

Будем предполагать, что функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1. на любом конечном интервале (a, b) положительной полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.: ограничена; либо непрерывна, либо имеет конечное число точек разрыва первого рода; имеет конечное число точек экстремума;

2. функция $f(t)$ тождественно равна нулю при отрицательных значениях аргумента:

$$f(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0. \quad (1.1.2)$$

Так как в интеграле Лапласа значения функции $f(t)$ при $t < 0$ вообще не участвуют, то не имеет значения, чему они равны. Как будет видно из дальнейшего, учитывая, что при решении многих физических задач переменная t описывает время, то это означает, что рассматриваемый процесс начинается с некоторого момента, который удобнее всего считать, что в момент $t = 0$.

3. при возрастании положительных значениях аргумента t порядок роста абсолютных значений функции $f(t)$ при возрастании аргумента не превосходит порядка роста некоторой показательной функции:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t} \text{ при } t > 0, \quad (1.1.3)$$

где M и S_0 –положительные числа.

Точная нижняя грань тех значений S_0 , для которых имеет место (1.1.3), называется *показателем роста* функции $f(t)$. Отметим, что данное условие обеспечивает сходимость интеграла Лапласа. Очевидно, что условию (1.1.3) удовлетворяют все ограниченные функции.

Любую функцию $f(t)$, удовлетворяющую сформулированным трем условиям, принято называть *начальной функцией* или *оригиналом*, а функцию $F(p)$, определяемую формулой (1.1.1) называют ее *изображением*.

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ принято называть *преобразованием Лапласа*. Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают символами:

$$f(x) \doteq F(p) \text{ или } F(p) \doteq f(x) \text{ или } L[f(t)] \rightarrow f(t).$$

При этом принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения – соответствующими большими буквами.

Иногда в рассмотрение вводят простейшую функцию-оригинал, так называемую единичную функцию $\eta(t)$, удовлетворяющую условию:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

которая называется также функцией Хэвисайда или функцией единичного скачка. График этой функции изображен на (Рис 1).

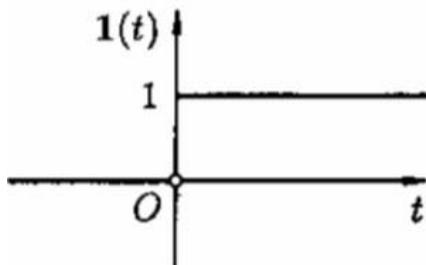


Рис 1.

Очевидно, что, умножив любую функцию $f(t)$, удовлетворяющую первому и третьему условиям, но не удовлетворяющую второму условию, получим в произведении: $f(t)\eta(t)$ функцию, для которой выполняются все три условия. В дальнейшем, для сокращения записи, как правило, пишут $f(t)$ вместо $f(t)\eta(t)$, считая, что все функции продолжены нулем для отрицательных значений t .

Таким образом, операционное исчисление строится на определенном множестве функций, называемых оригиналами и их образов, называемых изображениями.

Интеграл (1.1) является несобственным интегралом, зависящим от переменной p как от параметра. Очевидно, что интеграл (1.1) сходится не для всех значений параметра p .

Действительно, так если функция $f(t)$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к отличному от нуля пределу, а если $Re p < 0$, то интеграл заведомо расходится. Поэтому, следует рассмотреть вопрос о сходимости интеграла (1.1.1), а тем самым установить, каждому ли оригиналу $f(t)$ соответствует изображение. Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. (существование изображения). Для всякого оригинала $f(t)$ существует (определено) в полуплоскости $Re p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста функции $f(t)$, изображение $F(p)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости ($s > s_0$), т. е.

другими словами, изображение $F(p)$ для функции –оригинала $f(t)$ определяется в полуплоскости $\text{Re } p = s > s_0$.

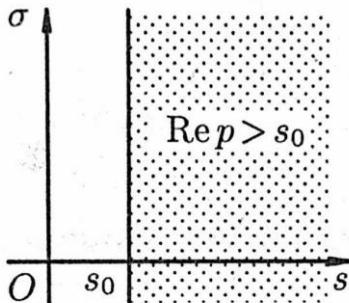


рис.1.1.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p = s + i\sigma$ произвольная точка полуплоскости $\text{Re } p = s > s_0$ (рис.1.1). Учитывая, что: $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, находим:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} |e^{-pt}| dt = \\
 &= M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s - s_0},
 \end{aligned}$$

так как:

$$s - s_0 > 0 \text{ и } |e^{-pt}| = |e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st} \cdot |\cos \sigma t - i \sin \sigma t| = e^{-st},$$

то тогда, получаем, что:

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s - s_0} \tag{1.1.4}$$

Из последнего неравенства видно, что при $\text{Re } p = s > s_0$ выражение $\frac{M}{s-s_0} \rightarrow 0$. Отсюда вытекает абсолютная сходимость интеграла (1.1.1), т.е. изображение $F(p)$ существует и однозначно определено в полуплоскости: $\text{Re } p = s > s_0$.

§ 2 Действительная и мнимая части изображения

Изображение $F(p)$, как функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, допускает выделение действительной и мнимой частей. Учитывая, что $e^{-pt}f(t) = e^{-(a+ib)t}f(t) = e^{-at}f(t)e^{-ibt} = e^{-at}f(t)(\cos bt - i \sin bt)$, будем иметь:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\cos btdt - i \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\sin bt dt \quad (1.2.1)$$

Таким образом, действительная и мнимая части изображения имеют вид:

$$\begin{aligned} U(\alpha\beta) &= \operatorname{Re}F(p) = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\cos btdt \\ V(\alpha\beta) &= \operatorname{Im}F(p) = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\sin bt dt. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Докажем, что если функция $f(t)$ удовлетворяет условию (1) и $a > s_0$, то несобственные интегралы, стоящие в правой части равенства (1.2.2) существуют и сходимость интегралов абсолютная.

По определению оригинала при всех значениях t имеет место:

$$|f(t)| < M e^{s_0 t},$$

кроме того, при любых значениях σ и t :

$$|\cos \sigma t| \leq 1, \quad |\sin \sigma t| \leq 1$$

при всех значениях $s \geq s_0$ имеет место неравенство: $e^{-st} \leq e^{-s_0 t}$.

Поэтому абсолютные значения подынтегральных функций интегралов (1.2.2) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} |e^{-at}f(t)\cos \sigma t| &= e^{-st}|\cos \sigma t||f(t)| < M e^{-(s_1-s_0)t}, \\ |e^{-at}f(t)\sin \sigma t| &= e^{-st}|\sin \sigma t||f(t)| < M e^{-(s_1-s_0)t}. \end{aligned}$$

Если s_1 фиксированное число, большее s_0 , то тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\cos bt dt \right| &\leq \left| \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)\cos bt dt \right| < \\ &< M \int_0^{\infty} e^{-at}e^{s_0 t} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0}, \end{aligned}$$

т.е. имеет место оценка: $|F(p)| < \frac{M}{a-s_0}$,

Непосредственно из полученного после интегрирования результата видно, что интеграл сходится при всех $a > s_0$, а для всех значений $a < s_0$ интеграл Лапласа расходится. Аналогичным образом оценивается и второй интеграл.

Таким образом, интегралы (1.2.1) существуют. Они определяют некоторую функцию комплексного переменного p , которую

обозначим через $F(p)$ т.е. имеет место соотношение, определяемое интегралом Лапласа: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$.

§ 3 Регулярность изображения

Формальное применение операции дифференцирования под знаком интеграла, к интегралам (1.2.4), представляющим действительную и мнимую части, позволяет записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-at} f(t) \cos bt dt = - \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \\ \frac{\partial u}{\partial b} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial b} e^{-at} f(t) \cos bt dt = - \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt; \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-at} f(t) \sin bt dt = - \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt; \\ \frac{\partial v}{\partial b} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial b} e^{-at} f(t) \sin bt dt = - \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Формальное получение выражений частных производных $U(\alpha, b)$ и $V(\alpha, b)$ окажется оправданным, если выполнены условия теоремы о дифференцировании под знаком несобственного интеграла, требующие сходимости интегралов (2.2) и правильной сходимости интегралов (1.3.1).

Первое из этих условий выполнено, так как была установлена даже правильная сходимость интеграла (1.1.1) в области $\text{Re } p = s > s_0$. Покажем, что и второе условие выполнено, т.е. что интегралы (1.3.1) сходятся правильно в области: $\text{Re } p = s > s_0$.

При значении: $s_1 > s_0$ имеет место неравенство:

$$|i f(t)| < M e^{ts_0} f(t) < M_1 e^{s_1 t}, \quad (1.3.2)$$

так как:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{s_1 t}}{e^{ts_0}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{(s_1 - s_0)t}}{t} = \infty,$$

а это означает, что дробь: $\frac{e^{s_1 t}}{e^{ts_0}} > 1$, откуда имеет место соотношение:

$e^{s_1 t} > e^{s_0 t}$, а тогда существует число $M_1 > M$, при котором неравенство (1.3.2) выполняется при всех значениях t . Так как при всех $s > s_1$ имеет место неравенство:

$$e^{-st} \leq e^{-ts_1}, \text{ то если } s_2 > s_1,$$

то абсолютная величина любого интеграла (1.3.1) меньше, чем

$$M_1 \int_0^{+\infty} e^{-(s_2-s_1)t} dt < \infty,$$

и тогда, каждый из интегралов (1.3.1) правильно сходится в области $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Очевидно, что второе условие теоремы о дифференцировании несобственных интегралов под знаком интеграла выполнено. Тем самым установлена правильность выражений (1.3.1) в области $\operatorname{Re} p = s > s_0$, так как: каково бы ни было число $s > s_0$ между числами s и s_0 всегда можно выбрать числа s_1 и s_2 , использованные в предыдущих рассуждениях так, чтобы второе было больше первого.

Нетрудно заметить, что из формул (1.3.1) следует справедливость условий Коши Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

т.е. выполнено требование существования производной изображения $F(p)$ комплексного переменного. Таким образом, доказано, что функция-изображения $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и в этой полуплоскости является функцией аналитической.

§ 4 Изображения некоторых элементарных функций

Пользуясь определением (1.1.1) преобразования Лапласа, найдем изображения некоторых элементарных функций действительного переменного.

1. *Степенная функция:* $f(t) = t^n$, где $n > -1$.

Учитывая, что согласно определению, гамма-функций Эйлера имеет вид:

$$\Gamma(k+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt, \operatorname{Re} k > -1.$$

Тогда, учитывая это, находим:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \left| dt = \frac{1}{p} dS \right| = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-S} S^n dS = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

($\operatorname{Re} p > 0$).

Таким образом, имеет место следующее соотношение:

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

В частном случае, когда $n = 0$, имеем соотношение:

$$1 \doteq \frac{1}{p}$$

2. Единичной функции Хевисайда (рис.1). Пусть

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Решение: По формуле (1.1) при $s = \operatorname{Re} p > 0$ ($s_0 = 0$) находим:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^b = \frac{1}{p}$$

т.е. получено, что $F(p) = \frac{1}{p}$, или, в символической записи: $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$

3. Показательная функция: $f(t) = e^{at}$, где a - любое число.

Решение: Данная функция является оригиналом. По формуле (1.1.1) имеем:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-0(p-a)b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a}, \text{ если } \operatorname{Re}(p-a) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место соотношение:

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a).$$

3. Тригонометрические и гиперболические функции.

Рассмотрим функцию $f(t) = \sin \omega t$. Представим эту функцию, пользуясь формулой Эйлера, в следующем виде:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

Тогда, используя формулу (1.1.1) найдем изображение:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{pt} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(p+i\omega)t} dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right] = \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо символическое соотношение:

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично находим, используя формулы Эйлера, следующие соотношения:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

Находить изображения, пользуясь только определением (1.1.1), представляет не всегда простую математическую задачу. Рассмотрим ряд теорем, устанавливающих основные свойства и правила преобразования Лапласа, составляющих аппарат операционного исчисления, которые непосредственно следуют из свойств интегралов

§ 5 Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема единственности. Оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва функции $f(t)$, т.е. если $F(p) \doteq f_1(t)$, и $F(p) \doteq f_2(t)$, то тогда оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны: $f_1(t) = f_2(t)$.

Иными словами, при соблюдении условия, о том, что за значение оригинала $f(t)$ во всякой точке разрыва первого рода t_0 следует принимать полусумму его предельных значений слева и справа от этой точки:

$$f(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)],$$

то тогда соответствие между оригиналами и изображениями является взаимно однозначным (т.е. всякому оригиналу $f(t)$ соответствует единственное изображение $F(p)$ и обратно).

Теорема единственности играет важную роль в решении прикладных задач. Действительно, если при решении практической задачи каким-то образом определили искомое изображение, а потом по изображению нашли функцию оригинал, то на основании сформулированной теоремы сбудет сделан вывод, что найденная функция есть решение поставленной задачи, и других решений не существует.

2. Теорема линейности. Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, где c_1 и c_2 – любые комплексные постоянные числа, то тогда:

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \doteq c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p), \quad (5,1)$$

Свойство линейности следует из хорошо известного свойства интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)) \cdot e^{-pt} dt = \\ & c_1 \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-pt} dt + c_2 \int_0^{\infty} f_2(t) \cdot e^{-pt} dt = c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p). \end{aligned}$$

Теорема линейности может быть обобщена на любое конечное число слагаемых: так если $F_i(p) \doteq f_i(t)$ и $Cf_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t)$, то:

$$Cf_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t), \text{ где } C_i - \text{const}, \quad (1.5.2)$$

Таким образом, любой линейной комбинации конечного множества оригиналов в качестве изображения отвечает такая же линейная комбинация их изображений.

Следствие 1. При умножении оригинала на постоянный множитель изображение также умножается на этот множитель, т.е. если $f(t) \doteq F(p)$ то следует $Cf(t) \doteq CF(p)$, где $C = \text{const}$.

Следствие 2. Сумме оригиналов в качестве изображений соответствует сумма их изображений, т.е. если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$ то тогда следует, что:

$$f_1(t) + f_2(t) \doteq F_1(p) + F_2(p)$$

3. Теорема подобия. Если $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ – соответствующее ему изображение, то для любого постоянного $\lambda > 0$ символическое соотношение между оригиналом, зависящим от λt и соответствующим изображением, имеет вид:

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.5.3)$$

т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Действительно, пользуясь формулой (1.1.1) для изображения, находим:

$$\begin{aligned} f(\lambda t) &\doteq \int_0^{\infty} f(\lambda t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = [\text{полагая } \lambda t = t_1] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} f(t_1) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t_1} \cdot dt_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t} \cdot dt = 1/\lambda \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что изображение функции с измененным масштабом независимой переменной определяется соотношением (1.5.3).

В качестве применения этой формулы (1.5.3) найдем изображения тригонометрических и гиперболических функций. В силу того, что известны следующие соотношения:

$$\text{sint} \doteq \frac{1}{p^2+1}, \quad \text{cost} \doteq \frac{p}{p^2+1},$$

Непосредственно, применяя теорему подобия, находим следующие соотношения:

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично находим, что для гиперболических функций имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Замечание. Теорема подобия, очевидно, в том случае, когда $\lambda = \frac{1}{b}$, может быть записана в следующем виде:

$$f(bt) \doteq \frac{1}{b} \cdot F\left(\frac{p}{b}\right)$$

3. Теорема запаздывания (или сдвига). Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$ и a – любое комплексное число, то функция $F(p - a)$ является изображением функции $e^{at}f(t)$, т.е. имеет место символическое соотношение:

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq F(p - a), \text{ где } a = \text{const} \quad (1.5.4)$$

Действительно, имеем:

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a),$$

$$(\operatorname{Re}(p - a) > s_0).$$

Таким образом, доказано, что умножение оригинала на функцию e^{at} , тогда в плоскости изображения происходит смещение аргумента на величину p , что и объясняет наименование данной теоремы.

Доказанная теорема, позволяет значительно расширить таблицу соответствия между оригиналами и их изображениями, позволяя по известному соотношению $f(t) \doteq F(p)$ находить изображения функции $e^{at} \cdot f(t)$. В частности, получаем:

$$e^{at} \cdot \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}, \quad e^{at} \cdot \cos \omega t \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}, \quad (1.5.5)$$

$$e^{at} \cdot \operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}, \quad e^{at} \cdot \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}. \quad (1.5.6)$$

Теорема запаздывания является весьма удобным средством при построении изображений кусочно-непрерывных функций-оригиналов. В качестве примера найдем изображение оригинала $f(t)$, заданного следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$$

Функция $f(t)$, на основании определения единичной функции, может быть представлена в виде: $f(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$.

В силу того, что имеет место соотношение: $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$.

Тогда, на основании теоремы запаздывания, находим: $f(t-1) \doteq e^{-p} \frac{1}{p}$.

Откуда, находим:

$$f(t) \doteq \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Значительно реже, чем теорема запаздывания применяется *теорема опережения*: если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \doteq F(p)$, то для любого действительного или комплексного числа $\tau > 0$ имеет место соотношение:

$$f(t + \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad (1.5.7)$$

Для доказательства теоремы, применяя формулу (1.1) и полагая, что $t + \tau = t_1$, получим:

$$\begin{aligned} f(t + r) &\doteq \int_0^{\infty} f(t + \tau) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = \\ &= \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

Таким образом, запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

Теорему запаздывания также называют *теоремой смещения*. Поясним термин «запаздывание». Графики функции $f(t)$ и $f(t + r)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t + r)$ сдвинут на r единиц вправо (рис.1).

Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t + r)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t + r)$, начинается с опозданием на время r . Запаздывание оригинала на время r соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

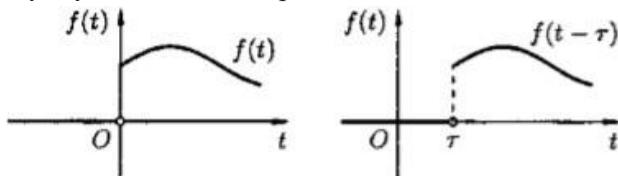


рис. 1.

Так, например, единичная функция вида:

$$\eta(t-r) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq r \\ 0 & \text{при } t < r \end{cases}$$

называемая *обобщенной единичной функцией* (рис.2).

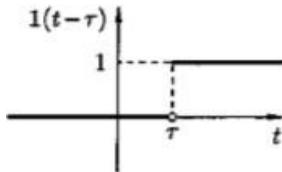


рис.2.

Так как: $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ то $\eta(t+r) \doteq \frac{1}{p} \cdot e^{-pr}$, то запаздывающую функцию:

$$g(t) = \begin{cases} f(t-r), & \text{при } t \geq r, \\ 0, & \text{при } t < r \end{cases}$$

можно записать следующим образом:

$$g(t) = f(t-r) \cdot \eta(t-r).$$

Доказанная теорема широко используется для нахождения изображений оригиналов, описывающих импульсные процессы, а также при отыскании изображения функции, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

§ 6 Дифференцирование и интегрирование оригинала

Для получения большего числа новых изображений оказывается удобным рассматривать оригиналы и изображения, зависящие от параметра. Пусть функция $f(t, x)$ является оригиналом и ей соответствует изображение:

$$F(p, x) = \int_0^{\infty} f(t, x) e^{-pt} dt.$$

Будем предполагать, что выполнены все условия, при которых несобственный интеграл, рассматриваемый как функция параметра x , можно дифференцировать под знаком интеграла, и тогда:

$$\frac{\partial F(p, x)}{\partial x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} e^{-pt} dt.$$

Указанное правило дифференцирования интеграла по параметру позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема о дифференцировании по параметру. Если при любом значении x оригиналу $f(t, x)$ соответствует изображение $F(p, x)$ то:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \circ \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Покажем на конкретном примере как применяется эта теорема. Известно, что:

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-\alpha}, \quad \text{где } \alpha \text{ - параметр.}$$

Дифференцируя левую и правую части по параметру α получим:

$$t e^{at} \doteq \frac{1}{(p-\alpha)^2}.$$

Повторяя дифференцирование n - раз, найдем:

$$t^n e^{at} \doteq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},$$

где n целое положительное число.

Рассмотрим теперь наиболее важные свойства преобразования Лапласа, связанные с действиями дифференцирования и интегрирования оригинала.

1. Теорема о дифференцировании оригинала. Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и если производная $f'(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 , то из $f(t) \doteq F(p)$ следует:

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(+0), \quad \operatorname{Re} p > s_0, \quad (1.6.1)$$

где $f(0)$ есть правое предельное значение, то есть: $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

В самом деле, по определению изображения, предполагая $\operatorname{Re} p > s_0$, при $n = 1$, применяя формулу интегрирования по частям, находим:

$$\begin{aligned} f'(t) \circ \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left[\begin{array}{l} u = e^{-pt} \quad du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt \quad v = f(t) \end{array} \right] = \\ &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Итак, доказано, что имеет место соотношение (6.1), в соответствии с которым: дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения и вычитанию значения $f(0)$. Правило дифференцирования оригинала распространяется и на старшие производные.

Обобщение. Если функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$ и если $f^{(n)}(t)$ является оригиналом и

при этом $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ тоже являются оригиналами, то из соотношения $f(t) \doteq F(p) - -f(0)$ следует:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (1.6.2)$$

при $Re p > s_0$,

Соотношение (1.6.2) получается из свойства (6.1) по методу математической индукции. Утверждение, в силу (1.6.1), справедливо при $n = 1$. Пусть утверждение справедливо для $(n - 1)$, т.е. при $Re p > s_0$ имеет место:

$$f^{(n-1)}(t) \doteq p^{n-1} \cdot F(p) - p^{n-2} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-2)}(0).$$

Отсюда, по свойству (6.1) получаем, что:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) \doteq p [p^{n-1} \cdot F(p) - p^{n-2} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-2)}(0)] - f^{(n-1)}(+0) = \\ = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Правила дифференцирования оригинала приобретают особенно простой частный случай при нулевых начальных условиях, так как $f(t) = 0$ при $t < 0$ по определению оригинала, а в силу определения правое предельное значение должно быть равно левому. В случае, нулевых начальных условий:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \dots, \quad f^{(n-1)}(0) = 0$$

формулы дифференцирования оригинала приобретают достаточно простой вид:

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p); \quad f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p), \dots, \dots, \dots, p^n \cdot F(p), \dots, \dots$$

т.е. дифференцированию оригинала соответствует умножение на p^n его изображения.

Правило дифференцирования оригинала является особо важным свойством преобразования Лапласа, в значительной мере обеспечивающим его применение для многочисленных приложений. В частности, оно широко используется вместе со свойством линейности при решении дифференциальных уравнений.

2. Теорема об интегрировании оригинала. Если функция $f(t)$ является оригиналом, и если: $f(t) \doteq F(p)$, то интеграл $\int_0^t f(u) du$ также является оригиналом, и тогда:

$$\int_0^t f(u) du \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Убедимся прежде всего, что интеграл от оригинала $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ также является оригиналом. Очевидно, что два условия для функции-оригинала $\varphi(t)$ преобразования Лапласа выполняются: при $t < 0$, функция $\varphi(t) \equiv 0$; интеграл от кусочно-

монотонной и кусочно-непрерывной функции сам будет функцией кусочно-монотонной и непрерывной. Остается доказать лишь выполнение условия третьего условия. Нетрудно заметить, что из оценки: $|f(t)| < Me^{-\sigma_0 t}$ следует, что:

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq \int_0^t |f(u)| du \leq M \int_0^t e^{\sigma_0 u} du = \frac{M}{\sigma_0} [e^{\sigma_0 t} - 1].$$

Отсюда находим, что: при $\sigma_0 > 0$ модуль функции: $|\varphi(t)| < \frac{M}{\sigma_0} e^{\sigma_0 t}$; при $\sigma_0 < 0$ модуль функции $|\varphi(t)| < \frac{M}{|\sigma_0|}$. (если $\sigma_0 = 0$, заменяем его большим числом и используем предыдущую оценку).

Полученные оценки показывают, что высказанное утверждение справедливо: интеграл от оригинала также является оригиналом.

Действительно, пусть

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt \text{ и } G(p) \doteq g(t).$$

Тогда, по свойству (6.1) имеем:

$$\varphi'(t) \doteq p \cdot G(p).$$

Так как: $\varphi'(t) = f(t)$ и $f(t) \doteq F(p)$, то тогда, в силу единственности изображения: $p \cdot G(p) \doteq F(p)$. Откуда

$$\varphi = \frac{F(p)}{p},$$

т.е. интегрирование оригинала $f(t)$ в пределах от 0 до t сводится к делению его изображения $F(p)$ на p .

Приведенные теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала показывают, что более сложным действиям над оригиналами (в данном случае дифференцированию и интегрированию) соответствуют более простые действия над их изображениями.

§ 7 Дифференцирование и интегрирование изображения

1. Теорема о дифференцировании изображения. Если $F(p)$ изображение оригинала $f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t), n = 1, 2, \dots$$

т.е. дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на: $(-t)$.

Согласно теореме существования изображения, выясняя свойства изображения, было установлено, что изображение является аналитической функцией комплексного аргумента s в полуплоскости $\text{Re } p = S > s_0$ и что в этой полуплоскости дифференцирование изображения можно выполнять под знаком интеграла Лапласа. Поэтому она имеет в этой полуплоскости производные всех порядков.

Дифференцируя изображение по параметру p , из равенства:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{следует, что:}$$

$$\begin{aligned} F'(p) &= \left(\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{\infty} (f(t) \cdot e^{-pt})'_p dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (-t \cdot f(t)) \cdot e^{-pt} dt \doteq -t \cdot f(t), \end{aligned}$$

т.е. получено, что имеет место соотношение:

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t). \quad (1.7.1)$$

Правило дифференцирования изображения распространяется и на старшие производные.

Обобщение. Если $f(t) \doteq F(p)$, то имеет место соотношение:

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

Доказательство этого утверждения следует из свойства (1.7.1). Нетрудно заметить, что в соответствии с методом математической индукции, утверждение, в силу формулы (1.7.1), справедливо при $n = 1$. Пусть утверждение справедливо и при $(n - 1)$, то тогда:

$$F^{(n-1)}(p) \doteq (-1)^{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot f(t).$$

Затем, применяя свойство (1.7.1), находим:

$$F^{(n)}(p) \doteq (F^{(n-1)}(p))' = (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

Таким образом, доказано, что n -ая производная изображения равна произведению оригинала на: $(-t)^n$.

В качестве иллюстрации этого свойства изображения найдем следующие соотношения.

1. Как известно, что $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ поэтому, в силу свойства дифференцирования изображения, имеем: $-t \cdot 1 \doteq -\frac{1}{p^2}$ т.е. имеет место соотношение:

$$t \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Продолжая дифференцирование, получим следующее соотношение:

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

С учетом этого и свойства смещения получаем соотношение вида:

$$e^{at} \cdot t^n \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

2. Согласно формуле: $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Следовательно, имеет место:

$$\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) \circ -t.$$

Откуда находим:

$$-\frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \doteq -t \sin \omega t, \quad \text{или} \quad t \sin \omega t \doteq \frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (1.7.2)$$

Аналогично, используя известные формулы для $\cos \omega t$, $\text{sh } \omega t$, $\text{ch } \omega t$ находим:

$$t \cos \omega t \circ \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \text{sh} \omega t \circ \frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}, \quad t \text{ch} \omega t \circ \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}. \quad (1.7.3)$$

Затем, с учетом свойства смещения и формул (1.7.2) и (1.7.3), получаем:

$$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t \doteq \frac{2\omega(p-a)}{\frac{((p-a)^2 + \omega^2)^2}{(p-a)^2 - \omega^2}}, \quad e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t \circ \frac{((p-a)^2 + \omega^2)^2}{((p-a)^2 + \omega^2)^2} \quad (1.7.4)$$

4. Теорема интегрирования изображения. Если

интеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ сходится, то

$$\int_p^\infty F(p) dp \doteq \frac{f(t)}{t},$$

т.е. интегрирование изображения $F(p)$ в пределах от p до $+\infty$ соответствует делению оригинала на t .

Действительно, согласно определению, имеем:

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right) dp.$$

полагая, что путь интегрирования от точки p до ∞ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, получим оценку сверху модуля внутреннего интеграла

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt} dt| \leq A \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt$$

из которой ясна его равномерная сходимость относительно p . Поэтому можно изменить порядок интегрирования в интеграле и получить:

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_p^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right) dp = \int_0^{\infty} \left(\int_p^{\infty} e^{-pt} dp \right) f(t) dt =$$

$$\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{t} e^{-pt} \Big|_p^{\infty} \right) f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Итак доказано, что если несобственный интеграл $\int_p^{\infty} F(p) dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$.

С помощью теоремы интегрирования изображения часто вычисляются некоторые несобственные интегралы. Пусть $f(t) \doteq F(p)$, и пусть сходится несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp,$$

где интеграл справа можно вычислить по положительной полуоси.

В качестве применения данной теоремы рассмотрим интегрирование изображения функции: $\frac{\sin t}{t}$. Как, известно, $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, тогда находим:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

Затем, применяя свойство интегрирования изображения, получаем:

$$\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

§ 8 Применение основных теорем операционного исчисления к отысканию изображений некоторых не элементарных функций

Очень часто теоремы интегрирования оригинала и изображения позволяют найти изображения функций, определяемых интегралами от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть требуется найти изображение функции

$$F(t) = \int_0^t \frac{e^{\tau-1}}{\tau} d\tau.$$

Прежде всего найдем изображение $e^{\tau} - 1$. Это изображение равно $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$.

В силу того, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ функция $\frac{e^t - 1}{t}$ является оригиналом и для отыскания ее изображения следует применить теорему интегрирования изображения:

$$\frac{e^t - 1}{t} = \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) ds = \left\{ \ln \frac{s-1}{s} \right\} \Big|_s^{\infty} = -\ln \left(1 - \frac{1}{s} \right).$$

Для отыскания изображения $\int_0^t \frac{e^{\tau-1}}{\tau} d\tau$ остается применить теорему интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{e^{\tau} - 1}{\tau} d\tau \doteq -\frac{1}{s} \ln \left(1 - \frac{1}{s} \right) \quad (1.8.1)$$

2. Найдем изображение функции $F(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Так как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, то функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом.

Поступая так же, как в первом примере, находим последовательно

Вначале находим изображение $\sin t \doteq \frac{1}{s^2+1}$. Затем, применяя теорему интегрирования изображения, находим:

$$\frac{\sin t}{t} = \int_s^{\infty} \frac{ds}{s^2+1} = -\int_s^{\infty} \frac{d(\frac{1}{s})}{1+(\frac{1}{s})^2} = -\arctg \frac{1}{s} \Big|_s^{\infty} = \arctg \frac{1}{s} \quad (1.8.2)$$

Итак, имеет место соотношение

$$\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{s} \arctg \frac{1}{s}.$$

3. Найдем изображение функции $F(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau$.

Находим последовательно $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \doteq \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right];$

так как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = 1$, то можно применять два раза

поряд теорему интегрирования изображения:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t}{t^2} &= \frac{1}{2} \int_s^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right] ds = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}} \Big|_s^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s}, \\ \frac{\sin^2 t}{t^2} &= \frac{1}{2} \int_s^\infty \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} ds = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} \Big|_s^\infty - \frac{1}{2} \int_s^\infty s \left\{ \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{1}{s} \right\} ds = \\ &= \frac{1}{2} s \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} \Big|_s^\infty + 2 \int_s^\infty \frac{ds}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} s \frac{\ln \sqrt{s^2 + 4}}{s} \Big|_s^\infty - \int_s^\infty \frac{d(\frac{2}{s})}{1 + (\frac{2}{s})^2} = \\ &= \left[\frac{1}{2} s \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} - \operatorname{arctg} \frac{2}{s} \right] \Big|_s^\infty = \operatorname{arctg} \frac{2}{s} - \frac{s}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s}. \end{aligned}$$

так как $\lim_{s \rightarrow 0} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} = 0$ и $\lim_{s \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{2}{s} = 0$.

Остается применить теорему интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau \doteq \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{2}{s} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} \quad (1.8.3)$$

1. Изображение интеграла вероятностей – функции

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau.$$

Для этого предварительно найдем изображение функции: $e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Имеем

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \doteq \int_0^\infty e^{-st - \frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^\infty e^{-(s+t)^2} dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной, полагая $s + t = \tau$; пределы интегрирования по τ станут s и ∞

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau,$$

Но интеграл

$$\int_0^s e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(s);$$

$$\int_s^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \int_s^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau - \int_0^s e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(s)$$

(здесь $\Phi(s)$ – интеграл вероятностей от аргумента s).

Итак, находим

$$e^{-\frac{\tau^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{s^2}{2}} \{1 - \Phi(s)\} \quad (1.8.4)$$

Отсюда, умножая на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и применяя теорему интегрирования оригинала, находим изображение интеграла вероятностей

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \doteq \Phi(t) = \frac{1}{s} e^{\frac{s^2}{2}} \{1 - \Phi(s)\} \quad (1.8.5)$$

4. Пусть требуется найти изображение функции

$$F(t) = \int_0^t \frac{e^{\tau-1}}{\tau} d\tau.$$

Прежде всего найдем изображение $e^t - 1$. Это изображение равно

$$\frac{1}{s-1} \text{ о } \frac{1}{s-1}$$

В силу того, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, функция $\frac{e^t - 1}{t}$ является оригиналом

и для отыскания ее изображения следует применить теорему интегрирования изображения:

$$\frac{e^t - 1}{t} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) ds = \left\{ \ln \frac{s-1}{s} \right\} \Big|_s^\infty = - \ln \left(1 - \frac{1}{s} \right).$$

Для отыскания изображения $\int_0^t \frac{e^{\tau-1}}{\tau} d\tau$ остается применить теорему интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{e^{\tau-1}}{\tau} d\tau \doteq - \frac{1}{s} \ln \left(1 - \frac{1}{s} \right) \quad (1.8.6)$$

5. Найдем изображение функции $F(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Так как

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

то функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом. Поступая так же, как в первом примере, находим последовательно, $\sin t \doteq \frac{1}{s^2+1}$, тогда

$$\frac{\sin t}{t} = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = - \int_s^\infty \frac{d(\frac{1}{s})}{1+(\frac{1}{s})^2} = - \operatorname{arctg} \frac{1}{s} \Big|_s^\infty = \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$

$$\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$
(1.8.7)

6. Найдем изображение функции $F(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau$.

Находим последовательно $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \doteq \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right];$

так как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = 1,$ то можно применять два раза

поряд теорему интегрирования изображения:

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{2} \int_s^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right] ds = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}} \Big|_s^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \quad (\text{так как } \lim_{s \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = 0);$$

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{2} \int_s^\infty \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} ds = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \Big|_s^\infty - \frac{1}{2} \int_s^\infty s \left\{ \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s} \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} s \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \Big|_s^\infty + 2 \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+4} = \frac{1}{2} s \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \Big|_s^\infty - \int_s^\infty \frac{d(\frac{2}{s})}{1+(\frac{2}{s})^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} s \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} - \operatorname{arctg} \frac{2}{s} \right]_s^\infty = \operatorname{arctg} \frac{2}{s} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s}.$$

(так как $\lim_{s \rightarrow \infty} s \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = 0$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{s} = 0$).

Остается применить теорему интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau \doteq \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{2}{s} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$
(1.8.8)

7. Изображения бесселевых функций

Функция вида

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$
(1.8.9)

называется бесселевой функцией 1-го рода с индексом ν .

Эта функция является одним из решений уравнений Бесселя:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\nu+k}$$

В случае целого неотрицательного индекса ($v \geq 0$) формула (1.8.11) принимает вид:

$$\frac{I_v(t)}{t^v} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\binom{t}{2}^{2k}}{k! \Gamma(v+k+1)},$$

которая будет целой функцией экспоненциального типа.

В самом деле, модуль коэффициента при t^{2k} в правой части равен

$$\frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(v+k+1)} = \frac{1}{2^{2k} k! (v+k)(v+k-1) \dots (v+1) \Gamma(v+1)} \leq \frac{1}{\Gamma(v+1) 2^{2k} (k!)^2};$$

где $2^{2k} (k!)^2 \geq (2k)!$

Это неравенство проверяется методом индукции: при $k = 0$ оно верно; если оно верно для некоторого k , то переход к $(k+1)$ сводится к умножению левой и правой частей соответственно на

$$4(k+1)^2 \text{ и } (2k+1)(2k+2),$$

но $4(k+1)^2 > (2k+1)(2k+2)$, следовательно, неравенство будет верно и для $k+1$.] Таким образом, при всех комплексных t имеет место:

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\binom{t}{2}^{2k}}{k! \Gamma(v+k+1)} \right| \leq \frac{1}{\Gamma(v+1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|t|^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{e^{|t|}}{\Gamma(v+1)}$$

и, следовательно, $\frac{I_v(t)}{t^v}$ – целая функция экспоненциального типа.

В силу того, что изображение функции экспоненциального типа определяется по формуле:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! A_k}{p^{k+1}},$$

то тогда находим:

$$\frac{I_v(t)}{t^v} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k! \Gamma(v+k+1) p^{2k+1}}, \quad (1.8.10)$$

где v – любое действительное неотрицательное число.

При $v = 0$ отсюда находим:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 p^{2k+1}},$$

но биномиальное разложение показывает, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}} = \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 p^{2k+1}};$$

следовательно,

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad (1.8.11)$$

Покажем методом индукции, что доказанная формула (1.9.12) также верна для любого n , т.е. имеет место формула:

$$J_n(t) \doteq \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad (\text{при } n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.8.12)$$

Применяя метод математической индукции, делаем вывод, что формула верна при $n = 0$, что следует из (1.8.12). Далее в силу свойства дифференцирования изображения находим:

$$J_1(t) = -J_0'(t) \doteq -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

и, следовательно, при $n = 1$ доказываемая формула также верна. Пусть теперь эта формула верна для всех неотрицательных целых индексов, меньших n (где $n \geq 2$); тогда, учитывая, что $J_{n-1}(0) = 0$, находим:

$$\begin{aligned} J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J_{n-1}'(t) &\doteq \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-2}}{\sqrt{p^2 + 1}} - \frac{2p(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-1}}{\sqrt{p^2 + 1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (1.8.11) доказана.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Эта функция регулярна в бесконечно удаленной точке и $F(\infty) = 0$. Следовательно, она является изображением некоторой целой функции экспоненциального типа $f(t)$. Так как:

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{n+k+1}},$$

то в силу (1.9.11) имеем:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} t^{n+k},$$

но с учетом того, что:

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{n+k}{2}}}{k!(n+k)!},$$

следовательно,

$$f(t) = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}).$$

Таким образом, установлено, что:

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и, в частности, при $n = 0$

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

8. Изображение периодического оригинала.

Пусть требуется найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом $2l$: $f(t+2l) = f(t)$, при $t > 0$.

Введем вспомогательную функцию $f_0(t)$, определенную следующим образом: на полу отрезке $[0, 2l]$, $f_0(t) = f(t)$. Вне этого полу отрезка $f_0(t) \equiv 0$ (рис. 9).

Ее изображением будет служить функция $\overline{f_0(s)}$, определяемая следующим образом:

$$\overline{f_0(t)} \doteq \overline{f_0(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_0(t) dt = \int_0^{2l} e^{-st} f(t) dt \quad (1.8.13)$$

(так как при $t > 2l$, $f_0(t) \equiv 0$, а при $0 < t < 2l$, $f_0(t) \equiv f(t)$).

Но функцию $f(t)$ в свою очередь можно выразить через $f_0(t)$ следующим образом (напомним, что $f(t)$ оригинал и, как всякий оригинал, равен нулю при $t < 0$):

$$f(t) = f_0(t) + f(t-2l) \quad (1.8.14)$$

(здесь $f(t-2l)$ – та же периодическая функция, но с запаздыванием на один период, равная нулю при $t < 2l$). Переходя в равенстве (9.7) к изображениям и используя теорему запаздывания, получаем

$$f(s) = \overline{f_0(s)} + e^{-2ls} f(s).$$

Отсюда находим: $\overline{f(s)} = \frac{\overline{f_0(s)}}{1 - e^{-2ls}}$.

Таким образом, изображение периодической функции $f(t)$ с периодом $2l$ определяется следующим образом:

$$f(t) \doteq f(s) = \frac{f_0(s)}{1 - e^{-2ls}} \quad \text{где } f_0(s) = \int_0^{2l} e^{-st} f(t) dt \quad (1.8.15)$$

В качестве примера применения этой формулы найдем изображение функции $|\sin t|$. Так как период функции $|\sin t|$ равен π ,

применяя вторую из формул (1.9.7), находим $f_0(s)$

$$f_0(s) = \int_0^{\pi} e^{-st} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt,$$

поскольку на отрезке $[0, \pi]$ $\sin t \geq 0$ и поэтому $|\sin t| = \sin t$. Но, так как

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) + C;$$

поэтому $\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-s \sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2};$

таким образом $f_0(s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}.$

Отсюда по первой формуле (1.9.7) находим окончательно

$$|\sin t| = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2} = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{1}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi s}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} \quad (1.8.15)$$

поскольку $\frac{1 - e^{-\pi s}}{1 + e^{-\pi s}} = \frac{e^{\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}} = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} = \frac{\pi s}{2} \operatorname{th} \frac{\pi s}{2}.$

5. Изображения логарифма и интегрального логарифма

Очевидно, $\ln t$ есть оригинал с нулевым показателем роста. Пусть $\ln t \doteq F(p).$

Тогда, принимая во внимание свойства изображения и учитывая, что $t \ln t - t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$), находим:

$$t \ln t \doteq -F'(p); \quad t \ln t - t \doteq -F'(p) - \frac{1}{p^2};$$

$$(t \ln t - t)' \doteq -pF'(p) - \frac{1}{p};$$

Учитывая, что $(t \ln t - t)' = \ln t$, тогда находим:

$$-pF'(p) - \frac{1}{p} = F(p),$$

откуда следует:

$$pF'(p) + F(p) = -\frac{1}{p},$$

$$[pF(p)]' = -\frac{1}{p},$$

$$C + pF(p) = -\operatorname{Lnp} + C,$$

$$F(p) = -\frac{\operatorname{Lnp}}{p} - \frac{C}{p}.$$

Полагая $p = 1$, находим:

$$C = -F(1) = - \int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} dt = 0,577 \dots$$

Это число называется постоянной Эйлера. Можно показать, что

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Итак,

$$\ln t \doteq - \frac{\ln p}{p} - \frac{C}{p}, \quad (1.8.16)$$

где C - постоянная Эйлера.

7. Изображение кусочно-аналитического оригинала

Кусочно-аналитическим оригиналом мы будем называть функцию $f(t)$, определенную следующим образом:

1. $f(t) = 0$ при $t < \tau_1$ ($\tau_1 \geq 0$)
2. $f(t) = f_k(t)$ на отрезке $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$
3. $f(t) = 0$ при $t > \tau_{m+1}$

Здесь $k = 1, 2, \dots, m$; функция $f_k(t)$ - аналитическая на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, т.е. может на этом отрезке быть разложена в сходящийся к ней ряд Тэйлора. В частности, эта функция на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ представима рядами

$$f_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_k^{(n)}(\tau_k)}{n!} (t - \tau_k)^n; \quad (1.8.17)$$

$$f_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_k^{(n)}(\tau_{k+1})}{n!} (t - \tau_{k+1})^n; \quad (1.8.18)$$

Число m , в частности, может быть равно бесконечности (т. е. $f(t)$ состоит из бесконечно большого числа «кусков» аналитических функций). В этом случае мы будем предполагать, что при $t > T$ выполняется неравенство

$$|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}.$$

Заметим, что определенная таким образом кусочно-аналитическая функция удовлетворяет всем условиям изображаемости. Для отыскания изображения запишем функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \sum_{j=1}^m [u(t - \tau_j) - u(t - \tau_{j+1})] f_j(t). \quad (1.8.19)$$

Нетрудно убедиться в справедливости этого равенства; в самом деле, на каждом отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ оси $0t$ отличен от нуля только один

член суммы, стоящей в правой части равенства (3; 5; 2), а именно тот, для которого $j=k$: поскольку $\tau_k < t < \tau_{k+1}$,

$$u(t - \tau_k) = 1, u(t - \tau_{k+1}) = 0$$

и соответствующий член суммы обращается в $f_k(t)$:

$$[u(t - \tau_k) - u(t - \tau_{k+1})]f_k(t) \equiv f_k(t).$$

Если $j < k$, то $t > \tau_{j+1} > \tau_j$; поэтому $u(t - \tau_j) = 1$ и $u(t - \tau_{j+1}) = 1$ и соответствующий член суммы (8.22) обращается в нуль. Наконец, если $j > k$, то $t < \tau_j < \tau_{j+1}$, поэтому $u(t - \tau_j) = 0$ и $j(t - \tau_{j+1}) = 0$ и соответствующий член суммы тоже равен нулю.

Таким образом, на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ имеем $f(t) = f_k(t)$. В «узлах» τ_k ($k = 1; 2, \dots$) функция $f(t)$ имеет правые и левые производные любого порядка, причем как сама функция, так и все ее производные в этих узлах претерпевают разрыв непрерывности первого рода. Введем для «скачка» производной $f^{(n)}(t)$ в узле τ_k обозначение

$$\Delta f^{(n)}(\tau_k) = f^{(n)}(\tau_k - 0) = f_{k-1}^{(n)}(\tau_k). \quad (1.8.20)$$

Но так как:

$$f^{(n)}(\tau_k + 0) = f_k^{(n)}(\tau_k); \quad f^{(n)}(\tau_k - 0) = f_{k-1}^{(n)}(\tau_k);$$

(поскольку слева от точки τ_k имеем $f(t) = f_{k-1}(t)$, а справа от нее $f(t) = f_k(t)$).

Поэтому, имеем:

$$\Delta f^{(n)}(\tau_k) = f_k^{(n)}(\tau_k) - f_{k-1}^{(n)}(\tau_k) \quad (1.8.21)$$

Равенство (1.8.22) перепишем в следующем виде:

$$f(t) = \sum_{j=1}^m u(t - \tau_j) - f_j(t) - - \sum_{j=1}^m [u(t - \tau_{j+1})f_j(t) \quad (1.8.22)$$

В первом члене правой части заменим $f_j(t)$ ее разложением (3; 5; 1), во втором члене – ее разложением (1.8.22), заменяя в каждом из них k на j ; найдем

$$f(t) = \sum_{j=1}^m u(t - \tau_j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_j^{(n)}(\tau_j)}{n!} (t - \tau_j)^n - \sum_{j=1}^m u(t - \tau_{j+1}) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{j+1}^{(n)}(\tau_{j+1})}{n!} (t - \tau_{j+1})^n \quad (1.8.23)$$

Учитывая, что слева от точки $t = \tau_1$ и справа от точки $t = \tau_{m+1}$ $f(t) \equiv 0$, положим $f_0(t) \equiv 0$, $f_{m+1}(t) \equiv 0$, и в равенстве (8.26) будем вести

суммирование в первом слагаемом от 1 до $m+1$, а во втором от 0 до m ; в силу принятых соглашений это сумм не изменит.

Кроме того, во втором слагаемом правой части равенства (1.8.26) изменим индекс суммирования, полагая $j = j^* - 1$; тогда суммирование в нем будет вестись не от нуля до m , а от $j^*=1$ до $j^*=m+1$ и равенство (3; 5; 6) можно будет записать в виде

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m+1} u(t - \tau_j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau_j)}{n!} (t - \tau_j)^n - \sum_{j^*=1}^{m+1} u(t - \tau_{j^*}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau_{j^*})}{n!} (t - \tau_{j^*})^n \quad (1.8.24)$$

Отбрасывая звездочку в индексе суммирования второго слагаемого, объединяем обе суммы в одну

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m+1} u(t - \tau_j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau_j) - f^{(n)}(\tau_{j-1})}{n!} (t - \tau_j)^n$$

или в силу формулы (8.24) находим окончательно

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m+1} u(t - \tau_j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f^{(n)}(\tau_j)}{n!} (t - \tau_j)^n = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f^{(n)}(\tau_j) u(t - \tau_j) \frac{(t - \tau_j)^n}{n!} \quad (1.8.25)$$

Представление кусочно-аналитического оригинала в виде (8.28) позволяет сразу найти его изображение, пользуясь теоремой запаздывания и формулой для изображения функций $\frac{t^n}{n!}$

$$f(t) = f(s) = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f^{(n)}(\tau_j)}{s^{n+1}} \cdot e^{-s\tau_j}. \quad (1.8.26)$$

При применении этой формулы следует помнить, что в силу условия $f_0(t) \equiv 0$ для скачков $\Delta f^{(n)}(\tau_j)$ мы будем по формуле (3; 5; 4) иметь

$$\Delta f^{(n)}(\tau_1) = f_1^{(n)}(0) - f_0^{(n)}(0). \quad (1.8.27)$$

Поскольку же $f_{m+1}(t) = 0$, то для скачков $\Delta f^{(n)}(\tau_{m+1})$ получим значения

$$\Delta f^{(n)}(\tau_{m+1}) = f_{m+1}^{(n)}(\tau_{m+1}) - f_m^{(n)}(\tau_{m+1}) \quad (1.8.28)$$

1. Изображение полигональной функции

Полигональной функцией мы будем называть кусочно-аналитическую функцию, для которой все ее «элементы» – функции $f_k(t)$ – линейные функции: $f_k(t) = a_k t + b_k$. Таким образом, график полигональной функции составлен из отрезков прямых (рис. 12). Для скачков функции $f(t)$ в узлах «стыка» введем обозначения

$$\Delta f(\tau_k) = (a_k \tau_k + b_k) - (a_{k-1} \tau_k + b_{k-1}) = \delta_k,$$

$$\Delta f'(\tau_k) = a_k - a_{k-1} = a_k$$

(при этом $\delta_1 = a_1 \tau_1 + b_1$, $a_1 = a_1$, поскольку при $t < \tau f(t) = f_0(t) \equiv 0$).

Поэтому изображение полигональной функции запишется на основании формулы (3; 5; 9) следующим образом:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{\delta_k}{s} + \frac{\alpha_k}{s^2} \right\} e^{-\tau_k s}. \quad (1.8.29)$$

Здесь, как и раньше, принято, что при $t > \tau_{m+1}$ $f_{m+1}(t) \equiv 0$, т.е. график полигональной функции состоит из m отрезков прямых; для скачка в точке $t > \tau_{m+1}$ следует положить поэтому

$$\delta_{m+1} = -(a_m \tau_{m+1} + b_m); \quad \alpha_{m+1} = -a_m.$$

2. Отыскание изображений при помощи рядов

Пусть функция $f(t)$ разлагается в степенной ряд на всей оси ot

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad -\infty \leq t \leq \infty. \quad (1.8.30)$$

Пусть, кроме того, коэффициенты разложения a_n при всех n удовлетворяют условию

$$|a_n| < M \frac{\sigma_0^n}{n!}, \quad (1.8.31)$$

где σ_0 – некоторая положительная постоянная.

Тогда функция, совпадающая с $f(t)$ при $t \geq 0$ и равная нулю при $t < 0$ (мы сохраним для нее то же обозначение $f(t)$), является оригиналом и ее изображение может быть найдено как сумма ряда

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (1.8.32)$$

члены которого являются изображениями соответствующих членов ряда (3; 7; 1)

Докажем это.

Прежде всего, в силу оценки (3; 7; 2) имеем при $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n < M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_0 t)^n}{n!} = M e^{\sigma_0 t}.$$

Эта оценка доказывает, что функция $f(t)$ является оригиналом.

Докажем теперь, что ряд (3; 7; 3) абсолютно сходится при $|s| > \sigma_0$.

Рассмотрим частичную сумму n первых членов ряда модулей членов ряда (3; 7; 3) и используем снова оценку (1.8.33)

$$\sum_{k=0}^{k=n} |a_k| \frac{1}{|s|^{k+1}} \leq M \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sigma_0^k}{|s|^{k+1}} = \frac{M}{|s|} \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{\sigma_0}{|s|}\right)^k.$$

Эта оценка показывает, что ряд (3; 7; 3) сходится при $|s| > \sigma_0$.

Переходя же к пределу при $n \rightarrow \infty$ в операционном соотношении *

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k t^k \doteq \sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{t^k}{k!},$$

находим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = f(s).$$

Пример. Найдем изображение функции Бесселя первого рода с нулевым индексом $J_0(t)$, разложение которой, пригодное для всех значений t , имеет вид

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Условие (3; 7; 2) выполнено; в самом деле $a_{2n-1} = 0$; а для $|a_{2n}|$ имеем оценку

$$|a_{2n}| = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} < \frac{1}{(2n)!}.$$

Итак, $|a_{2n}| < M \frac{\sigma_0^{2n}}{(2n)!}$, где $M=1$ и $\sigma_0 = 1$. Используя доказанную

теорему, находим изображение $J_0(t)$ — функцию $J_0(s)$:

$$f_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(n!)^2 s^{2n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{s^{2n}}.$$

Нетрудно убедиться, что в правой части стоит разложение по степеням $\frac{1}{s}$ функции $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, которое пригодно при $|s| > 1$; в самом деле

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{s^{2n}}.$$

Итак, окончательно приходим к операционному соотношению

$$J_0(t) \doteq f_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Свойства преобразования Лапласа существенно облегчают задачу нахождения изображений для большого числа разнообразных функций, а также задачу отыскания оригиналов по их изображениям.

Непосредственное вычисление изображений различных часто встречающихся функций-оригиналов и применение более сложных приемов дают возможность составить приводимую в приложении таблицу, с помощью которой осуществляется широко используемых в приложениях переход от функций-оригиналов к их изображениям обратный переход от изображений к оригиналам.

ГЛАВА 2

Обращение преобразования Лапласа

§ 1 Обратное преобразование Лапласа

При описании схемы применения операционного исчисления было отмечено, что заключительный этап этой схемы состоит в нахождении оригинала по полученному изображению решения задачи. Эту операцию называют *обратным преобразованием Лапласа* и символически записывают следующим образом:

$$f(t) = L^{-1}F(p).$$

Выведем так называемую формулу обращения преобразования Лапласа, являющуюся универсальным средством восстановления оригинала по его изображению. Предварительно докажем нужную для этого *вспомогательную теорему*, родственную интегральной формуле Коши.

Теорема. Если функция $g(\rho)$ регулярна в замкнутой полуплоскости $Re \rho \geq c$ и $g(\rho) \rightarrow 0$, когда $\rho \rightarrow \infty$, оставаясь в этой замкнутой полуплоскости, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{g(z)}{\rho - z} dz = g(\rho), \quad (Re \rho > c), \quad (2.1.1)$$

где интеграл рассматривается в смысле главного значения.

Рассматривая в комплексной плоскости z замкнутый контур Γ_ρ , состоящий из дуги C_ρ , окружности радиуса ρ с центром в фиксированной точке ρ , $Re \rho > c$, и стягивающего ее отрезка прямой $Re z = c$ (рис. 3), проходимый в отрицательном направлении, по свойству интеграла от функции комплексного переменного, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c+i(\sigma-\omega)}^{c+i(\sigma+\omega)} \frac{g(z)}{\rho - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{g(z)}{\rho - z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{g(z)}{\rho - z} dz. \quad (2.1.2)$$

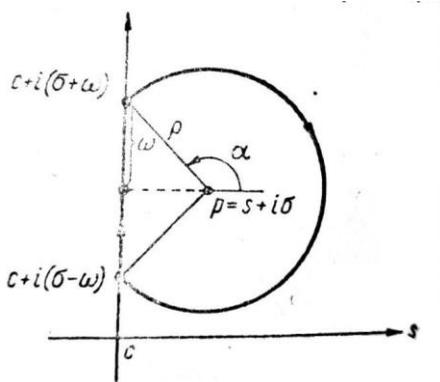


рис. 3

Так как по условию теоремы $g(\rho)$ регулярна внутри контура Γ_ρ и на нем, то по интегральной формуле Коши будем, независимо от величины ρ , иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{g(z)}{\rho - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho^+} \frac{g(z)}{z - \rho} dz = g(p), \quad (2.1.3)$$

где Γ_ρ^+ - контур Γ_ρ , проходимый в положительном направлении.

Для точек на дуге C_ρ :

$$z = p + \rho e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leq \alpha, \quad \text{а потому } |z - p| = \rho.$$

Учитывая, что длина дуги окружности C_ρ меньше $2\pi\rho$, по теореме об оценке модуля интеграла будем иметь:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{g(z)}{p - z} dz \right| < \frac{\max_{|\varphi| \leq \alpha} |g(p + \rho e^{i\varphi})|}{2\pi} \cdot 2\pi\rho = \max |g(p + \rho e^{i\varphi})| \rightarrow 0 \quad (2.1.4)$$

при ρ (а следовательно, и ω) $\rightarrow \infty$, так как по условию $g(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$ (если $\operatorname{Re} z \geq c$).

Таким образом, при $\omega \rightarrow \infty$ второе слагаемое в правой части (2.1.2) стремится к нулю, а первое (независимо от ω) равно $g(p)$, поэтому имеем:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i(\sigma-\omega)}^{c+i(\sigma+\omega)} \frac{g(z)}{p - z} dz = g(p), \quad \operatorname{Re} p > c. \quad (2.1.5)$$

§ 2 Теорема обращения

Основной целью данного параграфа является изложение общего метода построения оригинала по данному изображению. При решении задач операционным методом на заключительном этапе вычислений по найденному изображению искомой функции требуется найти эту функцию.

Обратную операцию нахождения оригинала по известному изображению называют обратным преобразованием Лапласа, которое основано на теореме обращения.

Из определения изображения, изучая символическое соотношение: $f(t) \doteq F(p)$ следовало, что каждый оригинал имеет единственное изображение, определяемое по формуле: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$. При этом, если $|f(t)| \leq M e^{-pt}$, то несобственный интеграл сходится при $Re p > s_0$. Обратное утверждение, однако, неверно.

В самом деле, два оригинала, имеющие различные значения в одной точке (т. е. два различных оригинала), будут иметь одно и то же изображение, так как изменение в одной точке подынтегральной функции в определенном интервале Лапласа, определяющем изображение, не изменяет значения интеграла.

Если в некоторой полуплоскости $Re p > s_0$ функция $g(p)$ является изображением оригиналов $f_1(t)$ $f_2(t)$, то это означает, что:

$$Lf_1(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt = g(p) \quad \text{при } Re p > S_0$$
$$Lf_2(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt = g(p) \quad \text{при } Re p > S_0$$

Линейная комбинация (в результате их вычитания) этих равенств позволяет записать;

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} [f_1(t) - f_2(t)] dt = 0.$$

Можно показать, что обращение последнего интеграла в нуль влечет равенство:

$$f_1(t) - f_2(t) = 0, \text{ или } f_1(t) = f_2(t)$$

во всех точках, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны.

Таким образом, оригиналы (имеющие в некоторой полуплоскости одно и то же изображение $g(p)$) равны во всех точках, где они непрерывны.

Рассмотрим так называемую теорему обращения преобразования Лапласа, являющуюся универсальным средством восстановления оригинала по его изображению.

Теорема обращения. Если функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 , а функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$ служит ее изображением, то в любой точке (t) , где оригинал $f(t)$ является непрерывным, имеет место формула, по которой может быть найден оригинал:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{pt} g(p) dp \quad (2.2.1)$$

где интегрирование осуществляется по любой бесконечной прямой $\text{Re } p = S > S_0$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа от функции $f(t)$.

Формула (2.2.1) носит название теоремы обращения, так как по этой формуле осуществляется обратное преобразование по отношению к преобразованию Лапласа по формуле: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) \cdot e^{-pt} dt$. Интеграл в правой части формулы (2.2.1) называют интегралом Римана-Меллина.

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования следует понимать в смысле главного значения, т.е. в виде прямой параллельной мнимой оси и понимается в смысле главного значения, где s_0 показатель роста функции $f(t)$:

$$\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Доказательство. Путь интегрирования в интеграле (2.2.1), зависящем от параметра t и обозначаемом в дальнейшем $\varphi(t)$ есть прямая $\text{Re } z = c$ в комплексной плоскости $z = x + iy$ проходима в направлении роста $\text{Im } z = y$. Вдоль этого пути y изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а $dz = d(x + iy) = i dy$, поэтому имеем:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{zt} g(z) dz = \frac{1}{2\pi} e^{ct} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} g(c + iy) dy \quad (2.2.2)$$

Так как модуль интеграла не более интеграла модуля и $|e^{iyt}| = 1$, то:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} g(c + iy) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(c + iy)| dy < \infty, \quad (2.2.3)$$

следовательно, интеграл: $\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{lyt} g(c + iy) dy$ сходится правильно на интервале $-\infty < t < \infty$, а потому функция $\psi(t)$ непрерывна на этом интервале. Из равенства (2.2.2), следует что функция $\varphi(t)$ непрерывна, как произведение непрерывных функций e^{ct} и $\psi(t)$.

Найдем изображение функции $\varphi(t)$, являющейся (как можно было бы показать) оригиналом. Для этого рассмотрим интеграл Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-pt} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} g(z) dz \right\} dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-(p-z)t} g(z) dz \right\} dt \quad (2.2.4)$$

Учитывая сказанное в начале доказательства о пути интегрирования внутреннего интеграла, будем иметь:

$$\left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-(p-z)t} g(z) dz \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(s-c)+i(\sigma-y)]t} g(c + iy) dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-c)t} |g(c + iy)| dy = e^{-(s-c)t} \int_{-\infty}^{\infty} |g(c + iy)| dy \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(c + iy)| dy < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Следовательно, интеграл $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ сходится правильно на отрезке $[0, T]$, а потому в двукратном интеграле из равенств (2.2.4) может быть изменен порядок интегрирования, что дает:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(z) \left\{ \int_0^T e^{-(p-z)t} dt \right\} dz =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(z)}{p-z} (1 - e^{-(p-z)T}) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(z)}{p-z} dz - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(z)}{p-z} e^{-(p-z)T} dz =$$

$$= g(p) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(z)}{p-z} e^{-(p-z)T} dz. \quad (*2.2.5)$$

Покажем теперь, что последний предел равен нулю. На прямой интегрирования $Re z = c$ имеем:

$$\frac{1}{|p - z|} = \frac{|z|}{|p - z|} \cdot \frac{1}{|z|} = \sqrt{\frac{c^2 + y^2}{(s - c)^2 + (\sigma - y)^2}} \cdot \frac{1}{|z|}$$

Функция $F(y) = \frac{c^{2+y^2}}{(s-c)^2 + (\sigma-y)^2}$ непрерывна на интервале $-\infty < y < \infty$,

так как знаменатель не обращается в нуль ни при каком значении y .

Кроме того, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(y) = 1$, что легко проверить, пользуясь, например, правилом Лопиталя. Поэтому $F(y)$ ограничена на интервале $-\infty < y < \infty$, следовательно, и $\sqrt{F(y)} < C$ на $(-\infty, \infty)$.

Следовательно, на прямой $Re z = c$:

$$\frac{1}{|p - z|} < \frac{C}{|z|} = \frac{C}{|c + iy|},$$

Поэтому

$$\left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(z)}{p - z} e^{-(p-z)T} dz \right| < C e^{-(s-c)T} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{g(c + iy)}{c + iy} \right| dy < AC e^{-(s-c)T} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty \quad (2.2.6)$$

Итак, предел из (2.2.5) действительно равен нулю.

Равенство (2.2.6) может быть записано в виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = g(p), \text{ или } \varphi(t) \doteq g(p) \quad (2.2.7)$$

Учитывая, что по условию,

$$Lf(t) = g(p), \text{ а по (2.2.7) } L\varphi(t) = g(p),$$

причем $\varphi(t)$ непрерывная на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Отсюда, в силу предварительного замечания, о том что $f(t) = \varphi(t)$ во всех точках не прерывности $f(t)$, т.е

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} g(z) dz, \quad \text{при } c > s_0.$$

Таким образом, доказана общая теорема обращения, позволяющая находить оригиналы по данному изображению для достаточно большого класса функций.

Пример. Найдем оригинал $f(t) = L^{-1} \frac{1}{p^2(p^2 - a^2)}$.

Особые точки изображения $G(p) = \frac{1}{p^2(p^2 - a^2)}$ есть полюсы: $p = 0$ (второго порядка) и $p = \pm a$ (первого порядка). Выбирая $c < |a|$ по формуле обращения (2.2.1) получим:

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp. \quad (2.2.8)$$

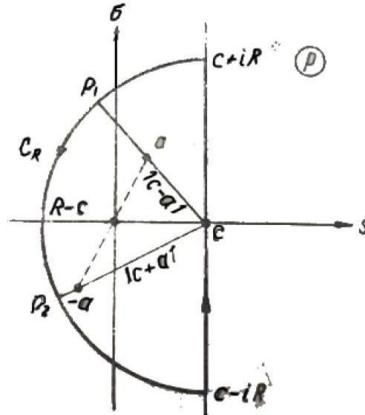


Рис. 4.

Возьмем контур Γ_R , состоящий из полу: окружности C_R и диаметра, проходимый в положительном направлении и изображенный на рис. 4 предполагая при этом радиус R настолько большим, что все указанные выше полюсы $g(p)$ лежат внутри Γ_R . Тогда при любом R , удовлетворяющем этому условию, по основной теореме о вычетах, учитывая, что особыми точками функции $G(p) = \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)}$ являются полюсы, совпадающие с указанными выше полюсами $g(p)$, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp =$$

$$= \text{res } G(0) + \text{res } G(-a) + \text{res } G(a),$$

или, перенося \int_{C_R} в правую часть последующего равенства, а переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая (2.2.8) будем иметь:

$$f(t) = \text{res } G(0) + \text{res } G(-a) + \text{res } G(a) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp. \quad (2.2.9)$$

Произведём подсчёт нужных вычетов:

$$\begin{aligned} \text{res } G(0) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{p^2 - a^2} \right) = -\frac{t}{a^2}; \\ \text{res } G(-a) &= \lim_{p \rightarrow -a} \frac{e^{pt}}{p^2(p-a)} = -\frac{e^{-at}}{2a^3}; \\ \text{res } G(a) &= \lim_{p \rightarrow a} \frac{e^{pt}}{p^2(p+a)} = \frac{e^{at}}{2a^3}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Оценим модуль интеграла по полуокружности c_R . В точках полуокружности c_R :

$$p = c + Re^{i\varphi}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad dp = iRe^{i\varphi}d\varphi, \quad (2.2.11)$$

Поэтому

$$|dp| = Rd\varphi, |e^{pt}| = e^{st} \leq e^{st},$$

так как в точках C_R $s \leq c$, кроме того (как легко понять пользуясь рис. 4)

$$\begin{aligned} |p| &\geq R - c, & \frac{1}{|p|^2} &\leq \frac{1}{(R-c)^2}, \\ |p - a| &\geq |p_1 - a| = R - |c - a|, & \frac{1}{|p-a|} &\leq \frac{1}{R-|c-a|} \\ |p + a| &\geq |p_2 + a| = R - |c + a|, & \frac{1}{|p+a|} &\leq \frac{1}{R-|c+a|} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Тогда, учитывая неравенства (2.2.12) и замечая, что длина их контура интегрирования равна πR , по теореме об оценке интеграла имеем:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{gt}}{p^2(p^2 - a^2)} dp \right| \leq \frac{e^{ct}}{(R-c)^2(R-|c-a|)(R-|c+a|)} \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad (2.2.13)$$

при $R \rightarrow \infty$

С помощью (2.2.10) и (2.2.12) получим окончательно:

$$f(t) = \frac{1}{a^3} sh at - \frac{t}{a^2} = \frac{1}{p^2(p^2 - a^2)}. \quad (2.2.14)$$

§ 3 Теоремы разложения

Вычисление оригинала по формуле Римана-Меллина математически довольно трудоёмко, поэтому на практике при решении задач данного типа применяют и другие методы. Так для отыскания оригинала по известному изображению в операционном исчислении используются так называемые теоремы разложения и, когда это возможно, теорема свертывания.

При решении ряда важных задач изображение $F(p)$ оказывается дробно-рациональной функцией, т.е. функцией вида: $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ где $A(p)$ и $B(p)$ некоторые полиномы. При этом степень числителя должна быть меньше степени знаменателя, так как в противном случае при $p \rightarrow \infty$ функция $F(p)$ не стремится к нулю, а поэтому она не может быть изображением.

Поэтому, на практике большое значение имеют теоремы, дающие возможность представить некоторые функции $F(p)$ в виде

суммы более простых слагаемых и тем самым упростить задачу перехода от изображения к оригиналу.

Рассмотрим следующие основные способы нахождения оригиналов по их известным дробно-рациональным изображениям. Будем предполагать, что $F(p)$ функция аналитическая во всей комплексной плоскости и удовлетворяет условию $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

При этом предполагается, что в бесконечно удаленной точке функция $F(p)$ является аналитической. В этом случае, для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению применяются следующие приемы.

Первый способ. *Элементарный метод нахождения оригинала по известному изображению.*

Во многих случаях заданное изображение можно преобразовать к такому виду, когда оригинал легко восстанавливается непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. В этом случае, нахождение функции-оригинала обычно проводят по следующей схеме:

- прежде всего следует по таблице оригиналов и изображений попытаться отыскать для заданного изображения $F(p)$ соответствующий ему оригинал;

- второй путь состоит в том, что изображение $F(p)$ стараются представить в виде суммы простейших рациональных дробей, а затем, пользуясь свойством линейности, найти по таблице оригинал.

Таким образом, *элементарный метод* нахождения оригинала сводится к разложению изображения, в том случае, когда она является правильной рациональной дробью, к разложению на простейшие дроби и последующего применения таблицы стандартных соответствий и свойств преобразования Лапласа.

Пример. Найти оригинал $f(t)$, если изображение $F(p) = \frac{p}{p^2+4p+7}$.

Представим изображение $F(p)$ в виде суммы простейших дробей

$$\begin{aligned} f(p) \frac{p}{p^2+4p+7} &= \frac{p}{(p+2)^2+3} = \frac{p+2-2}{(p+2)^2+3} = \\ &= \frac{p+2}{(p+2)^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(p+2)^2+3}. \end{aligned}$$

Затем, сравнивая эти выражения с формулами таблицы и применяя свойство линейности, находим искомый оригинал:

$$f(t) = e^{-2t} \cdot \cos \sqrt{3}t - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-2t} \cdot \sin \sqrt{3}t.$$

Пример. Найти оригинал по его данному изображению: $F(p) = \frac{p-3}{p^2+4}$

Решение: представим изображение $F(p)$, представляющего правильную рациональную дробь, в виде суммы простейших дробей, а затем воспользуемся таблицей соответствия и свойством линейности. Тогда, получим:

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \doteq$$

$$o \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t)$$

В некоторых случаях, для нахождения оригинала удобно использовать теоремы, называемые *теоремами разложения*, позволяющие по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий ему оригинал $f(t)$. Сформулируем эти важные теоремы, позволяющие решать большое количество задач прикладного характера.

Основу *второго способа* нахождения оригинала составляют условия первой теоремы разложения.

Первая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид ряда Лорана:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots,$$

то тогда оригиналом для функции $F(p)$ служит функция $f(t)$, определяемая при $t > 0$ сходящимся на всей оси рядом:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = c_0 + c_1 t + \dots \quad (t > 0)$$

т.е. имеет место соотношение вида:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = f(t).$$

Пусть требуется найти оригинал $f(t)$ для изображения $F(p)$, которое для всех значений s , удовлетворяющих неравенству: $\frac{1}{|s|} < \rho$,

разлагается в сходящийся к нему по степенной ряд по отрицательным степеням:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}} \quad (2.3.1)$$

Используя формулу разложения в степенной ряд, формально можно записать оригинал $f(t)$ для значений $t > 0$ в виде степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} = f(t), \quad (2.3.2)$$

полагая, что при $p < 0$, что функция $f(t) = 0$,

Очевидно, что этот формально найденный ряд определяет оригинал для функции $F(p)$ только в том случае, когда будут выполнены следующие три условия:

1. ряд в правой части (2) сходится для всех значений t на всей оси Ot ;
2. сумма ряда для оригинала $f(t)$ удовлетворяет условию изображаемости;

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}$$

4. между функциями $f(t)$ и $F(p)$ имеется операционное соотношение $F(p) \doteq f(t)$.

Докажем сформулированные положения. В силу того, что ряд (2.3.1) является рядом Лорана для функции $F(p)$ и он сходится при $\frac{1}{|p|} < \rho$, то при всяком p из области сходимости, в силу необходимого признака сходимости имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{\rho^{k+1}} = 0$. Но тогда, все члены ряда для любого значения p , удовлетворяющего неравенству:

$$\frac{|c_k|}{\rho^{k+1}} \leq |c| \frac{\rho^k}{1} \leq M, \quad (2.3.3)$$

где M некоторая положительная постоянная.

Из неравенства (2.3.3) находим оценку модулей коэффициентов ряда (2.3. 1):

$$c_k \leq \frac{M}{\rho_1^{k+1}},$$

а так как ρ_1 можно взять сколь угодно близким к ρ то получаем оценку

$$c_k \leq \frac{M}{\rho_1^{k+1}}. \quad (2.3.4)$$

Отсюда следует, что абсолютные величины ряда (2.3.2), формально определяющего оригинал, удовлетворяют оценке (2.3. 4) при $t > 0$:

$$\left| c_k \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{M}{\rho^{k+1}} \frac{t^k}{k!}.$$

Так как ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho^{k+1}} \frac{t^k}{k!} = \frac{M}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} \left(\frac{t}{\rho} \right)^k$$

сходится на всей оси Ot и его сумма равна $\frac{M}{\rho} e^{\frac{t}{\rho}}$.

Это доказывает, что ряд (2.3.2) сходится на всей оси Ot и его сумма не превосходит по абсолютному значению мажорантного ряда, т.е. $|f(t)| < \frac{M}{\rho} e^{\frac{t}{\rho}}$. Таким образом, первое и второе из требующих доказательства положений доказаны.

Для доказательства третьего положения напомним операционное соотношение, вытекающее из свойств линейности преобразования Лапласа, справедливого при любом n

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^k} \circ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} \quad (2.3.5)$$

Если в операционном соотношении считать, что: $|p| > \frac{1}{\rho}$, то в силу равномерной сходимости обоих степенных рядов, можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тем самым мы убеждаемся в справедливости третьего положения: $F(p) \doteq f(t)$. Таким образом первая теорема разложения полностью доказана.

Пример 1. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p}$

Решение: Используя известное разложение в степенной ряд тригонометрической функции для функции синуса:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Полагая в нем $u = \frac{1}{p}$, получим ряд Лорана:

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3! p^3} + \frac{1}{5! p^5} - \dots \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3! p^4} + \frac{1}{5! p^6} - \dots$$

Следовательно, на основании первой теоремы разложения имеем, что искомый оригинал определяется следующим рядом:

$$f(t) = t - \frac{1}{3!} \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{5!} \frac{t^5}{5!} - \dots, t > 0.$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$

Решение. Запишем разложение функции-изображения: $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$

в ряд Лорана окрестности точки $p = \infty$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2(1+\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{p^2})} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \dots \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \dots, \end{aligned}$$

где $|\frac{1}{p^2}| < 1$, т.е. $|p| > 1$.

Следовательно, для оригинала $f(t)$ имеет место соотношение

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots, \text{ т.е. } f(t) = \cos t, t > 0.$$

Основу третьего способа нахождения оригинала составляют условия второй теоремы разложения.

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$

является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых

точек: p_1, p_2, \dots, p_n , лежащих в конечной части плоскости, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_k (e^{pt} F(p; p_k)), \quad (2.3.6)$$

Если в частности, изображение $F(p) = \frac{A_m}{B_n}$, где A_m, B_n

многочлены степени m и n соответственно при $m < n$, имеющего корни: p_1, p_2, \dots, p_n кратности r_1, r_2, \dots, r_n . то оригинал определяется по формуле:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \cdot (p - p_k)^{m_k} \right)^{(m_k-1)} \quad (2.3.7)$$

Если положительное число c , фигурирующее в формуле (2.3.1) взять больше всех $\operatorname{Re} p_k$ (где $k=0, 1, 2, \dots$), то по этой формуле, которая тогда будет иметь вид:

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (2.3.8)$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим замкнутый контур Γ_R , проходимый в положительном направлении и состоящий из дуги C_R окружности радиуса $\frac{1}{2\pi i} c$ с центром в начале координат и стягивающий ее хорду AB , являющейся отрезком прямой $\operatorname{Re} p = c$, причем радиус настолько велик, что все полюсы изображения $F(p)$ лежат внутри замкнутого контура Γ_R .

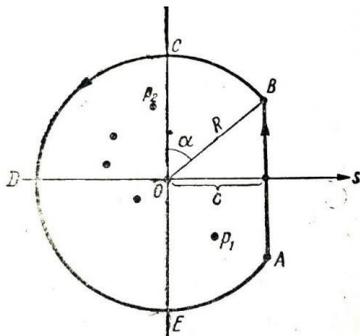


Рис. 5

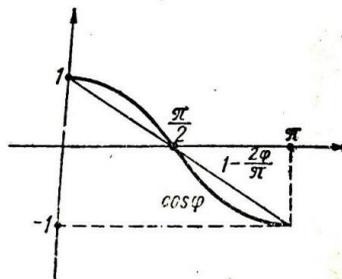


Рис.6

Тогда по теореме о вычетах при любом R , удовлетворяющей указанному условию, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} e^{pt} F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_k (e^{pt} F(p)),$$

которое в результате применения формулы о применении вычета в полюсе может быть переписано следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(r_{k-1})!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_{k-1}}}{dp_k^{r_{k-1}}} (p - p_k)^{r_k} e^{pt} F(p) \quad (2.3.9)$$

В силу того, что предел интеграла

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} = f(t).$$

Покажем, что второе слагаемое в левой стороне равенства (2) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Пусть $M_R = \max |F(p)|$, тогда $M_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, так как по условию: $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Так как на дуге C_R величина $p = Re e^{i\varphi} r (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то тогда:

$$|e^{pt}| = |e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{iR\cos\varphi}.$$

На дуге BC: $|e^{pt}| = e^{st} \leq e^{ct}$, в силу того, что:

$$\left| \int_{BC} \right| \leq M_R e^{ct} |BC| = M_R e^{ct} \alpha R \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \text{ т. к.}$$

$$M_R \rightarrow 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha R = \lim_{R \rightarrow \infty} R \arcsin \frac{c}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{c}{R}}{\frac{1}{R}} = c.$$

На дуге CD: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ и $\cos\varphi \leq 1 - \frac{2\varphi}{\pi}$, что легко увидеть на (рис 5.), поэтому:

$$\begin{aligned} \left| \int_{CD} \right| &\leq M_R e^{Rt \cos\varphi} d\varphi < M_R R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{Rt(1 - \frac{2\varphi}{\pi})} d\varphi = \\ &= M_R R e^{Rt} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{2Rt}{\pi} \varphi} d\varphi = M_R \frac{\pi}{t} (1 - e^{-Rt}) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично можно установить стремление к нулю интегралов по дугам DE и EA.

Таким образом,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} (\int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EA}) = 0 \quad (2.3.9)$$

Поэтому, переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в равенстве (2), учитывая (3), (4) и замечая, что правая часть равенства (2) при этом не изменяется, в результате получаем формулу;

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \cdot (p - p_k)^{m_k} \right) \quad (2.3.10)$$

Таким образом доказано, что если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ - правильная дробь, корни (нули) p_1, p_2, \dots, p_n знаменателя $B(p)$ имеют кратности m_1, m_2, \dots, m_n соответственно, то в этом случае оригинал изображения $F(p)$ определяется формулой (2.3.10).

Рассмотрим теперь доказательство теоремы разложения для нахождения оригинала, когда его изображение представляет собой правильную рациональную дробно-рациональную функцию. Оригинал такого изображения можно получить с помощью теоремы обращения, предполагая, что корни знаменателя $B(p)$ являются полюсами дробно-рационального изображения $F(p)$, т.е. корни: p_1, p_2, \dots, p_n кратности $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$.

В этом случае, разлагая правильную рациональную дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ на сумму простейших дробей, получим:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p - p_1} + \frac{c_2}{p - p_2} + \dots + \frac{c_n}{p - p_n}, \quad (2.3.11)$$

где c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) - неопределенные коэффициенты. Для определения коэффициента c_1 этого разложения умножим обе части этого равенства почленно на $p - p_1$:

$$\frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p - p_1) = c_1 + (p - p_1) \left(\frac{c_2}{p - p_2} + \dots + \frac{c_n}{p - p_n} \right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p \rightarrow p_1$, получим: $A(p_1)$

$$c_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{A(p)}{B(p)} \cdot (p - p_1) = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{A(p)}{B(p) - B(p_1)} \cdot (p - p_1) = \frac{A'(p_1)}{B'(p_1)}.$$

Итак, имеем что: $c_1 = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}$.

Аналогичным путем (умножая обе части равенство (2) на $(p - p_i)$ найдём

$$c_i = \frac{A(p_i)}{B'(p_i)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n в равенство (2.3.11), получим:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \dots + \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} \cdot \frac{1}{p - p_n}.$$

Так как:

$$\frac{1}{p - p_1} \circ e^{p_1 t}, \quad \frac{1}{p - p_2} \circ e^{p_2 t}, \quad \dots \dots \dots, \quad \frac{1}{p - p_n} \circ e^{p_n t}.$$

Легко заметить, что коэффициенты c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) определяются как вычеты комплексной функции $F(p)$ в простых полюсах:

$$c_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \operatorname{Res} \left(\frac{A(p)}{B(p)}; p_k \right).$$

Поэтому, на основании свойства линейности получаем формулу:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = f(t). \quad (2.3.12),$$

Если все корни знаменателя $B(p)$ дробно-рационального изображения лишь простые корни (нули) p_1, p_2, \dots, p_n (т. е. $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$), то по формуле вычета в простом полюсе находим

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \quad (2.3.14),$$

Пример. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p}.$$

Здесь знаменатель: $B(p) = p(p^2 - p - 6) = p(p+2)(p-3)$ имеет только простые корни: $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $p_3 = 3$. Поэтому применима формула (2.1.4), так как здесь:

$$A(0) = 2, \quad A(-2) = 8 \quad \text{и} \quad A(3) = 8, \\ B'(0) = -6, \quad B'(-2) = 10 \quad \text{и} \quad B'(3) = 15,$$

то в соответствии с формулой получаем:

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{4}{5} e^{-2t} + \frac{8}{15} e^{3t}$$

Пример. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{p-3}{p^2+4}$

Решение: здесь проще, используя первый способ, всего поступить следующим образом:

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \doteq \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t)$$

(использовали свойство линейности).

Если же использовать вторую теорему разложения, то тогда будем иметь:

$$A(p) = p - 3, \quad B(p) = p^2 + 4, \quad B'(p) = 2p,$$

где корни знаменателя $p_1 = 2i$ и $p_2 = -2i$. Тогда, согласно формуле (2.3.14), находим:

$$f(t) = \frac{2i-3}{2 \cdot 2i} e^{2it} + \frac{-2i-3}{2(-2i)} e^{-2it} = \frac{1}{4i} \left(2i(e^{2it} + e^{-2it}) - 3(e^{2it} - e^{-2it}) \right) = \\ = \frac{1}{4i} (2i(\cos 2t + i \sin 2t + \cos 2t - i \sin 2t) - 3(\cos 2t + i \sin 2t - \cos 2t + i \sin 2t)) = \\ = \frac{1}{4i} (4i \cos 2t - 6i \sin 2t) = \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t).$$

Пример. Найти функцию-оригинал, если её изображение задано как $F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}$.

Решение: здесь, согласно условию,

$$A(p) = 1, \quad B(p) = p^3(p-1), \quad B'(p) = 4p^3 - 3p^2,$$

$p_1 = 1$ - простой корень знаменателя, $p_2 = 0$ - корень кратности три ($m = 3$). Используя формулы (1) и (3), имеем:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4-3} \cdot e^{1 \cdot t} + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^3(p-1)} e^{pt} \cdot (p-0)^3 \right)'' = \\ &= e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt}}{p-1} \right)'' = \dots = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1, \end{aligned}$$

Тогда, функция-оригинал: $f(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1$.

Приведем другой способ нахождения оригинала $f(t)$.

Согласно первому способу, представим данную дробь $\frac{1}{p^3(p-1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, используя таблицу соответствий, имеем:

$$f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t.$$

Приведем третий способ нахождения $f(t)$. Представим $F(p)$ как произведение $\frac{1}{p^3(p-1)} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{p-1}$, и так как: $\frac{1}{p^3} \doteq \frac{t^2}{2}$ и $\frac{1}{p-1} \doteq e^t$, то, пользуясь свойством умножения изображений, имеем:

$$\begin{aligned} F(p) &\doteq \int_0^t r^2 e^{t-r} dr = \left[\begin{array}{l} u = r^2 \quad du = 2r dr \\ dv = e^{t-r} dr \quad v = -e^{t-r} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} e^{t-r} r^2 \Big|_0^t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^t r e^{t-r} dr = \left[\begin{array}{l} u = r \quad du = dr \\ dv = e^{t-r} dr \quad v = -e^{t-r} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + 0 + (-r \cdot e^{t-r}) \Big|_0^t - e^{t-r} \Big|_0^t = -\frac{1}{2} t^2 - t + 0 - 1 + e = \\ &= e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 = \end{aligned}$$

4. Применение теоремы умножения к нахождению оригинала

Особое место в операционном исчислении занимают теоремы, выражающие связь между оригиналами и изображениями произведениями функций.

1. Определение свертки функций

Для того, чтобы найти оригинал, соответствующий произведению изображений, познакомимся с одним достаточно простым действием над оригиналами-сверткой.

Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ действительного аргумента называется третья функция $F(t)$, обозначаемая символом $f_1(t) * f_2(t)$ и определяемая равенством:

$$F(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (2.4.1)$$

Интеграл в (2.4.1) является функцией переменной t , которая входит в подынтегральное выражение и является также переменным верхним пределом интеграла. Свертка функций является непрерывной функцией на $[0, +\infty)$.

Свертка функций не зависит от порядка в каком берутся функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ говорят, это означает, что действие свертки коммутативно. Для доказательства этого свойства интеграле (2.4.1) сделаем в интеграле замену переменной интегрирования по формуле: $\tau = t - \tau_1$, тогда $d\tau = -d\tau_1$, тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau &= \\ &= \int_e^0 f_1(t - \tau_1) f_2(\tau_1) (-d\tau_1) = \int_0^t f_1(t - \tau_1) f_2(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Из соотношения (2.4.2) видно, свойство симметрии свертки, т.е. имеет место:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

Отметим, что все обычные свойства умножения справедливы и для свертки. Сформулируем и докажем, что свертка двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ также является оригиналом.

Теорема (о свертывании оригиналов). Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ оригиналы с показателями роста σ'_0 и σ''_0 , то и их произведение (свертка) будет оригиналом.

Докажем, что свертка оригиналов $f_1(t)$ $f_2(t)$, которая определяется по формуле (2.4.1), удовлетворяет условиям 1-3 для оригиналов. Первое свойство оригинала проверить достаточно легко,

т. к. $F(t) = 0$ при $t < 0$. Проверим выполнение второго условия.

Пусть оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют при $t > 0$ оценки:

$$|f_1(t)| < M_1 e^{\sigma_0 t}; \quad |f_2(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t}.$$

Очевидно, что степень роста свертки, равна наибольшей степени роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Заменяя меньшее из чисел σ_0' и σ_0'' большим из них, и обозначая его через $\sigma_0 = \max[\sigma_0', \sigma_0'']$. Тогда имеет

место оценки:

$$|f_1(t)| < M_1 e^{\sigma_0 t}; \quad |f_2(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t}$$

После этого находим следующую оценку свертки $F(t)$:

$$\begin{aligned} |F(t)| &= \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t |f_1(\tau)| |f_2(t - \tau)| d\tau < M_1 M_2 \int_0^t e^{\sigma_0 \tau} \cdot e^{\sigma_0(t - \tau)} d\tau = \\ &= M_1 M_2 e^{\sigma_0 t} \int_0^t dt = M_1 M_2 t e^{\sigma_0 t} < M_1 M_2 e^{(\sigma_0 + 1)t} \end{aligned}$$

(поскольку при $t > 0, t < e^t$).

Эта оценка показывает, что свертка двух оригиналов в свою очередь будет оригиналом, поскольку третье условие (выполнение условий Дирихле) для свертки будет выполнено всегда, т.к. интеграл от произведения кусочно-монотонных функций, имеющих конечное число точек разрыва на интервале интегрирования, будет функцией непрерывной и кусочно-монотонной.

Таким образом, доказано, что свертка двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в свою очередь будет оригиналом.

Рассмотрим теперь формулировку соответствующего правила операционного исчисления.

Теорема умножения изображений (теорема Бореля).

Сверткой (произведением) двух изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$ также является изображение, причем

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Для доказательства запишем изображение свертки через интеграл Лапласа

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq \int_0^\infty \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| e^{-pt} dt,$$

и будем его рассматривать как двойной интеграл

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2.4.4)$$

Меняя в правой части порядок интегрирования (что возможно, так как интеграл Лапласа абсолютно и равномерно сходится), находим:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt$$

Для пояснения расстановки пределов при перемене порядка интегрирования воспользуемся рис. 8. Интеграл в левой части равенства (8.4) можно рассматривать как повторный, полученный при расстановке пределов в следующем двойном интеграле:

$$I = \iint_{(D)} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau,$$

где областью интегрирования служит часть плоскости, ограниченная положительной полуосью $o\tau o$ и биссектрисой первого координатного угла $\tau = t$ (на рис. 8 обл. D заштрихована). Но тогда изменение порядка интегрирования приводит как раз к интегралу, стоящему в правой части равенства (8; 4)

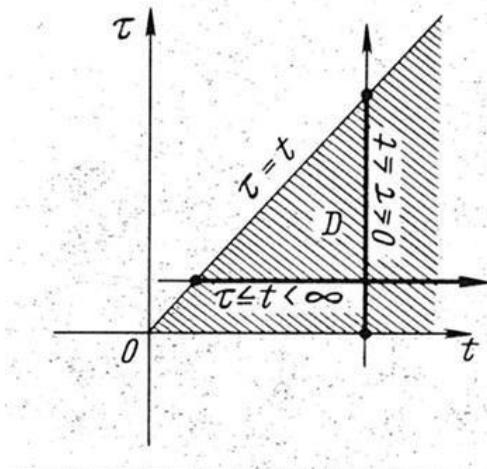


Рис. 8

Итак, имеем:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\tau) dt$$

Совершим теперь во внутреннем интеграле правой части замену переменной, полагая: $t - \tau = t_1$, тогда, поскольку $dt = dt_1$, при $t = \tau, t_1 = 0$; при $t = \infty, t_1 = \infty$, найдем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_2(t - \tau) dt = \\ & = \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-s(t_1 + \tau)} f_2(t_1) dt_1 = \\ & = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-st_1} f_2(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

(мы снова вынесли множитель $e^{-s\tau}$, не зависящий от t_1 , из-под знака внутреннего интеграла). Но в правой части последнего равенства мы получили произведение интегралов

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad F_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st_1} f_2(t_1) dt_1$$

Тем самым мы доказали, что умножению изображений соответствует свертывание двух оригиналов:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Таким образом, доказано, что при свертывании двух оригиналов их изображения перемножаются:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t).$$

Рассмотрим пример нахождения свертки оригиналов: $f_1(t) = e^t$ и $f_2(t) = t$. Найдем их свертку, применяя формулу (2.4.1). Тогда получим:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^t (t - s) ds = t(t - 1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1.$$

В силу того, что известно: $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$, $t \doteq \frac{1}{p^2}$, $1 \doteq \frac{1}{p}$. Найдём изображение свёртки

$$\text{а) непосредственно: } e^t * t = e^t - t - 1 \doteq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

$$\text{б) по теореме Бореля: } e^t * t = \frac{1}{p-1} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Очевидно, что результат один и тот же, а трудоемкость во втором случае гораздо ниже, особенно, если нет необходимости находить саму свёртку, а только её изображение.

В приложениях формула (2.4.4) часто используется для определения оригинала по заданному изображению, когда заданное изображение удастся разбить на сомножители, для которых оригиналы известны. Эта свойство преобразования Лапласа является одним из важнейших с точки зрения практических приложений.

Для того, чтобы найти оригинал, соответствующий произведению изображений, познакомимся с одним достаточно простым действием над оригиналами. Например, пусть требуется найти оригинал функции: $F(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$. Как известно,

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{(p^2 + \omega^2)}, \text{ и } \frac{1}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t.$$

Поэтому, находим:

$$\begin{aligned} F(p) &\doteq \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega (t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (\cos \omega (2\tau - t) - \cos \omega t) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{2\omega} \sin \omega (2\tau - t) \Big|_0^t - \cos \omega t \cdot \tau \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) = \\ &= \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t). \end{aligned}$$

Аналогично для функции; $F(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$, получаем:

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \frac{1}{2\omega} \cdot t \cdot \sin \omega t.$$

Формула Дюамеля. На практике достаточно часто бывает полезна еще одна разновидность теоремы умножения, так называемая формула Дюамеля.

Теорема (формула Дюамеля). Если оригинал $f_1(t)$ непрерывный на $[0, +\infty)$ непрерывен, а функция $f_2(t)$ - непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$, то имеет место формула Дюамеля:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(r) \cdot f_2(t-r) dr \doteq pF_1(p)F_2(p), \quad (2.4.5)$$

Из правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметра, следует, что левая часть непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$. Причем, если

$$f_1 * f_2 \doteq F_1(p) \cdot F_2(p) \text{ и } f_1'(t)$$

является оригиналом, то применяя теорему умножения и линейности, получим:

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1'(r) \cdot f_2(t-r) dr + f_1(0) \cdot f_2(t). \quad (2.4.6)$$

Формула (2.4.6) называется интегралом Дюамеля. Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде:

$$\begin{aligned} p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) &= p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p), \\ p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) &= (p \cdot F_1(p) - f_1(0)) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам:

$$f_1(r), f_1(r) \doteq p \cdot F_1(p) - f_1(0) \quad \text{и} \quad f_2(t).$$

Поэтому на основании свойства умножения изображений и линейности можно записать:

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t),$$

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0 f_1'(r) \cdot f_2(t-r) dr + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

На основании свойства коммутативности свертки формулу Дюамеля можно записать в следующем виде:

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0 f_2(r) \cdot f_1'(t-r) dr + f_1(0) \cdot f_2(t). \quad (2.4.7)$$

Формулу Дюамеля можно применять для определения оригиналов по известным изображениям.

В качестве применения формулы Дюамеля, найдем оригинал, соответствующий изображению: $F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}$, который допускает разложение на три множителя:

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

При этом в силу того, что известно

$$\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t, \quad \frac{p}{p^2+1} \doteq \cos t.$$

Тогда на основании формулы Дюамеля (2.4.7) находим:

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \circ \int_0 \cos r \cdot \cos(t-r) dr + 0 = t \cdot \cos t + \sin t.$$

ГЛАВА 3

Применение операционного исчисления к задачам математического анализа

Рассмотрим применение операционного исчисления к решению задач математического анализа, связанных с решением линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, с некоторыми интегральными уравнениями и системами интегральных уравнений, а также вычислением несобственных интегралов.

§ 1 Решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Наиболее обширная область приложения операционного исчисления, связанных с преобразованием Лапласа, связана с решением линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью.

Из общего курса математического анализа известно, что все решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правая часть которых есть линейная комбинация функций вида: $t^n e^{st}$, являются функционалами такого же вида. Причем, если функционалы этого вида рассматривать на $[0; +\infty]$, то они являются оригиналами. При этом, желательно, чтобы коэффициенты были постоянными, так как в противном случае положение, как правило, существенно осложняется. Однако, если эти условия выполнены, то операционный метод, т.е. переход от преобразов к образам значительно облегчает нахождение искомым решений. Такой метод опирается на разработанную систему правил и формул, которые и составляют операционное исчисление.

Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \quad (3.1.1)$$

и требуется найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}, \quad (3.1.2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ - постоянные числа, а c_0, c_1, \dots, c_{n-1} - заданные постоянные значения.

Разрешив полученное уравнение относительно $Y(p)$, получим операторное решение данного дифференциального уравнения:

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (3.1.5)$$

Операторное решение (3. 1.5) дифференциального уравнения (3.1,1) принимает более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т.е.

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

В этом случае операторное решение принимает вид:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}. \quad (3.1.6)$$

Переход к оригиналам (в силу теоремы единственности) позволяет найти искомое частное решение $y(t)$ данного уравнения (3.1,1). Как правило, решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью, являющейся линейной комбинацией функций вида: $t^n e^{st}$, сводится к разложению некоторой рациональной дроби на простейшие дроби.

Следует отметить, что полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях t (а не только при $t \geq 0$).

Пример 1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение:

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

Решение: пусть $y(t) \doteq Y(p) = Y$ Тогда, применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала, находим:

$$f(t) = e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3},$$

$$y'(t) \doteq pY - y(0) = pY - 2,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, используя свойство линейности преобразования Лапласа, получим операторное уравнение:

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12 \frac{1}{p-3}$$

Откуда, из полученного алгебраического уравнения, находим изображение:

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Представим рациональную дробь, стоящую в правой части операторного решения, в виде суммы простейших дробей:

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$$

Учитывая, что корни знаменателя ($p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$) простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения, в соответствии с которой:

$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12, \\ B'(p) = (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).$$

Тогда, получаем искомое решение задачи Коши:

$$y(t) = \frac{8}{(-1) \cdot (-2)} e^{1 \cdot t} + \frac{8}{1 \cdot (-1)} e^{2 \cdot t} + \frac{12}{2 \cdot 1} e^{3 \cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}.$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y = \cos t$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Здесь, согласно формуле (1.1.6), находим искомое решение задачи Коши с нулевыми начальными данными:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)} = \frac{\frac{p}{p^2+1}}{p+1} = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{(p+i)^2} \right).$$

Откуда, пользуясь табличными соотношениями, находим по значению $Y(p)$, , находим оригинал;

$$y(t) = \frac{1}{4i} (te^{it} - te^{-it}) = \frac{1}{2} t \sin t,$$

тем самым найдено искомое решение задачи Коши.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y = \frac{1}{2 + \sin t},$$

удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ данного уравнения, а также при необходимости многократного решения задачи для различных функций $f(t)$.

Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\} = 1$ (с той же левой частью и правой частью, равной единице) при условиях (15). Обозначим его $y_1(t)$. Тогда решение $y(t)$ исходной задачи можно выразить через $x_1(t)$ и $f(t)$ с помощью одной из формул:

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t - \tau) d\tau, \quad x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t - \tau) x_1(\tau) d\tau,$$

Каждое из этих выражений называют формулой (или интегралом) Дюамеля.

В данном случае нахождение изображения для функции $\frac{1}{2 + \sin t}$ достаточно трудоемко. Поэтому, в соответствии с описанным методом, рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad \text{при } y'(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Пусть $y(t) \doteq Y(p)$, тогда, учитывая нулевые начальные условия находим: $y'(t) \doteq p Y(p)$, $y''(t) \doteq p^2 Y(p)$ и $1 \doteq \frac{1}{p}$.

Тогда операторное уравнение для вспомогательного уравнения примет вид:

$$p^2 Y + Y = \frac{1}{p},$$

откуда находим операторное решение:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Полученное изображение представим в виде суммы простейших дробей, в результате получим:

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Решение вспомогательной задачи, используя табличные соотношения, имеет вид:

$$y(t) = 1 - \cos t.$$

Решение исходной задачи находим, используя формулу Дюамеля. Пусть

$$f(t) = \frac{1}{2 + \sin t}, \quad y'(t) = (1 - \cos t)' = \sin t.$$

Тогда, в соответствии с формулой Дюамеля, находим:

$$y(t) = \int_0^t \sin(t - \tau) \frac{1}{2 + \sin \tau} d\tau = \sin t \int_0^t \frac{\cos \tau}{2 + \sin \tau} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin \tau}{2 + \sin \tau} d\tau.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int_0^t \frac{\cos \tau}{2 + \sin \tau} d\tau = \int_0^t \frac{d(\sin \tau)}{2 + \sin \tau} = \ln|2 + \sin \tau| = \ln|2 + t| - \ln|2| = \ln|1 + \frac{1}{2} \sin \tau|$$

Для вычисления второго интеграла применяем универсальную подстановку: т.е. полагая: $tg \frac{\tau}{2} = u$, $\tau = 2 \operatorname{arctg} u$, тогда $d\tau = \frac{2du}{1+u^2}$ и $\sin \tau = \frac{2u}{1+u^2}$.

Применяя преобразование Лапласа к каждому из уравнений системы и учитывая начальные условия, составляем следующую систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 2X(p) + Y(p) = \frac{10}{p-2}, \\ pY(p) - 3 - 2X(p) + Y(p) = \frac{1}{p-2}, \end{cases}$$

которую затем представляем в эквивалентной форме записи:

$$\begin{cases} (p+2)X(p) + Y(p) = \frac{p+8}{p-2}, \\ -2X(p) + (p+1)Y(p) = \frac{3p+1}{p-2}. \end{cases}$$

Решая алгебраическую систему уравнений, находим операторные решения:

$$X(p) = \frac{1}{p-2}, \quad Y(p) = \frac{3}{p-2}$$

Затем, используя табличные соотношения, находим искомые решения данного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}, \\ y(t) = 3e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 \end{cases}$$

удовлетворяющей начальным условиям:

$$x(0) = x'(0) = 1, y(0) = y'(0) = 0.$$

Применяя преобразование Лапласа к каждому из уравнений заданной системы и учитывая начальные условия, получим следующую операторную систему уравнений:

$$\begin{cases} (2p^2 - p + 9)X(p) - (p^2 + p + 3)Y(p) = 2p + 1, \\ (2p^2 + p + 7)X(p) - (p^2 - p + 5)Y(p) = 2p + 3. \end{cases}$$

Для того, чтобы упростить эту алгебраическую систему, возьмем линейную комбинацию суммы и разности уравнений, в нее входящих. Тогда, в результате получим следующую систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} 2X(p) - Y(p) = 2\frac{p+1}{p^2+4}, \\ X(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Решая, полученную систему, как систему линейных алгебраических уравнений, найдем операторные решения:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4}, \\ Y(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4}. \end{cases}$$

Затем, используя табличные соотношения, переходим от изображений $X(p)$ и $Y(p)$ к их оригиналам. В результате получим искомого решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), \\ y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - 2 \cos 2t - \sin 2t). \end{cases}$$

Пример 3. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) - 4y(t) = \cos t, \\ y'(t) + x(t) + 2y(t) = \sin t \end{cases}$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Решение. Полагая $y(t) \doteq Y(p)$ и $f(t) \doteq F(p)$ составляем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} (-2 + p)X(p) - 4Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}, \\ X(p) + (2 + p)Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}. \end{cases}$$

Находим главный определитель $\Delta(p)$ данной системы:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -2 + p & -4 \\ 1 & 2 + p \end{vmatrix} = p^2.$$

Решая алгебраическую систему линейных уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$, находим операторные решения:

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(p^2 + 1)}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p^2(p^2 + 1)}.$$

Представляя найденные рациональные дроби в виде суммы простейших дробей, получим:

$$X(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p + 3}{p^2 + 1}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2 + 1}.$$

Тогда оригиналы, соответствующие найденным изображениям при $t > 0$, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t \\ y(t) = -2t + 2 \sin t \end{cases}$$

Таким образом, получено решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям, т.е. найдено решение данной задачи Коши.

Пример. Найти решение уравнения:

$$y'' + 4y = \begin{cases} 2 \cdot t, & \text{если } 0 \leq t < 2, \\ 3 - t, & \text{если } 2 \leq t < 3, \\ 0, & \text{если } t < 0, t \geq 3 \end{cases}$$

при начальных условиях: $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Решение: График данной функции имеет вид, изображенный на рисунке 1.

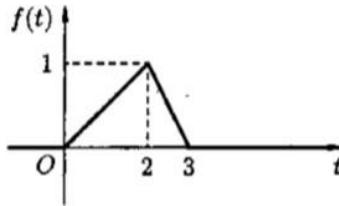


Рис.1.

С помощью единичной функции правую часть данного дифференциального уравнения можно записать одним аналитическим выражением:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}t \cdot \eta(t) - \frac{1}{2}t \cdot \eta(t-2) + (3-t) \cdot \eta(t-2) - (3-t) \eta(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot \eta(t) - \frac{1}{2}(t-2+2) \cdot \eta(t-2) - (t-2-1) \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot \eta(t) - \frac{1}{2}(t-2) \cdot \eta(t-2) - (t-2) \cdot \eta(t-2) + 1(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3) = \\ &= \frac{1}{2}t \cdot \eta(t) - \frac{3}{2}(t-2) \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}t \cdot \eta(t) - \frac{3}{2}(t-2) \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3).$$

Операторное уравнение, при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$p^2 Y + 4Y = \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}.$$

Отсюда:

$$Y(p) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} e^{-3p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 2^2} \right) \doteq \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right),$$

то по теореме запаздывания находим:

$$y(t) = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \frac{3}{8} \left(t - 2 - \frac{1}{2} \sin 2(t - 2) \right) \eta(t - 2) + \frac{1}{4} \left(t - 3 - \frac{1}{2} \sin 2(t - 3) \right) \eta(t - 3).$$

Аналогично применяется операционный метод для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Покажем это на конкретном примере.

Анализ применения методов операционного исчисления для решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений позволяет сформулировать следующий *алгоритм их решения*:

1. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям; записать уравнение (систему) в изображениях.

2. Решить полученное операторное уравнение (систему): найти изображение искомого решения.

3. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригиналы для полученного изображения.

Отметим, следующие очевидные преимущества операционного метода решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем этих уравнений по сравнению с классическим методом математического анализа решения дифференциальных уравнений, заключаются в том, что:

-применение операционного метода сводится к тому, что функции из пространства оригиналов и производимыми над ними операциями заменяются функциями и операциями над изображениями, которые оказываются более простыми. В результате вместо дифференциальных уравнений решаются линейные алгебраические уравнения;

-начальные условия при составлении операторного уравнения учитываются в решении с самого начала, и нет необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений для нахождения произвольных постоянных, как это требуется при решении дифференциальных уравнений (и систем) классическим методом. Решение

задачи Коши при нулевых начальных значениях, представляющий наиболее частый случай на практике, методом операционного исчисления обеспечивают достаточно простой ход вычислений;

- при решении операторного уравнения (системы) нет необходимости приводить дроби к общему знаменателю, так как следующий этап-нахождение оригинала, связан с представлением изображения в виде суммы простейших дробей;

- операционное исчисление, в отличие от классического метода решения, позволяет найти непосредственно практически важное общее решение неоднородного дифференциального уравнения, без нахождения его частного решения.

Методы операционного исчисления по сформулированному алгоритму можно применять для решения широкого класса уравнений с переменными коэффициентами, кусочно-непрерывных функций $f(t)$ и функций, заданных графически, для решения уравнений с частными производными, интегральных и линейных интегро-дифференциальных уравнений и их систем, для вычисления несобственных интегралов. Рассмотрим решение некоторых задач математического анализа, к которым применимы операционный метод.

§ 3 Решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операционным методом

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$a_0(t)x^n(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t) \quad (3.3.1)$$

где $a_i(t), i = 0, \bar{n}$ – многочлены степени m_i , а функция $f(t)$ является оригиналом. Обозначим $m = \max\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$.

Будем предполагать, что задача Коши для уравнения (3.3.1) с начальными условиями:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \quad (3.3.2)$$

имеет решение на множестве оригиналов.

Известно, что если $f(t) \doteq F(p)$, то дифференцированию изображений соответствует умножение оригинала $f(t)$, по формуле:

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (3.3.3)$$

При помощи соотношения (3.3.3) можно преобразовать линейное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого являются многочленами относительно t , в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами относительно переменной p .

Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Тогда, применяя к обеим частям уравнения (3.3.1) преобразования Лапласа, в соответствии с формулой (3.3.3) имеем следующее операторное уравнение:

$$\begin{aligned} t^k x^{(s)}(t) &\doteq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} (L\{x^{(s)}(t)\}) = \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} (p^s X(p) - p^{s-1}x_0 - \dots - x_{s-1}) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

В результате этого каждое уравнение (3.3.1) системы с помощью формулы (3.3.4) преобразуем в дифференциальное уравнение m -го порядка относительно изображения $X(p)$. После этого задача интегрирования дифференциального уравнения (3.3.1) упрощается.

Отметим, что в том случае, когда коэффициенты данного дифференциального уравнения являются многочленами первой степени, то дифференциальное уравнение для изображения будет обыкновенным дифференциальным уравнением, которое решается известными методами.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$tx'' - 2x' = 0.$$

Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда в соответствии с формулой (3.3.4) находим:

$$\begin{aligned} x'(t) &\doteq pX - x(0), \quad x''(t) \doteq p^2X - px(0) - x(0), \\ tx''(t) &\doteq x(0) - 2pX(p) - p^2(X)'. \end{aligned}$$

Операторное уравнение для исходного уравнения примет вид:

$$-p^2X'(p) - 4pX(p) - 3x(0) = 0,$$

В результате преобразования, представим уравнение в виде:

$$X'(p) + \frac{1}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Решая полученное линейное уравнение первого порядка с помощью подстановки: $X(p) = u(p)v(p)$, находим изображение искомого решения:

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{c}{p^4}.$$

Тогда, искомое решение данного уравнения будет иметь вид:

$$x(t) = x(0) + c \frac{t^3}{3!} = c t^3 + c$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения (частный случай уравнения Бесселя):

$$x'' + \frac{1}{t} x' - k^2 x = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям: $x(0) = x'(0) = 1$.

Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Умножим обе части уравнения на множитель t

$$tx'' + x' - k^2tx = 0,$$

Тогда, операторное уравнение примет вид:

$$(p^2 - k^2)X'(p) + pX(p) = 0,$$

которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dX(p)}{X(p)} + \frac{pdp}{p^2 - k^2} = 0.$$

Решая его, находим операторное решение:

$$\frac{dX(p)}{X(p)} = -\frac{pdp}{p^2 - k^2},$$

$$\frac{dX(p)}{X(p)} = -\frac{1}{2} \frac{d(p^2 - k^2)}{p^2 - k^2}.$$

Интегрируя полученное уравнение с разделенными переменными, получим операторное решение:

$$\ln|X(p)| = -\frac{1}{2} \ln|p^2 - k^2| + \ln c_1,$$

$$X(p) = \frac{c_1}{\sqrt{p^2 - k^2}}.$$

Пользуясь таблицей операционных соотношений, затем находим искомое решение

$$x(t) = c I_0(ikt), \quad \text{где} \quad I_0(ikt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)} (kt)^{2n},$$

где $I_0(ikt)$ функция Бесселя первого порядка от чисто мнимого аргумента.

§ 4 Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Во многих прикладных вопросах, в частности, в теории регулирования и прогнозирования, приходится иметь дело дифференциальными уравнениями, в которых неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента: $t, t - \tau_1(t), t - \tau_2(t), \dots, t - \tau_n(t)$. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом

Если $\tau_k = \text{const} \geq 0$ и старшая производная входит только при одном значении аргумента, не меньшим всех других аргументов функции и производных, входящих в это уравнение, то уравнение называется дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом.

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последействием, часто встречаются задачи в следующей постановке:

найти решение уравнения $x(t)$ для $t \geq t_0$, причем для всех $t \leq t_0$, для которых значение $x(t)$ влияют на последующие значения решения при $t \geq 0$, где функция $x(t)$ задается.

Так, например, ставится задача: найти непрерывное решение $x(t)$ при $t \geq t_0$ уравнения:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau = \text{const} > 0 \quad (3.4.5)$$

если известно, что

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{для } t \in [t_0 - \tau, t_0] \quad (3.4.6)$$

Начальная функция $\varphi(t)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция. Отрезок $[t_0 - \tau, t_0]$, на котором задается функция называется начальным множеством.

Если уравнение (3.4.5) является линейным, то его решение, удовлетворяющее условию (3.4.6), можно найти с помощью преобразования Лапласа.

Пусть $[t_0 = 0]$, тогда при построении соответствующего операторного уравнения следует учитывать то, что для изображения функции имеем:

$$\begin{aligned} x(t - \tau) \int_0^\infty e^{-pt} x(t - \tau) dt &= \int_{-\tau}^\infty e^{-3(\eta+\tau)} x(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\tau}^0 e^{-p(\eta+\tau)} x(\eta) d\eta + \int_0^\infty e^{-p(\eta+\tau)} x(\eta) d\eta = \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^0 e^{-p\eta} x(\eta) d\eta + e^{-p\tau} X(p). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

При восстановлении оригиналов по известным изображениям можно воспользоваться следующим разложением:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m}} &= 1 + \frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m} + \left(\frac{\gamma}{m}\right) \frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{m}\right)^k \frac{\gamma e^{-nk}}{(p+a)^k} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

которое справедливо при любых условиях.

Процессы и явления с последствием, которые достаточно часто встречаются в задачах регулирования и прогнозирования, описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Особенно часто в приложениях приходится интегрировать линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и с постоянными коэффициентами.:

$$x^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), 0 < t < +\infty, \quad (3.4.9)$$

где $a_k = const, t_k = const \geq 0$.

Пусть искомое решение $x(t)$ является оригиналом, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{n-1}(0) \equiv 0 \quad (3.4.10)$$

Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (3.4.1) преобразование Лапласа и пользуясь теоремой запаздывания, получим для изображения следующее уравнение:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^{(k)} X(p) e^{-kp} + F(p), \quad (3.4.11)$$

Откуда, находим операторное решение:

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^{(k)} p e^{-kp}}, \quad (3.4.12)$$

Переходя, с помощью таблиц или формулы обращения к оригиналу, получим искомое решение уравнения (3.4.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.4.2).

Заметим, что найти по полученному изображению оригинал в конечном виде не удастся. Поэтому обычно строят решение, разлагая его тем или иным способом в ряд.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения:

$$x'(t) = x(t - 1) + 1,$$

удовлетворяющего начальному условию: $x(0) = 0$.

Полагая $x(t) \doteq X(p)$, составляем следующее операторное уравнение:

$$p X(p) = X(p) e^{-p} + \frac{1}{p}.$$

Откуда затем находим разложение в ряд изображения

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} \frac{e^{-p}}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \\ &= \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \dots \right) \end{aligned}$$

Тогда, оригинал определяется следующим разложением в ряд:

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\eta(t-n) + \dots,$$

где $\eta(t-n)$ – единичная функция запаздывающего аргумента.

Пример. Найти решение уравнения

$$x'(t) + 2x(t) - x(t-1) = 1,$$

если $x(0) = 0$ и $x(t) = 0$ для $\forall t < 0$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. Так как при заданных условиях $x(t-1) \doteq e^{-p}X(p)$ то операторное уравнение, соответствующее заданному, имеет вид:

$$pX(p) + 2X(p) - e^{-p}X(p) = F(p).$$

Решение этого уравнения запишем в виде произведения:

$$x(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}} * F(p)$$

Построим оригинал для функции:

$$Y(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}}$$

выполнив следующие преобразования:

$$Y(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}} = \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p+2}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kp}}{(p+2)^{k+1}}.$$

Последнее равенство записано, учитывая формулу (3.4.8). Переходя к оригиналам для слагаемых суммы ряда, используя

соответствие $t^k \leftrightarrow \frac{k!}{p^{k+1}}$ и теорему запаздывания, находим

$$Y(p) \doteq y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^k}{k!} e^{-2(t-k)} X(t-k).$$

Решением поставленной задачи будет функция $x(t)$, которая является сверткой функций $f(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^t f(t-\tau) (\tau-k)^k e^{-2(t-k)} X(\tau-k) d\tau.$$

§ 5 Дифференциальные уравнения с частными производными

Методы интегрального преобразования Лапласа являются весьма удобным средством решения дифференциальных уравнений с частными производными.

В самом общем виде дифференциальные уравнения с частными производными с m независимыми переменными можно записать в виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}) = 0,$$

наивысший порядок k производной от неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется его порядком.

Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t . Переменную x принято рассматривать как пространственную координату, а переменную t — как время.

Рассмотрим применение операционного метода для линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, т.е. уравнений вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{23} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{33} u = f(x, t), \quad (3.5.1)$$

Как известно, для того, чтобы применить преобразование Лапласа к уравнению с частными производными, необходимо выполнить его для функции $u = u(x, t)$ и для всех ее частных производных, входящих в уравнение.

В силу того, что преобразование Лапласа представляет собой интегрирование только по одной переменной, то применяя его к функции $u = u(x, t)$, зависящей от двух переменных, его можно выполнить только для одной переменной, оставляя другую независимую переменную неизменной. Будем считать переменную x при выполнении преобразования неизменной. Следовательно, это изображение зависит не только от p , как было раньше, но и также и от x :

$$f(x, t) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt = U(x, p).$$

Применяя правило дифференцирования, необходимо при этом каждый раз оставлять переменную x неизменной. Тогда, в результате получим:

$$L\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = pU(x, p) - u(x, +0),$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right\} = p^2U(x, p) - pu(x, +0) - u_t(x, +0).$$

Так как в результате преобразования Лапласа частные производные по t устраняются, то в изображающем уравнении остаются только частные производные по x .

Таким образом, прямое решение уравнения с частными производными, при заданных начальных и граничных условиях, с помощью преобразования Лапласа приводит к замене уравнения с частными производными обыкновенным дифференциальным уравнением, которое уже содержит в себе заданные начальные условия, а граничные условия исходного уравнения переходят в граничные условия изображающего уравнения. После решения изображающего уравнения (т.е. обыкновенного дифференциального уравнения) выполняется обратное преобразование, которое приводит к искомому решению.

Таким образом, непосредственное решение уравнения с частными производными при заданных начальных и граничных условиях заменяется преобразованным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, которое содержит в себе данные начальные условия. После решения, изображающего (т.е. обыкновенного дифференциального уравнения), осуществляется обратное преобразование Лапласа, которое приводит к решению первоначальной задачи.

Общая схема интегрирования методами операционного исчисления линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами с некоторыми начальными и граничными условиями сводится к следующему: считая, что искомое решение $u(x, t)$ по переменной t удовлетворяет наложенным на оригинал условиям, умножаем тождество (1.1) на $e^{-pt}dt$ и интегрируем по t в пределах от 0 до ∞ , т.е. переходим от равенства (1.1) к изображениям по переменной t . При этом уравнение с частными производными переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение. Переходя к изображению в граничных условиях, получим граничные условия для решения обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего изображение. Интегрируя полученное обыкновенное дифференциальное уравнение операционным или иным методом, получим изображение искомого решения. Затем с помощью таблиц или теоремы обращения находим искомое решение.

В качестве примера, применения метода операционного исчисления, ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с постоянными

коэффициентами, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t . т.е. уравнение вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y), \quad 0 < x < \infty, \quad y < 0 < \infty. \quad (3.5.2)$$

Для того, чтобы применить методы операционного исчисления и найти изображение частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$, необходимо задать начальные значения функции:

$$u = u(x, y) \text{ при } x = 0, y = 0, \text{ т.е. } u(0, y) = \alpha(y) \text{ и } u(x, 0) = b(x).$$

Пусть при этом:

$$u(x, y) \doteq U(p, q), \quad f(x, y) \doteq F(p, q), \quad \alpha(y) \doteq A(q), \quad b(x) \doteq B(p).$$

Учитывая, что в операционном исчислении, операторы дифференцирования $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ определяются следующими формулами:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = p F(x, y) - p F(0, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = q F(x, y) - F(x, 0),$$

тогда операторное уравнение, в принятых обозначениях, принимает следующий вид:

$$p [U(p, q) - A(q)] + q [U(p, q) - B(p)] = F(p, q), \quad (3.5.3)$$

Откуда, находим операторное решение:

$$U(p, q) = \frac{F(p, q)}{p + q} + \frac{p}{p + q} A(q) + \frac{q}{p + q} B(p).$$

Используя известные табличные соотношения, находим:

$$\frac{p}{p + q} A(q) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > y, \\ A(y - x) & \text{при } x < y. \end{cases}$$

$$\frac{q}{p + q} B(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > y, \\ b(x - y) & \text{при } x < y. \end{cases}$$

Затем, используя табличную формулу, находим искомое решение данного уравнения с частными производными:

$$u(x, y) = \begin{cases} b(x - y) + \int_0^y f(x - s, y - s) ds, \\ a(x - y) + \int_0^x f(x - s, y - s) ds. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, при $\alpha(0) = b(0)$ функция $u(x, y)$ определена и непрерывна в области: $[0 < x < \infty; y < 0 < \infty]$ и дифференцируема при $y > x$ и $y < x$. Функции $a(y)$ и $b(x)$ не зависят друг от друга и метод получения решения предполагает, что функции преобразуемы по Лапласу.

§ 6 Интегральные уравнения типа свертки

Операционный метод можно применять и ко многим интегральным уравнениям и системам интегральных уравнений. Так, например, решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

как известно, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0.$$

Интегральное уравнение называется *линейным*, если искомая функция y входит в уравнение линейно. Уравнение вида:

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt, \quad (3.6.1)$$

где a и b - постоянные числа, называется уравнением Фредгольма второго рода. Здесь $K(x, t)$, $f(x)$ – заданные функции, $y(x)$ – искомая функция. Функцию $K(x, t)$ называют ядром уравнения.

Интегральное уравнение вида:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt, \quad (3.6.2)$$

называют линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Если в уравнениях (3.6.1), (3.6.2) функция $f(x) = 0$, то уравнения называются однородными.

Интегральное уравнение вида:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau \quad (3.6.3)$$

с ядром $K(t - \tau)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляет собой важный класс интегральных уравнений Вольтерра, называемых *уравнениями типа свертки*.

Предположим, что функции $f(x)$ и $K(x)$, входящие в уравнение (3.6.3) достаточно гладкие функции имеют конечный порядок роста при $x > 0$. В этом случае $y(x)$ при $x \geq 0$ имеет конечный порядок роста, а значит может быть найдено изображение по Лапласу функций: $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$. Пусть:

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p), \quad K(x) \doteq K(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (3.6.3) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (свертке оригиналов

соответствует произведение их изображений) будем иметь следующее операторное уравнение:

$$Y(p) = F(p) + K(p) \Phi(p),$$

откуда, затем найдем операторное решение:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}, \quad K(p) \neq 1 \quad (3.6.4)$$

Для изображения $Y(p)$ находим оригинал $y(x)$, исходного интегрального уравнения (3. 6.3) при $x \geq 0$.

Для однородного интегрального уравнения Вольтерра первого рода операторное уравнение имеет более простой вид:

$$K(p) Y(p) = F(p),$$

Откуда находим:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{K(p)} \quad (3.6.5)$$

Затем, по найденному изображению $Y(p)$ находится оригинал.

Пример. Найти решение интегрального уравнения:

$$y(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(x - t) \varphi(t) dt.$$

В этом интегральном уравнении $K(t - \tau) = \cos(x - t)$. Следовательно, $K(t) = \cos t$, изображение которого определяется соотношением: $K(p) \doteq \frac{p}{p^2+1}$. Тогда, для оригинала: $f(x) = \sin x \doteq \frac{1}{p^2+1} = F(p)$.

Следовательно, операторное уравнение принимает вид:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + 2 \frac{p}{p^2 + 1} \Phi(p).$$

Откуда, находим решение операторного уравнение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p - 1)^2}.$$

Соответствующий данному изображению оригинал имеет вид:

$$\varphi(x) = xe^x,$$

который и является решением интегрального уравнения при $x \geq 0$.

Пример 2. Найти решение интегрального уравнения второго рода

$$y(x) = x - \int_0^x (x - \tau)y(\tau) d\tau.$$

Пусть $y(x) \doteq Y(p)$. В данном случае, интегральному уравнению соответствует изображение

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} Y(p),$$

откуда находим изображение искомого решения

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Затем, используя таблицу соответствий, находим при $x \geq 0$ искомое решение:

$$y(x) = \sin x .$$

Пример 3. Найти решение интегрального уравнения первого рода.

$$1 - \cos x = \int_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt.$$

Решение. Пусть $y(x) \doteq Y(p)$. В этом уравнении $K(t-\tau) = sh(x-t)$. Поэтому, $K(t) = sh t \doteq \frac{1}{p^2-1}$.

Тогда операторное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2-1} Y(p),$$

Откуда находим операторное решение:

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)},$$

которое затем представим в виде суммы простейших дробей:

$$Y(p) = 2\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

Тогда, искомое решение данного интегрального уравнения, используя данные таблицы соотношений имеет вид:

$$\varphi(x) = 2\cos x - 1.$$

Системы интегральных уравнений решаются аналогично, решению интегральных уравнений, так как сводятся к системе линейных интегральных уравнений относительно изображений. Покажем это на примере.

Пример 4. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt + \int_0^x \varphi_2(t)dt , \\ \varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t)dt + 4 \int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

Решение. Для данной системы интегральных уравнений имеем:

$$\begin{aligned} f_1(x) = 1 \doteq \frac{1}{p} = F_1(p), \quad K_1(x) = e^{2x} \doteq \frac{1}{p-2} = K_1(p); \\ \varphi_1(x) = \Phi_1(p): \quad \frac{\Phi_1(p)}{p} \doteq \int_0^x \varphi_1(t)dt; \end{aligned}$$

$$f_2(x) = x \div \frac{1}{p^2} = F_2(p) \quad K_2(x) = x \div \frac{1}{p} = K_2(p)$$

$$\varphi_2(x) = \Phi_2(p): \quad \frac{\Phi_2(p)}{p} \doteq \int_0^x \varphi_2(t) dt.$$

Тогда, система интегральных уравнений в операторной форме имеет вид;

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p^2} \Phi_1(p) + \frac{1}{p} \Phi_2(p),$$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \Phi_1(p) + \frac{1}{p^2} \Phi_2(p)$$

Решая полученную линейную алгебраическую систему относительно изображений $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$, находим изображения искомого решения:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{p}{3p+2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}, \\ \Phi_2(p) &= \frac{p}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9} \frac{1}{p-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9} \frac{1}{p+1}. \end{aligned} \right.$$

Тогда, искомое решение системы интегральных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \\ \varphi_2(x) &= \frac{8}{9} e^{2x} + \frac{1}{3} xe^{-x} - \frac{8}{9} e^{-x} = \frac{8e^{2x}}{9} (1 + xe^x - e^x) \end{aligned} \right.$$

§ 7 Линейные интегро-дифференциальные уравнения

Операционный метод можно применим к линейным интегро-дифференциальным уравнениям т.е. таким уравнениям, в которых искомая функция входит как под знак интеграла, так и под знак производной.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения вида:

$$a_0(x)\varphi^{(s)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\varphi(x) + \sum_{m=0} K_m(x, t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x) \quad (3.7.1)$$

Здесь $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x), K_m(x, t)$ ($m = 0, 1, \dots, s$) – известные функции, $\varphi(x)$ – искомая функция.

При решении линейных интегро-дифференциальных уравнений (3.7.1), как и для дифференциальных уравнений, для искомой функции $\varphi(x)$ ставятся начальные условия вида:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_0', \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \quad (3.7.2)$$

Пусть в уравнении (3.7.1) коэффициенты $a_n(x) = \text{const}$ ($k = 0, 1, \dots, h$) и функции $K_m(x, t) = K_m(x - t)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, s$), т.е. все K_m зависят лишь от разности аргументов $(x - t)$. Не нарушая общности, можно считать, что коэффициент $a_0 = 1$.

Тогда уравнение (3.7.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n\varphi(x) + \\ & + \sum_{m=0}^s \int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x) \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Пусть, далее, функции $t(x)$ и $K_m(x)$ являются функциями-оригиналами:

$$F(p) \doteq f(x), \quad K_m^*(p) \doteq K_m(x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s).$$

Тогда и функция $\varphi(x)$ будет иметь изображение по Лапласу $\Phi(p) \doteq \varphi(x)$. В силу теоремы об изображении производной, находим:

$$\begin{aligned} & p^k\Phi(p) - p^{k-1}\varphi(0) - p^{k-2}\varphi'(0) - \dots - \varphi^{(k-1)}(0) \doteq \\ & \circ \varphi^k(x), \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Тогда, по теореме умножения имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)dt \circ \\ & \circ K_m^*(p) \left[p^m\Phi(p) - p^{m-1}\varphi(0) - \dots - \varphi^{(m-1)}(0) \right] \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Поэтому интегро-дифференциальное уравнение (3.7.3) перейдет в следующее уравнение:

$$\Phi(p) \left[p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{m=0}^s K_m^*(p)p^m \right] = A(p) \quad (3.7.6)$$

где $A(p)$ – некоторая известная функция от p .

Из уравнения (3.7.6) находим $\Phi(p)$ – операторное решение задачи. Находя оригинал для $\Phi(p)$, получим решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (3.7.3), удовлетворяющего начальным условиям (3.7.2).

Пример. Найти решение следующего интегро-дифференциального уравнения

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)dt = e^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям: $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$

Так полагая, что $\varphi(x) \equiv \Phi(p)$, находим:

$$\varphi'(x) \equiv p\Phi(p), \quad \varphi''(x) \equiv p^2\Phi(p) - 1; \quad K^*(p) \equiv \frac{1}{p-2}.$$

Тогда операторное уравнение данного уравнения имеет вид:

$$p^2\Phi(p) - 1 + \frac{1}{p-2}p\Phi(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Откуда, находим изображение искомого решения

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2p} = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Используя табличные соотношения и свойство линейности, находим, что искомым решением уравнения данного уравнения будет функция:

$$\varphi(x) = e^x - 1 \text{ при } x \geq 0.$$

§ 8 Вычисление несобственных интегралов

Один из способов вычисления несобственных интегралов вида

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

основан на применении следующей теоремы операционного исчисления о связи «конечного» значения оригинала и «начального» значения изображения.

Теорема. Если $\varphi(t) \square \Phi(p)$ и существует конечный предел $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, то тогда имеет место:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p).$$

Из этой теоремы и известного соотношения:

$$\int_0^p f(t) dt = \frac{1}{p} F(p), \quad \text{где } [f(t) \square F(p)]$$

при условии сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ следует соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = F(0). \quad (3.7.1)$$

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Решение. Так как, $\sin t \square \frac{1}{p^2 + 1}$, то тогда по теореме интегрирования изображения имеем

$$\sin t \square \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Откуда, применяя формулу (3.7. 1), находим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Другой способ вычисления несобственного интеграла основан на использовании следующей теоремы интегрирования по параметру:

Пусть функции:

$$f(t, u) \text{ и } \psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du \text{ и } Lf(t, u) = F(p, u).$$

являются оригиналами.

Тогда, применяя теорему об интегрировании по параметру, будем иметь:

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u) du. \quad (3.7.2)$$

Поэтому, если несобственный интеграл, определяющий функцию $\Psi(p)$, необходимо вычислить, то для отыскания несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du$$

достаточно найти оригинал для функции $\Psi(p)$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du \doteq \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u) du. \quad (3.7.3)$$

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{\alpha^2 + u^2} du.$$

Решение. В данном случае имеем, что:

$$L(\cos tu) = \frac{p}{p^2 + u^2}$$

Поэтому, в соответствии с формулой (3.7.2) находим

$$\begin{aligned} L\left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{\alpha^2 + u^2} du\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{p du}{(p^2 + u^2)(\alpha^2 + u^2)} = \\ &= p^2 \frac{p}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2 + u^2} - \frac{du}{p^2 + u^2} \right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} \right) = \frac{\pi}{2\alpha p + \alpha}. \end{aligned}$$

Затем, учитывая, что:

$$L\left(\frac{1}{p+\alpha}\right) = e^{-\alpha t}.$$

Откуда, находим;

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{\alpha^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t} = 0.$$

Третий способ вычисления несобственных интегралов опирается на следующую теорему Парсеваля:

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$ и функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ являются аналитическими при $\operatorname{Re} p \geq 0$, то

$$\int_0^{+\infty} f_1(u)F_2(u)du = \int_0^{+\infty} F_1(v)f_2(v)dv. \quad (3.7.4)$$

При этом из сходимости одного из этих интегралов следует сходимость другого.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u}{u} du$, при $\alpha > 0$.

Решение. Имеем $(e^{-\alpha u} \sin \beta u) \doteq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}, \eta(t) = \frac{1}{t}$.

Затем, полагая:

$$f_1(u) = e^{-\alpha u} \sin \beta u, \quad F_2(u) = \frac{1}{u}$$

находим:

$$F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad f_2(v) = \eta(v).$$

Поэтому, по формуле (7.3) получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\beta \eta(v) dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (\eta(v) = 1).$$

В силу того, что

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v+\alpha}{\beta} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$$

Таким образом, несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u}{u} du = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

ГЛАВА 4

Применение операционного исчисления к решению задач математической физики

Математическая физика занимает особое положение и в математике, и в физике, находясь на стыке этих наук, и представляет собой теорию математических моделей физических явлений. Математические методы изучения моделей физики не только позволяют получить количественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной точностью ход реальных процессов, но и дают возможность проникнуть в суть физических явлений, выявить скрытые закономерности, предсказать новые эффекты.

При этом особое место в физических задачах занимают модельные дифференциальные уравнения с частными производными первого и второго порядков, которая представляет собой часть общей теории дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 1 Методы применения операционного исчисления к решению задач математической физики

Математические модели задач математической физики, приводят к исследованию модельных дифференциальных уравнений с частными производными относительно искомой функции от нескольких переменных. Исследование различных явлений природы и техники во многих случаях сводится к решению линейных дифференциальных уравнений в частных производных, составляющих один из классов, так называемых уравнений математической физики.

В общем случае линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции u , зависящей от двух независимых переменных x и t имеет вид:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + Cu + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_1 \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad (4.1.1)$$

где A, B, C, A_1, B_1 - непрерывные функции от x , заданной в промежутке $0 \leq x \leq l$ считая, что $A > 0$.

На практике, для случая двух независимых переменных, чаще всего встречаются следующие основные уравнения математической физики:

1. Волновое уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Это уравнение является простейшим уравнением гиперболического типа. К исследованию

этого модельного уравнения приводит рассмотрение различных волновых процессов, например, колебаний струны, продольное колебаний стержня и т.д.

2. Уравнение теплопроводности: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Это уравнение является простейшим уравнением параболического типа. К исследованию этого модельного уравнения приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде и т.д.

3. Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Это уравнение является простейшим уравнением эллиптического типа. К исследованию этого модельного уравнения приводит рассмотрение задач нестационарных динамических процессов и явлений.

Для уравнений, которые будут в дальнейшем рассмотрены, принимается, что переменная t изменяется на полупрямой: $0 \leq t < \infty$, а переменная x в конечном или бесконечном промежутке.

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять определенным требованиям: решение существует в каком-то классе функций; решение является единственным в некотором классе функций; решение непрерывно зависит от данных задачи (от начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения). Для решения дифференциального уравнения с частным производными всегда необходимо указать область определения функции, в которой должна быть определена искомая функция.

Одним наиболее эффективным средством решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных являются методы операционного исчисления на основе использования преобразования Лапласа. Как правило, рассматривается два основных случая дифференциального уравнения (4.1.1):

1. $A_1 < 0$, что соответствует гиперболическому типу уравнения;
2. $A_1 = 0$, $B_1 < 0$, что соответствует параболическому типу.

Допустим, что некоторый процесс описывается функциями $x(t)$, $y(t)$,, которые и являются искомыми. На математическом языке это означает, что между этими, а также некоторыми заданными функциями составляются уравнения. Однако, часто оказывается, что уравнения, связывающие образы искомых функций, значительно проще и их значительно легче решить, чем уравнения для исходных функций – преобразов., так, например, если неизвестная функция

дифференцируется, то ее образ умножается на p , а если она интегрируется, то ее образ делится на p , так, что действия над образами значительно проще, чем над прообразами. В этом случае от уравнений над прообразами следует перейти к уравнению для образов. Решая полученное уравнение, находим образы искомых функций, а затем возвращаемся к прообразам.

Конечно, не любые уравнения удается решить таким способом. Прежде всего требуется, чтобы уравнение было *линейным* или легко могли быть преобразованы в линейные. Желательно, чтобы коэффициенты были постоянными, в противном случае, как правило, существенно усложняется. Однако, если эти условия выполнены, то операционный метод, т.е. переход от прообразов к образам значительно часто облегчает нахождения требуемых функций. Такой метод опирается на четко разработанную систему правил и формул перехода, которые и составляют операционное исчисление.

Рассмотрим общие принципы применения операционного метода при решении краевых задач для уравнения теплопроводности. При этих условиях поставленную нестационарную задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти решение $u(x, t)$ данного уравнения (4.1.1) для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$$

(причем второе условие задается в случае $A_1 < 0$) и граничными условиями

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad a \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} + \beta \frac{\partial u}{\partial t}|_{x=l} = \gamma u(x, t)|_{x=l}$$

где α, β, γ – постоянные. Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ второе граничное условие отпадает.

Предполагается также, что: $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являющиеся функциями от аргумента t , могут служить оригиналами и что изображения искомой функции и ее производных имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt, \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial x} dt &= \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt = \frac{d \bar{u}(p)}{dx}, \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt = \frac{d^2 \bar{u}(p)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Здесь, p рассматривается только как параметр. Изображения частных производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ определяются следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \circ p\bar{u} - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \circ p^2\bar{u} - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

или, с учетом начальных условий, они могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \circ p\bar{u} - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \circ p^2\bar{u} - p\varphi(x) - \varphi(x);$$

и граничные условия:

$$\bar{u}|_{x=0} = f(p), \quad \left[\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \beta(p\bar{u} - \varphi(x)) \right]_{x=t} = \gamma \bar{u}|_{x=t}$$

Таким образом, решение уравнения (4. 1.1) сводится к решению операторного уравнения

$$A \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + B \frac{d \bar{u}}{dx} + M \bar{u} + N = 0, \quad (4.1.2)$$

где $M = C - A_1 p^2 + B_1 p$, $N = -A_1 p \varphi - A_1 \varphi - B_1 \varphi$, при этом p – параметр, обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Найдя изображение искомой функции $u(x, t)$, с помощью таблицы для формулы обращения можно определить оригинал.

§ 2 Применение операционного исчисления к решению некоторых задач математической физики

Рассмотрим ряд элементарных задач, решение которых находится методами операционного исчисления.

В качестве примера, рассмотрим уравнение теплопроводности, описывающее процессы передачи тепла в однородном изотропном теле.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (4.2.1)$$

где a^2 – коэффициент температуропроводности, который считаем постоянной величиной; $f(x, t)$ – функция, характеризующая плотность внутренних источников.

Рассмотрим для уравнения (4.2.1) первую краевую задачу. Найдем решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения для: $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad (4.2.2)$$

и граничным условиям:

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \quad (4.2.3)$$

Предположим, что $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ и $f(x, t)$ являются функциями-оригиналами по переменной t . Переменную x будем считать при выполнении преобразования Лапласа неизменной. Это означает, что каждому определенному значению x соответствует свое изображение функции $u(x, t)$:

$$U(x, p) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt = L\{u(x, t)\}. \quad (4.2.4)$$

Тогда, учитывая (4.2.2), получим изображение частной производной

$$L\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p) - \varphi(x).$$

Учитывая, что интегрирование по t и дифференцирование по x в преобразовании Лапласа перестановочны, получим:

$$L\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} L\{u(x, t)\} = \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} \quad (4.2.5)$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L\{u(x, t)\} = \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}. \quad (4.2.6)$$

Предположим, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются оригиналами и

$$\psi_1(t) \doteq \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \doteq \Psi_2(p). \quad (4.2.7)$$

Тогда граничные условия (9.3) дают

$$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=e} = \Psi_2(p). \quad (4.2.8)$$

Так как в результате преобразования Лапласа частные производные по t устраняются, то в изображающем уравнении остаются только частные производные по x . Это означает, что изображающее уравнение представляет собой следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0, \quad (4.2.9)$$

где $F(x, p) \doteq f(x, t)$, которое требуется решить при граничных условиях (4.1.8),

Решая начально-краевую задачу (4.1.8 – 4.1.9) для уравнения и обращая полученное решение, найдем функцию $u(x, t)$, являющуюся решением этой задачи.

Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения (4.1.1) типа уравнения теплопроводности, а также краевые задачи для волнового уравнения и для некоторых других уравнений более общего вида.

1. Задача. (о малых колебаниях стержня в случае периодической внешней силы).

Стержень длины l находится в состоянии покоя и один его конец закреплен, а к свободному концу приложена сила $A \sin \omega t$, направленная по оси стержня.

Уравнение колебаний стержня, как известно из курса математической физики [8], имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.2.10)$$

где $u = u(x, t)$ – продольное смещение, a – скорость звука, удовлетворяющего начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.2.11)$$

и граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(e, t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \quad (4.2.12)$$

где E – модуль упругости.

Как известно, по закону Гука сила, действующая вдоль стержня, равна: $A \sin \omega t = sE \frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=e} = \frac{A}{sE} \sin \omega t$.

Площадь сечения стержня S считаем равной единице. Пусть $u(x, t) \equiv U(x, p)$,

Тогда имеем:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \equiv p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$$

или с учетом (4.1.11) имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv p^2 U(x, p), \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 u(x, p)}{\partial x^2}.$$

Тогда, операторное уравнение, соответствующее уравнению (4.1.10), имеет вид

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = -p A \frac{1}{p^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.2.13)$$

Граничные условия для уравнения (4.1.10) получаем из (4.1.12)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t = \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\omega}{E(p^2 + \omega^2)} \quad (4.1.14)$$

Интегрируя уравнение (4.1.12), как однородное уравнение с постоянными коэффициентами, получаем операторное решение:

$$U(x, p) = a_1 e^{-\frac{p}{a} x} + a_2 e^{\frac{p}{a} x}$$

$$U(x, p) = c_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + c_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x$$

Пользуясь граничными условиями (4.1.13), определяем произвольные постоянные:

$$\begin{cases} 2c_1 = 0, \\ c_1 \frac{p}{a} sh \frac{p}{a} l + c_2 \frac{p}{a} ch \frac{p}{a} l = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = \frac{A\omega a}{E(p + \omega) p ch_a e}. \end{cases}$$

Итак, операторное решение исходного уравнения (4.1.10) имеет вид

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{E} \frac{sh \frac{p}{a} x}{p(p + \omega) ch_a e}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A(p) = sh \frac{p}{a} x; \quad B(p) = p(p^2 + \omega^2) ch \frac{p}{a} e.$$

Тогда, тогда операторное решение принимает вид:

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{A(p)}{B(p)}$$

$$B(p) = (p^2 + \omega^2) ch \frac{p}{a} l + 2p \frac{E}{2} ch \frac{p}{a} l + \frac{1}{a} p(p^2 + \omega^2) sh \frac{p}{a} l.$$

Решая уравнение $B'(p) = 0$ и, принимая во внимание, что $ch \frac{p}{a} l = \cos l \frac{p}{a} l$, находим нули производной функции $B(p)$:

$p = 0, \quad p = \pm i\omega, \quad p = \pm i\omega_k, \quad$ где $\omega_k = \frac{\pi a}{e} (k - \frac{1}{2})$ ($k = 1, 2, \dots$), являющиеся простыми полюсами функции $U(x, p)$.

Тогда, оригинал $u(x, t)$ для изображения $U(x, p)$ находим по теореме разложения. В результате находим:

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} \left\{ \left(\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt} \right)_{p=0} + 2Re \left[\frac{A(i\omega)}{B(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(i\omega_k)}{B'(i\omega_k)} e^{i\omega_k t} \right] \right\}.$$

Подставляя в это равенство значения функций $A(p)$ и $B'(p)$ в полюсах, а также учитывая, что $shz = isinz$, находим:

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} 2Re \left[\frac{e^{i\sin \frac{\omega x}{a} e} e^{i\omega t}}{-2\omega \cos \frac{\omega}{a} l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\sin \frac{\omega_k x}{a} e} e^{i\omega_k t}}{a i \omega_k (\omega - \omega_k) \sin \frac{\omega_k}{a} l} \right].$$

Таким образом, искомое решение данного уравнения имеет вид

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E} \left[\frac{\sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\omega \cos \frac{\omega}{a} l} + \frac{2a}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{\omega_k x}{a} \sin \omega_k t}{\omega_k (\omega_k - \omega)} \right],$$

где $\omega_k = \frac{\pi a}{e} (k - \frac{1}{2})$ ($k = 1, 2, \dots$).

2. Задача (об определении отклонения жестко закрепленной струны).

Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством: $u(x, 0) = A \sin(\frac{\pi x}{l})$, $0 \leq x \leq l$; начальная скорость равна нулю. Найти отклонение $u(x, t)$ при $t > 0$.

Дифференциальное уравнение колебания струны, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Начальные условия, согласно условию задачи, имеют вид:

$$u(0, t) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0;$$

граничные условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Тогда, соответствующее данной начально-краевой задаче, операторное уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} \cdot \bar{u} = -pA \cdot \frac{1}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

при этом граничные условия примут вид:

$$\bar{u}_{x=0} = \bar{u}_{x=l} = 0.$$

Операторное уравнение является однородным уравнением первого порядка, общее решение которого имеет вид:

$$\bar{u} = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x},$$

а частное решение неоднородного линейного уравнения будем искать в виде

$$-\bar{U} = C_1 \cos \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для нахождения произвольных постоянных, находим производные:

$$\bar{U}' = -C_1 \cdot \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \cdot \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \bar{U}'' = -C_1 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cos \frac{\pi x}{l} + C_2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Затем, применяя свойство линейности, составляем уравнение относительно неизвестных C_1 и C_2

$$-\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -C_2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{l^2} \right) \sin \frac{\pi x}{l} - C_1 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{l^2} \right) \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Откуда, находим неизвестные значения: $C_1 = 0, C_2 = \frac{pA}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}}.$

Таким образом, общее решение операторного уравнения имеет вид:

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая граничные условия, получим

$$\bar{u}(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Таким образом, искомое решение определяется функцией вида:

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0; u(0, t) = u_0$$

и граничным условиями условия: $0 < x < \infty, t > 0$.

Полагая, $u(x, t) \equiv \bar{u}(x, p)$, составим для данного дифференциального уравнения с частными производными соответствующее ему операторное уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{u}(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} \bar{u}(x, p) = 0$$

Общее решение полученного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, имеет вид:

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{-x \frac{\sqrt{p}}{a}} + C_2 e^{x \frac{\sqrt{p}}{a}}$$

Согласно условию, функции $u(x, t)$ и $\bar{u}(x, p)$ при $x \rightarrow \infty$ являются ограниченными, потому $C_2 = 0$. Используя граничное условие:

$$\bar{u}(x, p) |_{x=0} = \frac{u_0}{p},$$

находим произвольную постоянную: $C_1 = \frac{u_0}{p}$.

Тогда, операторное решение примет следующий вид:

$$\bar{u} = \left(\frac{u_0}{p} \right) e^{-x \frac{\sqrt{p}}{a}}$$

Используя соотношение:

$$\frac{1}{p} e^{-x \frac{\sqrt{p}}{a}} \equiv \text{Erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right),$$

находим оригинал для функции $\bar{u}(x, p)$.

Таким образом, искомое решение данного уравнения имеет вид:

$$\bar{u}(x, p) = u_0 \text{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right),$$

где, как известно:

$$\text{Erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau = 1 - \text{erf} \sqrt{t}$$

Следовательно, окончательно искомое решение представимо в виде:

$$u(x, t) = u_0 \text{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-\tau^2} d\tau \right).$$

Пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = A \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Решение. Операторное уравнение, соответствующее данному уравнению в частных производных, имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - a^2 \rho \bar{u} = -a^2 A \sin \frac{\pi x}{l},$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$u(x, \rho) = C_1 e^{-a\sqrt{\rho}x} + C_2 e^{a\sqrt{\rho}x} + \frac{A}{\rho + (n^2\pi^2)/(a^2l^2)} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая граничные условия: $\bar{u}_{x=0} = \bar{u}_{x=l} = 0$, получим операторное решение

$$\bar{u}(x, p) = \frac{A}{\rho + (n^2\pi^2)/(a^2l^2)} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда, оригиналом этого решения является функция:

$$u(x, t) = A e^{-(n^2\pi^2)t/(a^2l^2)} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$u(x, 0) = 0 \quad (x > 0)$$

и граничным условиям: $u(0, t) = 0, \quad u(h, t) = u_0$.

Решение. напишем операторное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a^2} \bar{u} = 0,$$

которое следует решить при начальных условиях:

$$\bar{u}(0, t) = 0, \quad \bar{u}(h, t) = u_0/p.$$

Тогда, общее решение операторного уравнения записываем в виде

$$\bar{u}(x, p) = A \operatorname{ch} \sqrt{p/a} x + B \operatorname{sh} \sqrt{p/a} x. \quad (*)$$

Используя граничные условия, определим постоянные А и В. Тогда находим:

$$A=0, \quad \frac{u_0}{p} = B \operatorname{sh} \sqrt{p/a} h,$$

Откуда, находим, что: $B = \frac{u_0}{p \operatorname{sh} \sqrt{p/a} h}$.

Подставляя найденные значения А и В в равенство (*), получим операторное решение:

$$u = \frac{u_0}{p} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} ax}{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} h}.$$

Согласно формуле обращения Римана-Меллина, находим оригинал

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\pi i} \int_{a-l\infty}^{a+l\infty} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} ax}{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} h} \frac{dp}{p}. \quad (**)$$

Для вычисления интеграла найдем вычеты подинтегральной функции. Приравнивая знаменатель нулю и учитывая, что корни гиперболического синуса являются чисто мнимыми и равными $lk\pi$, находим:

$$sh\sqrt{p/ah} = 0, \quad \sqrt{p_k/ah} = lk\pi \text{ т.е. } p_k = -\frac{k^2\pi^2 a}{h^2} \quad (k \in N).$$

Все k полюсов-простые, отличные от нуля; поэтому, применяя теорему Коши о вычетах, получаем

$$u(x, t) = \sum_{(p_k)} \text{res} F(p) e^{pt},$$

где $F(p) = \frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{sh\sqrt{\frac{p}{ax}}}{p sh\sqrt{\frac{p}{ah}}}$,

причем степень $M(p)$ не превосходит степени $N(p)$. Тогда

$$\frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(p_k)}{p_k N(p_k)} e^{p_k t}$$

где:

$$\frac{M(0)}{N(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{sh\sqrt{p/ax}}{sh\sqrt{p/ah}} = \frac{x}{h}, \quad \text{а} \quad \frac{M(p_k)}{p_k N(p_k)} = -\frac{2lsh(\frac{lk\pi x}{h})}{k\pi ch(lk\pi)}.$$

Выразив гиперболические функции через круговые функции, получим

$$\frac{2\sin(\frac{k\pi x}{h})}{\pi k \cos(k\pi)} = (-1)^k \frac{2 \sin(\frac{k\pi x}{h})}{\pi k}.$$

Таким образом, равенство принимает вид:

$$u(x, t) = u_0 \left[\frac{x}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k * e^{-\frac{ak^2\pi^2 t}{h^2}} * \frac{\sin(\frac{k\pi x}{h})}{k} \right]$$

Задача. (О нагревании полубесконечного стержня, теплоизолированного на боковой поверхности)

Пусть имеется однородный стержень, расположенный вдоль полуоси абсцисс $[0 \leq x < \infty]$, площадь поперечного сечения которого мала и равна F (m^2). Рассматриваем процесс нагревания стержня, начальная температура которого равна нулю. Температура среды, в которую помещен стержень, отлична от нуля. Если через u обозначить температуру [град], через t - время [час], то, как известно из курса

математической физики, уравнение распространения тепла имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.2.15)$$

Здесь $a^2 = \frac{\lambda}{c\varsigma}$ - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности [Вт/м. град], ς - теплоемкость (дж/кг. град), c - плотность стержня [кг/м³].

Согласно условию задачи, необходимо найти решение указанного уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$v(x, 0)=0; \quad v(\infty, t)=0; \quad v(0, t)=v_c = \text{const} \quad (4.2.16)$$

Для удобства приведем задачу (11-34) - (11-35) к безразмерному виду, положив:

$$\frac{v}{v_c} = T; \quad \frac{x}{\sqrt{F}} = \xi; \quad \frac{d^2 t}{F} = \tau \quad (4.2.17)$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \quad (4.2.18)$$

$$T(\xi, 0) = 0; \quad T(\infty, \tau) = 0; \quad T(0, \tau) = 1 \quad (4.2.19)$$

Введем в рассмотрение преобразование Лапласа:

$$\bar{T} = \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\xi, \tau) d\tau \quad (4.2.20)$$

Применяя последнее к выражениям (11.34а) и (11.35а), найдём:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} - p\bar{T} = 0 \quad (4.2.21)$$

$$\bar{T}(0) = \frac{1}{p}; \quad \bar{T}(\infty) = 0 \quad (4.2.22)$$

Легко видеть, что общее решение дифференциального уравнения (11.38) имеет вид:

$$\bar{T} = A e^{-\sqrt{p}\xi} + B e^{\sqrt{p}\xi}$$

Удовлетворяя условиям (11.39), найдём, что $B = 0$, $A = \frac{1}{p}$. Стало быть,

$$\bar{T} = \frac{e^{-\xi\sqrt{p}}}{p} \quad (4.2.23)$$

Обращаясь к таблице изображений (таблица 2), находим:

$$T = \text{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \quad (4.2.24)$$

или же

$$v = v_c \text{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \quad (4.2.25)$$

В последних выражениях:

$$\operatorname{erfc}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta -$$

известная функция, хорошо изученная в теории теплопроводности и диффузии. Эта функция табулирована, и таблицы значений этой функции можно найти во многих справочниках

2°. **Ту же задачу рассмотрим** для случая, когда на конце стержня $x = 0$ происходит теплообмен по закону Ньютона:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - hv\right)_{x=0} = -hv_c, \quad (4.2.26)$$

где h – коэффициент внешней теплопроводности [1 м]. Приводя задачу к безразмерному виду по формулам (11.36), найдём:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad (4.2.27)$$

удовлетворяющего условиям:

$$T(\xi, 0) = 0; \quad T(\infty, \tau) = 0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} - \sigma T\right)_{\xi=0} = -\sigma; \quad (\sigma = h\sqrt{F}) \quad (11.45)$$

Применив к задаче (11.44) - (11.45) преобразование Лапласа, получим более простую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения.

$$\begin{aligned} \bar{T}'' - p\bar{T} &= 0 \\ \bar{T}(\infty) &= 0; \quad \bar{T}'(0) - \sigma\bar{T}(0) = -\frac{\sigma}{p} \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Решая эту задачу, находим:

$$\bar{T} = \sigma \frac{e^{\xi - \sqrt{p}\xi}}{p(\sqrt{p} + \sigma)} \quad (4.2.29)$$

Обращаясь к таблице изображений определяем

$$\frac{e^{-\xi\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p} + \sigma)} \frac{1}{\sigma} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{1}{\sigma} e^{\sigma^2\tau + \sigma\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right),$$

а тогда

$$T = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{\sigma^2\tau + \sigma\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + h\sqrt{t}\right) \quad (4.2.30)$$

Из последнего выражения можно найти вид решения в «размерных» величинах:

$$v = v_c \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - e^{h^2 a^2 t + hx} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right) \right] \quad (4.2.31)$$

Задача, таким образом, решена полностью.

Задача об остывании стержня конечной длины

Пусть имеется однородный стержень конечной длины l . Требуется решить задачу об остывании стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x, 0) = v_0 = \text{const}; v(l, t) = 0; \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.32)$$

Рассмотрим переменные

$$T = \frac{v}{v_c}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \tau = \frac{a^2 t}{l^2} \quad (4.2.33)$$

и приведем задачу к (II, 51) к безразмерному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \\ T(\xi, 0) = 1; T(1, \tau) = 0; \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.34)$$

Обращаясь к преобразованию Лапласа (II, 37), получим следующую задачу для обыкновенного дифф. уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T}'' - p \overline{T} = -1 \\ \overline{T}(0) = 0; \overline{T}(1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.35)$$

Решение задачи (II, 53) не представляет трудностей, легко установить, что

$$\overline{T} = \frac{1}{p} - \frac{ch\xi\sqrt{p}}{p \, ch\sqrt{p}}$$

или же,

$$p \overline{T} = 1 - \frac{ch\xi\sqrt{p}}{ch\sqrt{p}}$$

Обращаясь к каталогу изображений (см. справочник Диткина В.А. и Прудникова А.П. стр. 275), находим:

$$T = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2\tau}{4}} \cos \frac{\pi(2k+1)\xi}{2},$$

или же,

$$v = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{\pi(2k+1)x}{2l} \quad (4.2.36)$$

Таким образом, решение найдено.

Задача (о малых колебаниях струны)

Пусть имеется струна конечной длины $2l$; середина струны пусть совпадает с началом координат. Тогда, как известно из курса математической физики, уравнение малых колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2.37)$$

Здесь u - отклонение струны от положения равновесия, t - время, $a^2 = T/\rho$, T - натяжение, ρ - плотность струны. Сформулируем начальные и граничные условия задачи. Пусть при $t = 0$

$$u(x, 0) = h \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (4.2.37)$$

- начальная форма струны; h - наибольшее отклонение,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (4.2.38)$$

- начальный импульс; и, наконец,

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0 \quad (4.2.39)$$

- условия, отражающие закрепление концов струны.

Задачу (II, 55) - (II, 58) приведем к безразмерному виду, положив:

$$v = \frac{u}{h}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{at}{l}.$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \\ v(\xi, 0) &= 1 - \xi^2; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = 0; \quad v(-1, \tau) = v(1, \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.40)$$

Применяя к уравнению и условиям (II, 59) преобразование Лапласа, найдем

$$\left. \begin{aligned} V'' - p^2 V &= -p(1 - \xi^2) \\ V(-1) &= V(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.41)$$

где

$$V = \int_0^\infty e^{-p\tau} v \, d\tau$$

Решение задачи (II, 60), как легко в этом убедиться, имеет вид:

$$V = 2 \frac{ch \, p \xi}{p^3 ch \, p} + \frac{1 - \xi^2}{p} - \frac{2}{p^3}$$

Это решение задачи о колебании струны в области изображений. Обращаясь к каталогу изображений [см. справочник Диткина-Прудникова, стр. 276 формула (24, 47)] и пользуясь теоремой о свертках (см. §16), устанавливаем

$$v(\xi, \tau) = 1 - \xi^2 + \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi\tau}{2} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi\xi}{2} \quad (4.2.42)$$

Отсюда нетрудно перейти и к размерной «форме» решения:

$$u(x, t) = h \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] + \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi at}{l} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \quad (4.2.42)$$

Задача. (Движение вязкой жидкости по наклонной плоскости)

Пусть вязкая несжимаемая жидкость (слой малой толщины h) начинает движение из состояния покоя по плоскости, наклоненной к горизонтали под углом $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Если u, v – компоненты скорости по осям x и y , а оси направлены: x – вдоль плоскости, а y – перпендикулярно плоскости, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости, p – давление, g – ускорение силы тяжести, то уравнения движения будут иметь вид [:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \\ -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.43)$$

Это уравнение Навье-Стокса, причем последнее уравнение носит название уравнения неразрывности. Вследствие малости величины h , будем полагать $v = 0$, а тогда из системы (II, 63) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.44)$$

Из второго уравнения (II, 64) находим

$$p = -\rho g y \cos \alpha + f(x, t)$$

Здесь $f(x, t)$ —произвольная функция своих аргументов. Так как ясно, что при $y = h, p = p_0$, то мы устанавливаем, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

а тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.2.44)$$

Для выделения единственного решения уравнения (II, 65) необходима сформулировать начальные и граничные условия. Так как движение началось из состояния покоя, то

$$u(y, 0) = 0$$

Граничные условия отражают физическую корректность задачи, а именно: $u(0, t) = 0$ - прилипание, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=h} = 0$ - отсутствие касательного напряжения на свободной поверхности жидкости.

Таким образом, мы имеем следующую задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g \sin \alpha + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, 0 \leq y \leq h, 0 \leq t \leq \alpha \\ u(0, t) &= 0; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.45)$$

Последнюю задачу можно привести к безразмерному виду, если положить

$$u = U u_*; \quad y = h\eta; \quad t = \frac{h^2}{v} \tau, \quad (4.2.46)$$

где u_* -некоторая характерная скорость

Тогда (II, 66) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= b + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad b = \frac{gh^2 \sin \alpha}{\sqrt{u_*}} \\ U(\eta, 0) &= 0; U(0, \tau) = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.47)$$

Применяя к (II, 68) преобразования Лапласа, найдем

$$\left. \begin{aligned} U^{**} - pU &= -\frac{b}{p} \\ U(0) &= 0; U'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.48)$$

§ 3 Операционные методы в физике

Если материальная точка m движется по данному закону: $x = x(t)$, то тогда скорость ее движения определяется как производная $x'(t)$ – ее скорость, а ускорение ее движения в момент времени t представляет вторую производную: $x''(t)$. Перемещение точки за время от t_1 до t_2 находится по формуле:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t) V t$$

При решении многих задач физики применяют, согласно второму закону Ньютона

$$m x'' = F$$

где F – равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку m .

Рассмотрим несколько примеров применения операционных методов к решению физических задач, приводящих к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. Груз ρ находится на горизонтальной плоскости и прикреплен к пружине жесткости k , массой которой пренебрегаем. Конец пружины закреплён на плоскости; коэффициент трения при движении равен μ , коэффициент трения покоя — μ_0 . В начальный момент пружина сжата на α единиц длины. Найти закон движения груза; определить моменты наибольших последовательных удлинений и сжатий пружины и величину их. Когда движение прекратится и сколько колебаний сделает груз?

Решение. Чтобы груз пришел в движение, нужно чтобы в начальный момент восстанавливающая сила пружины была больше силы трения покоя; $ka > \mu_0 p = \mu_0 mg$, откуда $a > \frac{\mu_0 mg}{k}$, введём обозначение $\frac{k}{m} = \omega^2$. Движение может начаться, если $a > \frac{k\mu_0 g}{\omega^2}$

Движение будет происходить вдоль прямой, по которой направлена пружина. Эту прямую примем за ось ox , поместив начало координат в конец нерастянутой пружины. Силы, действующие на груз:

а) восстанавливающая сила пружины $F_1 = -kx$,

б) сила трения $F_2 = \mp \mu mg = \mp \mu mg$. Сила трения направлена в сторону, противоположную направлению движения, знак перед ней противоположен знаку x' . Поэтому ее можно записать в виде $F_2 = -\mu mg \operatorname{sgn} x'$. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Уравнение движения груза будет иметь следующий вид

$$mx'' = -kx - \mu mg \operatorname{sgn} x',$$

или, после деления на m , переноса kx влево и применяя обозначение $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$x'' + \omega^2 x = -\mu g \operatorname{sgn} x'. \quad (4; 3; 1)$$

Пусть последовательные моменты наибольших удлинений и сжатий пружины будут $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. В начальный момент $\tau_0 = 0$ пружина сжата и $x_0 = -\alpha$; в момент τ_n движение груза прекращается в силу того, что восстанавливающая сила пружины в этот момент окажется меньше силы трения покоя.

Так как первоначально пружина была сжата, то в промежутке $0 < t < \tau_1$, скорость $x' > 0$, в промежутке $\tau_1 < t < \tau_2$ $x' < 0$ и т.д.

В силу этого функцию $\operatorname{sgn} x'$ можно выразить через единичную функцию $\eta(t)$ следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x' = [1 - \eta(t - \tau_1)] - [\eta(t - \tau_1) - \eta(t - \tau_2)] + [\eta(t - \tau_2) - \eta(t - \tau_3)] - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} [\eta(t - \tau_{n-1}) - \eta(t - \tau_n)] = 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \eta(t - \tau_i) + (-1)^n \eta(t - \tau_n).$$

Внося это выражение $\operatorname{sgn} x'$ в уравнение (5; 6; 1), приходим к следующему окончательному виду уравнения движения груза:

$$x'' + \omega^2 x = -\mu g \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \eta(t - \tau_i) \right\} \quad (4; 2; 2)$$

(здесь отбросили последнее слагаемое в выражении $\operatorname{sgn} x'$, так как мы приняли, что в момент $t = \tau_n$ движение прекращается; поэтому при движении

$$t \leq \tau_n \text{ и } u(t - \tau_n) \equiv 0).$$

Находим изображающее уравнение, используя начальные условия (при $t = 0$ $x_0 = -a$, $\dot{x}_0 = 0$)

$$(s^2 + \omega^2) \overline{x(s)} + sa = -\frac{\mu g}{s} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i e^{-\tau_i t} \right\}$$

Отсюда

$$\overline{x(s)} = -\frac{as}{s^2 + \omega^2} - \frac{\mu g}{s(s^2 + \omega^2)} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i e^{-\tau_i t} \right\} =$$

$$= -\frac{as}{s^2 + \omega^2} - \frac{\mu g}{\omega^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i e^{-\tau_i t} \right\}$$

По изображению находим закон движения груза

$$x(t) = a \cos \omega t - \frac{\mu g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{2\mu g}{\omega^2} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i u(t - \tau_i) \quad (4; 3; 3)$$

$$[1 - \cos \omega(t - \tau_j)].$$

Для отыскания моментов остановки движения (моменты наибольших удлинений и сжатий пружины) находим $x'(t)$ (при дифференцировании по t единичные функции ведут себя как постоянные множители)

$$x'(t) = (a\omega - \frac{\mu g}{\omega}) \sin \omega t - \frac{2\mu g}{\omega^2} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i u(t - \tau_i) \quad (4; 3; 4)$$

$$\times \sin \omega(t - \tau_j).$$

Последовательно находим для промежутков времени $(0, \tau_1), \tau_1, \tau_2) \dots$:

$$1) \quad 0 < t < \tau_1; u(t - \tau_j) = 0; (j = 1, 2, \dots, n - 1)$$

$$x(t) = -a \cos \omega t - \frac{\mu g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t); x'(t) = (a\omega - \frac{\mu g}{\omega^2}) \sin \omega t$$

$x'(\tau_1) = 0$, причем τ_1 — наименьший *положительный* корень уравнения $x'(t) = 0$. Отсюда $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega}$; $x(\tau_1) = a - \frac{2\mu g}{\omega^2}$.

$$2) \quad \frac{\pi}{\omega} = \tau_1 < t < \tau_2; u(t - \tau_1) = 1; u(t - \tau_j) = 0$$

$$(j = 2, 3, \dots, n - 1).$$

$$x(t) = -a \cos \omega t - \frac{\mu g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{2\mu g}{\omega^2} [1 - \cos \omega (t - \frac{\pi}{\omega})];$$

$$x'(t) = (a\omega - \frac{\mu g}{\omega}) \sin \omega t + \frac{2\mu g}{\omega^2} \sin \omega (t - \frac{\pi}{\omega});$$

$x'(\tau_2) = 0$, причем τ_2 — наименьший корень уравнения $x'(t) = 0$, больший $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega}$. Отсюда $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega}$; $x(\tau_2) = -a + \frac{4\mu g}{\omega^2}$ и т.д.

Последовательно найдем значения: $\tau_3 = \frac{3\pi}{\omega}$; $\tau_4 = \frac{4\pi}{\omega}$; ...; $\tau_n = \frac{n\pi}{\omega}$,

и тогда

$$x(\tau_3) = +a - \frac{6\mu g}{\omega^2}; \quad x(\tau_4) = -a + \frac{8\mu g}{\omega^2}; \dots$$

$$x(\tau_n) = (-1)^{(n-1)} [a - \frac{2n\mu g}{\omega^2}].$$

Так как по нашему предположению движение прекращается при $t = \tau_n$, то в этот момент времени восстанавливающая сила пружины, равная $k|x(\tau_n)| = m\omega^2|x(\tau_n)|$, должна быть меньше силы трения покоя, равной $\mu_0 mg$.

Итак, число колебаний n определится из условия

$$m\omega^2|x(\tau_n)| = m\omega^2 (a - \frac{2n\mu g}{\omega^2}) < \mu_0 mg$$

Откуда
$$n > \frac{a\omega^2 - \mu_0 g}{2\mu g} \quad (4; 3; 5)$$

При этом n — наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее неравенству (4; 3; 5).

Задача 2. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия тем, что точка его подвеса совершает в горизонтальном направлении n полных гармонических колебаний с малой амплитудой a и частотой ω . Найти закон колебаний маятника. Рассмотреть случаи:

$$а) \sqrt{\frac{a}{l}} = k \neq \omega; \quad б) \sqrt{\frac{a}{l}} = k = \omega \text{ (резонанс).}$$

Решение. Если обозначить через $x(t)$ отклонение маятника (по горизонтали) от начального положения равновесия, а через $y(t)$ – соответствующее отклонение точки подвеса, то уравнение движения маятника будет

$$x'' = -\frac{g}{l}(x - y) = -k^2(x - y).$$

По условию $y = a [1 - u(t - \frac{2\pi n}{\omega})] \sin \omega t = a \sin \omega t - au(t - \frac{2\pi n}{\omega}) \sin \omega(t - \frac{2\pi n}{\omega})$ (поскольку $\sin \omega(t - \frac{2\pi n}{\omega}) = \sin(\omega t - 2\pi n) = \sin \omega t$)

Поэтому уравнение движения маятника может быть окончательно записано в виде

$$x'' + k^2x = k^2a [\sin \omega t - u(t - \frac{2\pi n}{\omega}) \sin \omega(t - \frac{2\pi n}{\omega})]. \quad (4; 3; 6)$$

Поскольку при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, изображающее уравнение запишется в виде

$$(s^2 + k^2)x(s) = \frac{k^2\omega a}{s^2 + \omega^2} (1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} s}).$$

Отсюда находим

$$\overline{x(s)} = \frac{k^2\omega a}{(s^2+k^2)(s^2+\omega^2)} (1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} s}). \quad (4; 3; 7)$$

Рассмотрим отдельно случаи $\omega \neq k$ и $\omega = k$:

а) $\omega \neq k$

$$\overline{x(s)} = \frac{ka}{\omega^2 - k^2} \left[\frac{k\omega}{s^2 + k^2} - \frac{k\omega}{s^2 + \omega^2} \right] (1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} s})$$

По изображению находим закон колебаний маятника

$$x(t) = \frac{ka}{\omega^2 - k^2} \left\{ [\omega \sin kt - k \sin \omega t] - u(t - \frac{2\pi n}{\omega}) [\omega \sin k(t - \frac{2\pi n}{\omega}) - k \sin \omega(t - \frac{2\pi n}{\omega})] \right\};$$

или после очевидных преобразований для $t < \frac{2\pi n}{\omega}$ и $t > \frac{2\pi n}{\omega}$

при $0 \leq t \leq \frac{2\pi n}{\omega}$ $x(t) = \frac{ka}{\omega^2 - k^2} (\omega \sin kt - k \sin \omega t)$;

при $t > \frac{2\pi n}{\omega}$ $x(t) = \frac{2k\omega a \omega^2 - k^2 \frac{2\pi n}{\omega}}{\omega^2 - k^2} \sin \frac{k\pi n}{\omega} \cos k(t - \frac{\pi n}{\omega})$

б) $\omega = k$

$$\overline{x(s)} = \frac{k^3 a}{(s^2 + k^2)^2} (1 - e^{-\frac{2\pi n}{k} s}) = \frac{a}{2} \left[\frac{k}{s^2 + k^2} - \frac{k(s^2 - k^2)}{(s^2 + k^2)^2} \right] (1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} s}).$$

Отсюда по изображению находим закон колебаний маятника

$$x(t) = \frac{a}{2} \left\{ \left(\sin kt - kt \cos kt \right) - u \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \left[\left(\sin k \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) - k \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \cos k \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \right) \right] \right\}$$

или при $0 \leq t \leq \frac{2\pi n}{k}$

$$x(t) = \frac{a}{2} (\sin kt - kt \cos kt)$$

а при $t > \frac{2\pi n}{k}$

$$x(t) = -\pi na \cos kt$$

Задача 3. На вал АВ насажены два маховика А и В с одинаковыми моментами инерции I ; жесткость вала λ , моментом инерции его можно пренебречь. В начальный момент $t = 0$ маховику А сообщается принудительное вращение с постоянной угловой скоростью ω , которое поддерживается в течение времени T , по истечении которого система предоставляется самой себе. Определить закон движения обоих маховых колес.

Решение. Обозначим углы поворота маховиков А и В через ϕ и φ . Для промежутка времени $0 \leq t \leq T$ имеем для маховика А: $\phi = \omega t$.

Дифференциальное уравнение движения маховика В будет следующее:

$$I\varphi'' + \lambda(\varphi - \omega t) = 0 \quad (4.3.8)$$

При $t > T$ дифференциальные уравнения движения маховиков будут:

$$I\phi'' + \lambda(\phi - \varphi) = 0; \quad I\varphi'' + \lambda(\varphi - \phi) = 0 \quad (4.3.9)$$

В данном случае нецелесообразно пытаться объединить обе системы (4.3.8) и (4.3.9) в одну; проще, решив первую из них, определить по найденному решению начальные условия для второй (в момент времени $t = T$).

Решение первой системы дает для угла φ + (при нулевых начальных условиях) следующее значение

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt.$$

Здесь (через k^2 обозначено отношение $\frac{\lambda}{I}$)

Отсюда находим начальные условия для системы (4.3.9)

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \omega T; \quad \phi'_0 = \omega; \quad \varphi_0 = \omega T - \frac{\omega}{k} \sin kT \\ \varphi'_0 &= \omega(1 - \cos kT) \end{aligned}$$

Перенесем начало отсчета времени, полагая $t = T$ чтобы начальные условия для системы (β) были заданы при $t_1 = 0$. Перепишем систему (β) в виде

$$\begin{aligned} \phi'' + k^2\phi - k^2\varphi &= 0; \\ -k^2\phi + \varphi'' + k^2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4; 3; 10)$$

Изображающая система (по аргументу t_1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} (s^2 + k^2)\bar{\phi} - k^2\bar{\varphi} &= s\omega T + \omega - k^2\bar{\phi} + (s^2 + k^2)\bar{\varphi} \\ &= s\omega T + \omega \frac{\sin kT}{k} - \omega \cos kT \end{aligned}$$

Исключая поочередно φ и $\bar{\phi}$, находим

$$s^2(s^2 + 2k^2)\bar{\phi} = (s^2 + 2k^2)(s\omega T + \omega) - s\omega k \sin kT - \omega k^2 \cos kT$$

$$s^2(s^2 + 2k^2)\varphi = (s^2 + 2k^2)(s\omega T + \omega) - (s^2 + k^2)\left[\frac{s\omega}{k} \sin kT + \cos kT\right]$$

Отсюда определяем $\bar{\varphi}$ и $\bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = \frac{\omega T}{\omega} + \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega \sin kT}{2k} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2k^2} \right] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 2k^2} \right];$$

$$\bar{\varphi} = \frac{sT}{s} + \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega \sin kT}{2k} \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 2k^2} \right] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 2k^2} \right].$$

По найденным изображениям определяем φ и ϕ

$$\phi = \omega T + \omega t_1 - \frac{\omega \sin kT}{2k} [1 - \cos k\sqrt{2}t_1] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[t_1 - \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}t_1 \right]$$

$$\varphi = \omega T + \omega t_1 - \frac{\omega \sin kT}{2k} [1 + \cos k\sqrt{2}t_1] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[t_1 + \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}t_1 \right]$$

Чтобы вернуться к аргументу t , надо в этих формулах положить $t_1 = t - T$. Окончательный ответ (для T) будет иметь вид

$$\phi = \omega t - \frac{\omega \sin kT}{2k} [1 - \cos k\sqrt{2}(t - T)] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[t - T - \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}(t - T) \right];$$

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega \sin kT}{2k} [1 + \cos k\sqrt{2}(t - T)] - \frac{\omega \cos kT}{2} \left[(t - T) + \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}(t - T) \right].$$

ГЛАВА 5

Операционные методы в решении задач электротехники

Операционные методы Лапласа занимают важное место в общей теории систем электрических систем. Другим примером интегрального исчисления, играющего не менее важную роль в приложениях, является преобразование Фурье. Глубокая внутренняя связь этих двух преобразований привела к развитию спектральных методов анализа нестационарных динамических процессов.

Традиционно операционными методами анализа волновых процессов теории электрических систем считаются преобразование Фурье (спектральный анализ) и преобразования Лапласа (операционное исчисление). Это объяснимо тем, что их использование позволяет исследовать динамические системы, которые описываются сложными интегро-дифференциальными уравнениями, более простыми алгебраическими уравнениями.

§ 1 Основные сведения из теории преобразования Фурье

Ввиду большой важности интегрального преобразования Фурье в исследованиях физических процессов, приведем некоторые основные свойства этого преобразования. Прежде чем перейти к этому преобразованию, приведем некоторые замечания о периодических функциях.

С точки зрения физики преобразование Фурье является более естественным, чем преобразование Лапласа. Это связано с тем, что из физики известно, что преобразование Фурье преимущественно используется для исследования периодических процессов. Характерной особенностью многих физических процессов и явлений, наблюдаемых в природе и технике, является их периодичность, т. е. они повторяются в одной и той же последовательности, в одном и том же виде через определенный промежуток времени T , называемый периодом. Различные величины, связанные с рассматриваемыми периодическими процессами и явлениями, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям. Следовательно они представляют периодические функции от времени t , характеризующие равенством:

$$\varphi(t + T) = \varphi(t),$$

описывающим гармонические колебания. Таковыми, например, являются сила и напряжение переменного тока. Простейшими периодическим функциями, как известно, являются функции вида:

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5.1.1)$$

описывающее гармонические колебания, в которых расстояние s колеблющейся точки, является синусоидальной функцией времени t . Здесь s – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия; A – амплитуда колебания, φ_0 – начальная фаза, ω – круговая частота, связанная с периодом T соотношением: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Любую функцию вида (1.1) можно представить равносильным выражением:

$$s = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (5.1.2)$$

Математическое описание гармонических колебаний и их наглядное графическое изображение существенно зависит от выбранного способа представления синусоидально изменяющихся величин. На практике различают несколько способов представления: в виде тригонометрических функций; в виде графиков изменения во времени; в виде векторов; графического изображения на комплексной плоскости.

Функции, описываемые формулами (5.1.1), (5.1.2) называются простой гармоникой. Колебания, получающиеся в результате наложения нескольких простых гармонических колебаний, называются сложными гармоническими колебаниями.

Например, в случае наложения двух простых гармонических колебаний получим:

$$s = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

в случае, когда круговые частоты φ_1 и φ_2 равны между собой, то результирующее движение оказывается снова простой гармоникой с той же частотой. В случае, когда $\varphi_1 \neq \varphi_2$, тогда результирующее колебание будет периодическим, если существует такое число T , что имеют место равенства: $T = r_1 T_1$ и $T = r_2 T_2$, где r_1 и r_2 целые числа. Отсюда вытекает, что отношения частот ω_1 и ω_2 должны равняться отношению этих чисел. Следовательно, частоты должны быть соизмеримы, так как в противном случае, результирующее колебание не будет периодическим. Анализ показывает, что вообще сумма простых гармоник при различных значениях параметров A_k и φ_k и целых числах r_k и n приводят к самым разнообразным периодическим функциям.

В терминах механики это означает, что наложение простых гармонических колебаний создает разнообразные периодические

движения, далеко не похожие на простые гармонические колебания. Геометрически это означает, график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически, как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно сказать, что сложное колебание, характеризуемое функцией $\varphi(t)$, разлагается на отдельные гармонические колебания.

Синусоидальная функция времени, аналитически записываемая в виде (5.1.1) лежит в основе объяснения многих основополагающих законов и механизмов волновых процессов, характерной особенностью которого является периодичность. Оказалось, что если привлечь к рассмотрению бесконечные суммы простых гармоник, то практически любую функцию можно разложить на простые гармоники.

Если функция $f(t)$ определена в интервале $(-\pi; \pi)$ и имеет кусочно-непрерывную производную, то ее можно представить в виде суммы тригонометрических функций, называемой рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kt + b_k \cos kt), \quad (5.1.3)$$

коэффициенты ряда a_k и b_k определяются по следующим формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos \frac{k\pi\tau}{l} d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin \frac{k\pi\tau}{l} d\tau.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений функции при стремлении независимой переменной слева и справа т.е. к значению $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$, где x_0 - точка разрыва.

Теорию о разложении функций в тригонометрические ряды принято называть гармоническим анализом. Из этого следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, достаточно широк. Поэтому, они нашли широкое применение в многочисленных разделах математики и предоставляют удобные методы решения многих весьма трудных задач математической физики. Гармонический анализ являются важнейшими инструментами изучения периодических синусоидальных сигналов при анализе электрических систем с такими сигналами. В основе этого анализа лежит идея возможности приближения процесса $f(t)$ с помощью некоторого, специально подобранного разложения на простейшие гармоники, т. е. слагаемые, протекающие по закону синуса и косинуса. Механически это означает, что любое, сколь угодно

сложное, периодическое колебание является суммой гармонических колебаний. Математически это соответствует представлению периодического сигнала $f(x)$ тригонометрическим рядом.

В теории разложения функций в ряды Фурье, достаточно часто используют более предпочтительную на практике, так называемую комплексную запись ряда Фурье. В его основе лежит геометрическая интерпретация комплексных чисел, в соответствии с которой любой комплексной величине $z = x + iy$ на комплексной плоскости соответствует точка M с декартовыми координатами $(x; y)$ и полярными координатами $(r; \varphi)$ которому соответствует вектор, выходящий из нулевой точки длиной $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, образующий с осью абсцисс угол наклона $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, где: $-\pi < \varphi < \pi$.

Тогда конец этого вектора при возрастании t описывает окружность радиуса. Геометрическая интерпретация комплексного числа позволяет представить любое комплексное число в тригонометрической и показательной формах записи:

$$z = x + iy = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}.$$

Для того, чтобы записать ряд Фурье в комплексном виде, преобразуем общий член ряда Фурье с помощью формул Эйлера, выражающих синус и косинус через показательную функцию:

$$\begin{aligned} a_k \sin nx + b_k \cos nx &= a_k \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_k \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \\ a_k \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + i b_k \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} &= \frac{a_k + i b_k}{2} e^{inx} - \frac{a_k - i b_k}{2} e^{-inx} = \\ = c_k e^{inx} + c_{-k} e^{-inx}. \end{aligned}$$

Полагая, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, для частичных сумм ряда Фурье получим выражение:

$$a_k \sin nx + b_k \cos nx = c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k e^{inx} + c_{-k} e^{-inx}) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{inx}$$

Для новых коэффициентов c_k , учитывая формулы для определения коэффициентов a_k и b_k , получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} c_k = \frac{a_k - i b_k}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos \frac{k\pi\tau}{l} d\tau - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin \frac{k\pi\tau}{l} d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left(\cos \frac{k\pi\tau}{l} - i \sin \frac{k\pi\tau}{l} \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{1-\pi} f(\tau) e^{-inx} d\tau. \end{aligned}$$

Итак, в точках дифференцируемости функции $f(x)$ с периодом 2π , правая часть ряда Фурье может быть представлена рядом Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (5.1.3)$$

где коэффициенты ряда находятся по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (5.1.4)$$

Ряды Фурье применяются не только для разложения функций, заданных на конечном интервале, но и для разложения периодической функции, заданной на всей оси.

Разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье, в случае произвольного интервала $(-l; l)$, имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}},$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{\pi n t}{l}} dt.$$

Если ряд Фурье сходится к функции $f(t)$ во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье.

Разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье, следует рассматривать как представление периодического процесса в виде суммы гармонических колебаний. Последовательность комплексных чисел c_n называется спектральной последовательностью функции $f(t)$, последовательность действительных чисел $|c_n|$ ее амплитудным спектром.

Таким образом, каждой функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям разложимости в ряд Фурье, (а именно: ограничена на этом отрезке; кусочно-непрерывна на нем (т.е. имеет на нем лишь конечное число точек разрыва первого рода); кусочно-монотонна (в частности имеет лишь конечное число экстремумов) ставится в соответствие определенная последовательность комплексных чисел: ее спектральная последовательность, и наоборот.

Если применять терминологию, принятую в операционном исчислении, то функция $f(t)$ играет роль оригинала, а ее спектральная последовательность – роль изображения.

Понятие и свойства интеграла Фурье.

Рассмотрим случай, когда функция $f(t)$ не является периодической, заданной на всей оси Ot . Будем считать, что функция $f(t)$ при этом удовлетворяет следующим условиям: в любом конечном интервале она может быть представлена рядом

Фурье; существует несобственный сходящийся интеграл от модуля функции $f(t)$, т.е. несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится.

Тогда функцию $f(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье, который в комплексной форме записи имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.1.8)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (5.1.9)$$

Так же как и для ряда Фурье в точках разрыва функции $f(t)$ ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений функции при стремлении независимой переменной слева и справа т.е. к значению: $\frac{f(t_0-0) + f(t_0)}{2}$, где t_0 – точка разрыва.

Выражение (5.1.8) называется интегралом Фурье функции f . Подобно тому, как сумма ряда Фурье при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию. С точки зрения физики это означает, что рассматриваемый процесс уже нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными (дискретными) частотами: $\omega_n = \frac{\pi n}{t}$, теперь для его построения необходимы гармонические колебания всех непрерывно изменяющихся частот. Обращаясь к физической иллюстрации, говорят, что в случае периодической функции $f(t)$ ей соответствует дискретный спектр, а непериодическая функция имеет непрерывный спектр и ей соответствует спектральная функция.

Модуль комплексной функции $|F(p)|$ называют амплитудной характеристикой функции или ее амплитудным спектром, а аргумент $arg F(p)$ – фазовым спектром.

В качестве примера найдем амплитудную характеристику функции:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Тогда, находим:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-ikx} dx = -\frac{e^{t(a+ik)}}{a+ik} = \frac{1}{a+ik}.$$

Следовательно, амплитудная характеристика, определяется формулой:

$$|F(p)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}}$$

Таким образом, формула (5.1.9) позволяет по функции $f(t)$ найти ее спектральную функцию $F(\omega)$, а формула (5.1.8), наоборот, по спектральной функции $F(\omega)$ восстановить исходную функцию $f(t)$.

§ 2 Связь между преобразованиями Лапласа и Фурье

Операционное исчисление, созданное английским физиком О.Хевисайдом, которое значительно позже было математически строго обосновано на основе теории функций комплексного переменного. Оно также непосредственно связано с теорией преобразования Фурье. Для того, чтобы выяснить какой физический смысл имеет так называемый интеграл Лапласа: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ipt} dt$, рассмотрим одностороннее преобразование Фурье. При этом преобразовании функция $f(t)$ считается равной нулю при $t < 0$. Пусть функция:

$$f(t) = 0 \text{ при } -\infty < t < x_0 \text{ и } |f(t)| \leq Me^{at} \text{ при } t_0 < t < \infty.$$

Тогда, полученную формулу (5.1.8) комплексного преобразования Фурье, можно записать, считая k комплексным числом, в следующем виде:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt} dt.$$

Следовательно, вводя вместо функции $f(t)$ функцию $f(t)e^{in(t)}$ устраняется расходимость интеграла (5.1.8) практически для всех практически встречающихся функций. Тогда, как легко проверить, функция $F(p)$ будет аналитической функцией, во всяком случае при $Im k < -\alpha$. В результате, обозначая, $ik = -p$ при $x \geq 0$, приходим к преобразованию Лапласа, так что рассмотренные ранее свойства преобразования Лапласа легко переформулировать и на преобразование (5.1.3). С целью обычного в математике нормирования заменим функцию $f(x)$ функцией $2\pi f(x)$. Тогда имея ввиду, что $d\sigma = idp$ в следующем окончательном виде:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt} dt$$

В электротехнике принята следующая терминология. Выражения e^{-ikt} называются гармониками, а числа $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - волновыми числами функции (5.1.3). Если откладывать эти числа на числовой оси, то получится совокупность отдельных точек. Таковую совокупность принято называть дискретной, а соответствующий спектр – дискретным

Важно отметить, что область применимости преобразования Фурье значительно уже области применимости преобразования Лапласа. Это связано с тем, что преобразование Фурье и обратное

преобразование Фурье определены на множестве функций, для сходимости несобственного интеграла функция должна удовлетворять стеснительному условию: сходимости несобственного интеграла: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$. Наличие в интеграле Лапласа дополнительного множителя: e^{-at} , расширяет класс оригиналов до функций, растущих на бесконечности не быстрее некоторой показательной функции. Наличие в интеграле Лапласа дополнительного множителя e^{-at} , «гасящего» значения $f(t)$ для больших значений аргумента, расширяет класс оригиналов до функций, растущих на бесконечности не быстрее показательной функции.

Нетрудно заметить, что если показатель роста функции $f(t)$ равен нулю и в формуле обращения Лапласа можно принять $s_0 = 0$, то преобразование Лапласа отличается от преобразования Фурье только несущественным множителем. В этом смысле можно говорить, что преобразование Фурье является частным случаем Лапласа.

Это объяснимо тем, что формулы (5.2.3), (5.2.4) аналогичны формулам разложения функции $g(t)$ в ряд Фурье. Формулу (5.2.3) можно рассматривать как разложение функции $g(t)$ в непрерывный спектр простых гармонических колебаний $G(\sigma)e^{-i\sigma t}$, частоты которых меняются не скачками, как в случае рядов Фурье, а непрерывным образом.

Функцию $G(p)$, определяемую формулой (5.2.4), можно рассматривать аналог коэффициентов G_n ряда Фурье, т.е. как комплексную амплитуду колебания с частотой σ . Величина $|G(p)|$ показывает, какова доля этого колебания в спектре колебания $g(t)$, поэтому функцию $G(p)$ называют спектральной функцией.

Таким образом, в основе обоих операционных методов лежит пара операционных преобразований: прямое и обратное. В рамках этих преобразований в рассмотрение вводится два пространства: пространство оригиналов и пространство изображений. Прямое операционное преобразование ставит в соответствие каждому оригиналу-сигналу его операционный образ-изображение. Отметим, что периодическая функция имеет дискретный спектр и ей соответствует спектральная последовательность C_k , а не периодическая функция имеет непрерывный спектр и ей соответствует спектральная функция $F(\omega)$. Здесь следует отметить, что при периодическом процессе $|C_k|$ давал амплитуду отдельной

гармоники, то при непериодическом процессе величина $|F(\omega)|$ представляет закон распределения амплитуд, в зависимости от частоты ω . Спектральное представление (5.4.5) непериодических функций представляет собой удобный и достаточно часто используемый на практике в электротехнике способ их изучения, заменяя исследование самой функции анализом её спектральной плотности.

Принципиальной особенностью прямого операционного преобразования является то, что многим сложным соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения и операции над их изображениями. Правила, определяющие какие математические операции необходимо выполнить над изображениями, когда над соответствующими оригиналами выполняются те или иные операции, составляют основу методов операционного преобразования.

§ 5 Понятие о расчете электрических цепей с помощью операционного исчисления

Операционное исчисление является эффективным средством расчета электрических цепей, что подробно рассматривается в теоретических основах электротехники. Рассмотрим несколько задач на приложении метода операционного исчисления к теории электрических цепей.

Пусть имеем электрическую цепь, состоящую из индуктивности L , сопротивления R и емкости C , к которой приложена электродвижущая сила (ЭДС), равная E .

Обозначим силу тока через $i = i(t)$, электродвижущую силу (ЭДС) через $V = V(t)$ и заряд конденсатора $Q = Q(t)$. Их изображения обозначим соответственно:

$$\dot{i} = I(p), \quad V = V(p), \quad Q = Q(p).$$

Значения этих величин в момент времени $t = 0$ обозначим через:

$$I(0) \doteq I_0; \quad V(0) \doteq V_0; \quad Q(0) \doteq Q_0.$$

Из электротехники известно, что сила тока i определяется из уравнения:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E, \quad (5.5.1)$$

при этом заряд конденсатора Q и сила тока i связаны соотношением

$$\frac{dQ}{dt} = i \quad (5.5.2)$$

Из уравнения (2) находим:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad (5.5.3)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), получаем для Q уравнение

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E \quad (5.5.4)$$

Дифференцируя обе части уравнения (1), и используя уравнение (2), получаем для определения тока i следующее уравнение:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} Q = E.$$

После подстановки в уравнения (5.5.1) изображений для каждого слагаемого получим операторное уравнение:

$$L(p^2 I - I) + RI + \frac{Q}{C} = V \quad (5.5.5)$$

Далее из равенства $I = \frac{dQ}{dt}$ следует, что $I = \frac{dQ}{dt}$, с другой стороны из соотношения (II,20) найдем

$$\frac{dQ}{dt} = p Q - Q_0,$$

следовательно

$$p Q - Q_0 \doteq I;$$

Отсюда

$$Q = \frac{I}{p} + \frac{Q_0}{p} \quad (5.5.6)$$

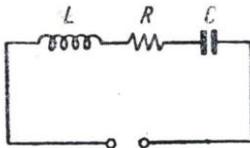
Исключим Q из соотношения (2) и (3) и получим основное операторное уравнение:

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp}) I = V + LI_0 - \frac{Q_0}{Cp} \quad (5.5.7)$$

В этом уравнение I и V являются неизвестными функциями от p , т. е. уравнение содержит две неизвестные функции. Для решения конкретных задач, связанных с нахождением силы тока $I(t)$ необходимо знать $V(t)$.

Для получения представления об этом методе рассмотрим несложный пример.

Пример. Найдем силу тока $I = I(t)$ при включении электродвижущую силы (ЭДС) равной единице, в простейшую электрическую цепь состоящую из последовательно включенных самоиндукции L , сопротивления R и емкости C .



Из теории электротехники известно, что ток $I = I(t)$ и напряжение $u(t)$ на концах элемента цепи, содержащего только самоиндукцию L , только сопротивление R или только и емкость C , связаны соотношениями:

$$u(t) = L \frac{di}{dt}, \quad u(t) = R i(t), \quad u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

если начальный заряд на обкладках конденсатора равен нулю.

Учитывая характер электрической цепи, будем иметь следующее уравнение для определения силы тока в ней:

$$L \frac{di}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 1, \quad (5.5.7)$$

причем считаем: $i(0) = 0$, что соответствует задаче включения.

Пусть $i(t) \doteq I(p)$. Тогда, для исходного уравнения запишем следующее операторное уравнение:

$$L p I(p) + R I(p) + \frac{1}{C p} I(p) = \frac{1}{p}$$

Из которого находим операторное решение:

$$I(p) = \frac{1}{p(Lp + R + \frac{1}{Cp})}$$

Вводя обозначения:

$$\frac{R}{2L} = \alpha, \quad \frac{1}{Cp} = \omega^2, \quad \alpha < \omega^2, \text{ то есть } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

запишем операторное решение в следующем виде:

$$I(p) = \frac{1}{L(p^2 + 2\alpha p + \omega^2)} = \frac{1}{L[(p + \alpha)^2 + \omega^2]},$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$.

Отсюда, учитывая результат применения теоремы смещения к преобразованию оригинала, находим искомое значение тока в электрической цепи:

$$i(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Отметим, что величины α , ω , ω_0 имеют следующий физический смысл: α характеризует коэффициент затухания; ω – описывает круговую частоту контура; ω_0 круговая частота контура, которую имел контур, лишенный сопротивления. Принятое условие $\alpha < \omega^2$ выражает требование, чтобы рассмотренный контур был колебательный.

Рассмотрим несколько задач на приложении метода операционного исчисления к расчету электрических цепей.

Задача 1. К электрической цепи, в которую последовательно включены самоиндукция L , сопротивление R и емкость C с начальным током и зарядом, равными нулю, приложена электродвижущая сила, равная E_1 , при $0 < t < T$ и E_2 , при $t > T$, где E_1, E_2 и T – постоянные. Найти ток в цепи.

Решение. Обозначая через $i(t)$ ток и через Q ряд конденсатора, приходим к следующему уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = [1u(t - T)]E_1 + u(t - T)E_2$$

В силу того, что $\frac{dQ}{dt} = I$ и поскольку начальный заряд равен нулю,

$$Q = \int_0^t idt,$$

то первоначальное уравнение приводится к виду:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt = E_1 + u(t - T)(E_2 - E_1)$$

Переходим к изображающему уравнению, полагая $i(t) \doteq \overline{i(s)}$. Так как $i_0 = 0$, получаем следующее операторное уравнение

$$(Ls + R = \frac{1}{Cs}) \overline{i(s)} = \frac{E_1}{s} + \frac{E_2 - E_1}{s} e^{-Ts}$$

Откуда находим операторное решение:

$$\overline{i(s)} = \frac{\frac{E_1 + E_2 - E_1}{L} e^{-Ts}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} = \frac{\frac{E_1 + E_2 - E_1}{L} e^{-Ts}}{(s + k)^2 + n^2}$$

Здесь приняты обозначения:

$$k = \frac{R}{2L}; n^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0,$$

ограничиваясь рассмотрением только этого, наиболее общего случая.

По изображению $\overline{i(s)}$, используя таблицу соответствий находим ток:

$$i(t) = \frac{E_1}{Ln} e^{-kt} \sin nt + \frac{E_2 - E_1}{Ln} u(t - T) e^{-k(t-T)} \sin n(t - T)$$

Задача 2. Найти силу тока I , если известно, что к цепи приложена постоянная ЭДС, равная E в момент времени $t = 0$, и если $I_0 = Q_0 = 0$.

Решение. В операторе уравнения (5.5.7) подставим значения

$$I_0 = Q_0 = 0; \quad V = \frac{E}{p} \quad (5.5.8)$$

Тогда операторное уравнение примет вид

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp}) I = \frac{E}{p}$$

откуда, находим операторное решение:

$$I = \frac{E}{L(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL})};$$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$I = \frac{E}{L[(p + \frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})]}$$

При нахождении тока $I(t)$ рассмотрим три возможных случая и введем сокращенные обозначения. Во всех трех случаях обозначим:

$$\frac{R}{2L} = \mu$$

Первый случай. Пусть $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$, обозначим величину $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = n^2$ и получим

$$I(p) = \frac{E}{L[(p+\mu)^2+n^2]}.$$

Для нахождения оригинала $I(t)$ применим формулы смещения изображения и тогда получим:

$$I = \frac{E}{nL} e^{-\mu t} * \sin nt.$$

Второй случай. Пусть $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = 0$, в этом случае

$$I(p) = \frac{E}{L * (p + \mu)^2}$$

Для нахождения тока I применим теорему смещения изображения и формулу для изображения степенной функции и тогда получим:

$$I = \frac{E}{L} t e^{-\mu t}.$$

Третий случай. Пусть $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} < 0$, обозначим величину $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = -n^2$

Применяя формулы, получим:

$$I = \frac{E}{nL} e^{-\mu t} sh nt$$

Задача 3 К электрической цепи, в которую последовательно включены самоиндукция L , сопротивление R и емкость C с начальным током и зарядом, равными нулю, приложена электродвижущая сила, равная E_1 , при $0 < t < T$ и E_2 , при $t > T$, где E_1, E_2 и T – постоянные. Найти ток в цепи.

Решение. Обозначая через $i(t)$ ток и через Q заряд конденсатора, приходим к уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = [1u(t-T)]E_1 + u(t-T)E_2,$$

В силу того, что $\frac{dQ}{dt} = I$ и поскольку начальный заряд равен нулю, т.е.

$$Q = \int_0^t idt$$

Уравнение приводится к виду

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt = E_1 + u(t-T)(E_2-E_1)$$

Переходим к изображающему уравнению, полагая $i(t) \doteq \overline{i(s)}$. Так как $i_0 = 0$, получаем уравнение

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) \overline{i(s)} = \frac{E_1}{s} + \frac{E_2-E_1}{s} e^{-Ts}$$

Находим $\overline{i(s)}$

$$\overline{i(s)} = \frac{E_1 + \frac{E_2-E_1}{L} e^{-Ts}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}} = \frac{E_1 + \frac{E_2-E_1}{L} e^{-Ts}}{(s+k)^2 + n^2}$$

Здесь приняты обозначения $k = \frac{R}{2L}$; $n^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$

(ограничимся рассмотрением только этого, наиболее общего случая).

По изображению находим ток:

$$i(t) = \frac{E_1}{Ln} e^{-kt} \sin nt + \frac{E_2-E_1}{Ln} u(t-T) e^{-k(t-T)} \sin n(t-T)$$

Задача 4. Найти силу тока I , если известно, что цепь включается в переменную ЭДС, равную $E \sin \omega t$, и если $I_0 = Q_0 = 0$

Решение. В операторное уравнение (5.5.7) подставим $V = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}$ и

тогда получим операторное уравнение:

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp}) I = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Откуда находим изображение:

$$I = \frac{E\omega p}{(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})(p^2 + \omega^2)} = \frac{E\omega}{L} \cdot \frac{B}{(p+\mu)^2 + n^2} \cdot \frac{1}{(p^2 + \omega^2)},$$

где $\mu = \frac{R}{2L}$, $n^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}$.

Нетрудно видеть, что корни знаменателя комплексно-сопряженные

$$p_{1,2} = -\mu \pm ni; \quad p_{3,4} = \pm \omega i.$$

Они являются простыми полюсами $I(p)$ и поэтому в соответствии с формулой обращения можно написать:

$$I = 2 \frac{E \cdot \omega}{L} \operatorname{Re} \left[\frac{A(-\mu+ni)}{B'(-\mu+ni)} e^{(-\mu+ni)t} + \frac{A(\omega i)}{B'(\omega i)} e^{\omega i t} \right],$$

где $A(p) = p$; $B(p) = [(p + \mu)^2 + n^2] \cdot (p^2 + \omega^2)$.

Следует иметь в виду, что даже после сокращенных обозначений μ и n^2 дальнейшие выкладки очень трудоемки и громоздки и требуют большого напряжения и внимания. Схема решения этой задачи полностью совпадает с предыдущей задачей. Окончательному ответу после всех преобразований можно придать следующий вид:

$$I = \frac{E}{n(A^2+R^2)} e^{-\mu t} (nA \cos nt - \mu B \sin nt) - \frac{E}{(A^2+R^2)} (A \cos \omega t - R \sin \omega t),$$

где $A = L\omega - \frac{1}{C\omega}$; $B = L\omega + \frac{1}{C\omega}$; $\mu = \frac{R}{2L}$; $n^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}$.

Задача 5. В условиях предыдущей задачи 3 найти силу тока только для установившегося процесса.

В решении предыдущей задачи 3, в знаменателе изображения I четыре корня комплексные, попарно сопряженные числа: $(-\mu \pm ni)$ и $(\pm \omega i)$. Это привело к тому, что при нахождении силы тока $I(t)$ пришлось находить два вычета при $P_1 = -\mu + ni$ и $P_3 = \omega i$. Поэтому, в полученном результате для изображения I имеется, по существу два различных слагаемых. Первое слагаемое содержит множитель $e^{-\mu t}$. Если принять во внимание, что $\mu = \frac{R}{2L} > 0$, то с возрастанием

величины t , т.е. по ходу процесса, выражение $e^{-\mu t}$ уменьшается и довольно быстро приближается к нулю. Второе слагаемое при $p_0 = \omega i$ является по существу главным при нахождении силы тока I .

Процесс называют установившимся, если силу тока I принять равной

$$I = 2 \cdot \frac{E \omega}{L} \operatorname{Re} \left[\frac{A(\omega i)}{B'(\omega i)} e^{\omega i t} \right],$$

пренебрегая первым слагаемым, выражающим собой затухающий процесс.

Следует отметить, что такое упрощение вполне допустимо, так как найденная таким образом сила тока I практически мало отличается от истинной; однако математические выкладки значительно облегчаются. А именно:

$$A(p) = p; \quad B'(p) = [(p + \mu)^2 + n^2] 2p + 2(p + \mu)(p^2 + \omega^2) \\ A(\omega i) = \omega i; \quad B'(\omega i) = [(\omega i + \mu)^2 + n^2] 2\omega i + 2(\omega i + \mu)(\omega^2 i^2 + \omega^2);$$

$$B'(i\omega) = (n^2 + \mu^2 - \omega^2 + 2\mu\omega i)2\omega i = \left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 + 2\mu\omega i\right) \cdot$$

$$\cdot 2\omega i = \left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right) + 2\mu\omega i\right] 2\omega i;$$

$$\frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)} e^{\omega i t} = \frac{\omega i}{\left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right) + 2\mu\omega i\right] 2\omega i} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right) - 2\mu\omega i}{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 + 4\mu^2\omega^2} e^{\omega i t}.$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \frac{E\omega}{L} \operatorname{Re} \frac{1}{2} * \frac{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right) - \frac{R\omega}{L} i}{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 - \frac{R^2\omega^2}{L^2}} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= \frac{E\omega}{L \left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 - \frac{R^2\omega^2}{L^2}\right]} * \left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right) \cos \omega t + \frac{R\omega}{L} \sin \omega t\right] = \\ &= \frac{E\omega^2}{L^2 \left[\left(\frac{1}{CL} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2}\right]} \left[\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \cos \omega t + R \sin \omega t\right] = \\ &= \frac{E\omega^2}{\omega^2 \left[\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2\right]} \left[R \sin \omega t - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \cos \omega t\right] = \\ &= \frac{E}{A^2 + R^2} (R \sin \omega t - A \cos \omega t) \end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи в ответе введено значение A , в соответствии с введенными ранее формулами. Следует отметить, что полученный ответ совпадает со вторым слагаемым в формуле предыдущей задачи.

Задача 6. Элемент с ЭДС, равной E в момент времени $t = 0$, присоединяется к цепи в момент $t = T$ замыкается накоротко. Найти силу тока $I(t)$, если $I_0 = Q_0 = Q$.

Решение. По условию задачи:

$$V = \begin{cases} E & \text{при } 0 < t < T \\ 0 & \text{при } t > T \end{cases}$$

Следовательно, изображение можно определить следующей формулой

$$V = \int_0^T e^{-pt} * E dt = -\frac{E}{p} e^{-pt} = -\frac{E}{p} (e^{-pT} - 1) = \frac{E}{p} (1 - e^{-pT}).$$

В соответствие с табличными данными операторное уравнение для изображения I примет вид:

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right) I = \frac{E}{p} (1 - e^{-pT})$$

Отсюда, находим операторное решение:

$$I = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} * (1 - e^{-pT}) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} \frac{1}{C} - \frac{Ee^{-pT}}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} \frac{1}{C}$$

Для нахождения оригинала I применим результат решения задачи 4 и теорему запаздывания. В результате получим:

$$I = \begin{cases} \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin(nt) & \text{при } 0 < t < T \\ \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin(nt) - \frac{E}{nL} e^{-\mu(t-T)} * \sin[n(t-T)] & \text{при } t > T \end{cases}$$

Задача 7. Две одинаковые электрические цепи, состоящие из самоиндукции L , сопротивления R и емкости C , соединенных последовательно, связаны взаимной индукцией M . Имеет место идеальная связь, при которой $M = L$. Начальные токи и заряды равны нулю. К одной из цепей в момент времени $t = 0$ прилагается постоянное напряжение E_0 . Найти токи в обеих цепях.

Решение. Вводя обозначения i_1 и i_2 для токов, Q_1 и Q_2 для зарядов конденсаторов, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{Q_1}{C} + L \frac{di_2}{dt} = E_0, \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{Q_2}{C} + L \frac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Поскольку $Q_1 = \int_0^t i_1 dt$, $Q_2 = \int_0^t i_2 dt$ (начальные заряды равны нулю) и, кроме того, $i_1|_{t=0} = i_2|_{t=0} = 0$, переходя к изображениям, приходим к системе

$$\begin{aligned} (Ls + R + \frac{1}{Cs}) i_1(s) + Ls i_2(s) &= \frac{E_0}{s}, \\ Ls i_1(s) + (Ls + R + \frac{1}{Cs}) i_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} i_1(s) &= \frac{\frac{E_0}{2R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{2LC}}, \\ i_2(s) &= -\frac{\frac{E_0}{2R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{2LC}}. \end{aligned}$$

Предполагая, что $\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} = n^2 > 0$ находим токи в обеих цепях

$$i_1(t) = \frac{E_0}{2R} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E_0}{4Ln} e^{-\frac{Rt}{4L}} \sin nt$$

$$i_2(t) = -\frac{E_0}{2R} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E_0}{4Ln} e^{-\frac{Rt}{4L}} \sin nt$$

Преобразование Лапласа, которое является частным случаем интегрального преобразования вида:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) K(t, p) dt$$

ставит в соответствие каждому оригиналу $f(t)$ в соответствие изображение $F(p)$ по формуле:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (5.2.1)$$

и каждому изображению $F(p)$ оригинал по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (5.2.2)$$

Так как в формуле обращения Лапласа (2) интегрирование осуществляется по прямой $Re p = a$, то в этой формуле можно положить $p = a + i\sigma$ тогда она примет вид:

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(a + i\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma.$$

Введем новые обозначения:

$$f(t)e^{at} = g(t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma) = G(\sigma);$$

В этих новых обозначениях формула запишется в виде:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma. \quad (5.2.3)$$

Формулу (1) для прямого преобразования Лапласа можно записать в виде:

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(a + i\sigma) e^{-at} e^{i\sigma t} dt,$$

или в новых обозначениях, в виде:

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt \quad (5.2.4)$$

Нетрудно заметить, что формулы (5.2.3), (5.2.4) являются формулами обращения преобразования Фурье, связывающим функции:

$$g(t) = f(t)e^{-at} \text{ и } G(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma),$$

где a произвольное действительное число, большее показателя роста функции $f(t)$.

Задача 7. Две одинаковые электрические цепи, состоящие из самоиндукции L , сопротивления R и емкости C , соединенных последовательно, связаны взаимной индукцией M . Имеет место идеальная связь, при которой $M = L$. Начальные токи и заряды равны нулю. К одной из цепей в момент времени $t = 0$ прилагается постоянное напряжение E_0 . Найти токи в обеих цепях.

Решение. Вводя обозначения i_1 и i_2 для токов, Q_1 и Q_2 для зарядов конденсаторов, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{Q_1}{C} + L \frac{di_2}{dt} = E_0, \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{Q_2}{C} + L \frac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$Q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad Q_2 = \int_0^t i_2 dt,$$

так как начальные заряды равны нулю и, кроме того, $i_1|_{t=0} = i_2|_{t=0} = 0$, переходя к изображениям, приходим к системе

$$\begin{aligned} (Ls + R + \frac{1}{Cs}) i_1(s) + Ls i_2(s) &= \frac{E_0}{s}, \\ Ls i_1(s) + (Ls + R + \frac{1}{Cs}) i_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим операторные решения

$$\begin{aligned} i_1(s) &= \frac{\frac{E_0}{2R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{2LC}}, \\ i_2(s) &= -\frac{\frac{E_0}{2R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{2LC}}. \end{aligned}$$

Предполагая, что имеет место: $\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} = n^2 > 0$ находим токи в обеих цепях

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{E_0}{2R} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E_0}{4Ln} e^{-\frac{Rt}{4L}} \sin nt \\ i_2(t) &= -\frac{E_0}{2R} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E_0}{4Ln} e^{-\frac{Rt}{4L}} \sin nt \end{aligned}$$

§ 6 Импульсные функции

Функция $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ является особым изображением, тогда функции: $F(p) = 1, p, p^2, \dots$ которые не стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$, можно считать изображениями лишь в совершенно условном смысле. Эти условные обозначения и соответствующие им оригиналы были введены в рассмотрение Дираком, которые оказались полезными в ряде решения прикладных задач, в которых приходилось иметь дело с величинами, имеющими характер мгновенного импульса.

Рассмотрим функцию $\delta_\tau(t)$ определенную следующим образом:

$$\delta_\tau = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{в промежутке } (0; \tau), \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases} \quad (6; 5; 1)$$

Она представляет величину, которая действует лишь на отрезке $(0; \tau)$, где имеет постоянное значение $\frac{1}{\tau}$, суммарный эффект которой равен :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\tau(t) dt = 1$$

Предположим теперь, что $\tau \rightarrow 0$; семейство функций δ_τ , очевидно что расходится, но мы введем условную функцию $\delta(t)$, которую удем считать пределом такого семейства:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau = \delta(t),$$

и назвать импульсной функцией.

Таким образом, δ -функция представляет собой условное сокращенное образование для вполне определенного предельного процесса, который часто рассматривают при исследовании физических процессов, действующих в бесконечно малый промежуток с суммарным эффектом, равным единице. Введение этой функции сильно упрощает вычисления, связанные с таким предельным процессом: вместо того, чтобы производить выкладки до перехода к пределу и перейти к пределу в окончательном результате, переходят к пределу сразу, до выкладок. В большинстве физических задач законность такой перестановки вполне оправдана.

Механически эту функцию можно истолковать как силу постоянной величины и направления, действующую в течение малого промежутка времени с импульсом (за время действия), равным единице; эта сила, будучи приложена к материальной точке с

единичной массой, сообщит этой точке за время своего действия скорость $v = 1$, за время действия силы материальная точка переместится на отрезок длины $\frac{\tau}{2}$, а дальше будет двигаться с постоянной единичной скоростью.

Найдем изображение функции $\delta_{\tau}(t)$. Для этого запишем ее в виде $\delta_{\tau}(t) = \frac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau}$. (5; 6; 1)

Так как:

$$u(t) \doteq \frac{1}{s}, \text{ а } u(t - \tau) \doteq \frac{e^{-ts}}{s}$$

то по теореме запаздывания), то изображение функции $\delta_{\tau}(t)$ будет следующее:

$$\delta_{\tau}(t) \doteq \delta_{\tau}(s) = \frac{1 - e^{-ts}}{ts}. \quad (5; 6; 2)$$

Умножение импульсной функции первого порядка на постоянную не требует пояснений. Запаздывающая импульсная функция первого порядка $\delta(t - \tau)$ определяется аналогичными равенствами:

$$\delta(t - \tau) = 0 \text{ при } t \neq \tau; \delta(t - \tau) = \infty \text{ при } t = \tau; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (5.6; 3)$$

В качестве примера проинтегрируем (при нулевых начальных условиях) операционными методами следующие два простейших дифференциальных уравнения:

$$a) x'' = \delta(t - \tau); \quad б) x'' = \delta_1(t - \tau). \quad (5.6; 4)$$

Строим для них изображающие уравнения:

$$a) s^2 \bar{x}(s) = e^{-ts}, \quad б) s^2 \bar{x}(s) = se^{-ts} \quad (6; 5; 5)$$

Находим изображения искомых решений

$$a) \bar{x}(s) = \frac{1}{s^2} e^{-ts}; \quad б) \bar{x}(s) = \frac{1}{s} e^{-ts} \quad (5.6; 6)$$

Используя теорему запаздывания, находим решения предложенных уравнений

$$a) x(t) = u(t - \tau)(t - \tau); \quad б) x(t) = u(t - \tau) \quad (5; 6; 7)$$

Полученные результаты подтверждают приведенные выше истолкования свойств импульсных функций с точки зрения механики:

1) запаздывающая импульсная сила первого порядка $\delta(t - \tau)$ сообщает материальной точке единичной массы, находившейся первоначально в покое, в момент времени $t = \tau$ постоянную скорость $v = 1$,

2) запаздывающая импульсная сила второго порядка $\delta(t - \tau)$ сообщает той же материальной точке в аналогичных условиях в момент времени $t = \tau$ мгновенное перемещение единичной длины, не придавая ей ни скорости, ни ускорения.

В качестве второго примера проинтегрируем дифференциальное уравнение гармонических колебаний (при произвольных начальных условиях) с запаздывающими силами первого и второго порядков в качестве возмущающих сил (для общности при импульсных силах вводим множители v_0 и h):

$$\text{а) } x'' + \omega^2 x = v_0 \delta(t - \tau); \quad \text{б) } x'' + \omega^2 x = h \delta_1(t - \tau) \quad (5.6.8)$$

при начальных условиях $x = x_0, x' = x'_0$ при $t = 0$.

Строим изображающие уравнения:

$$\text{а) } (s^2 + \omega^2)x(s) = x_0 s + x'_0 + \omega_0 e^{-ts}; \quad (6; 3; 6)$$

$$\text{б) } (s^2 + \omega^2)x(s) = x_0 s + x'_0 + h s e^{-ts}$$

Находим изображения решений:

$$\text{а) } \overline{x(s)} = \frac{x_0 s + x'_0 + v_0 e^{-ts}}{s^2 + \omega^2}; \quad \text{б) } \frac{x_0(s) + x'_0 + h s e^{-ts}}{s^2 + \omega^2} \quad (5.6.9)$$

По найденным изображениям находим решения предложенных уравнений:

$$\text{а) } x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_0}{\omega} u(t - \tau) \sin \omega(t - \tau) \quad (5.6.10)$$

$$\text{б) } x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t + h u(t - \tau) \cos \omega(t - \tau)$$

Как видно из полученных решений, до момента $t = \tau$ оба гармонических колебания (как и следовало ожидать) тождественны, а в момент $t = \tau$ в первом случае движущаяся точка получит мгновенную дополнительную скорость v_0 , а во втором – мгновенное дополнительное смещение h , в обоих случаях – с вытекающим отсюда изменением характера дальнейшего движения.

В качестве третьего примера решим аналогичные задачи при наличии сопротивления движению, пропорционального скорости.

Уравнения движения (при прежних начальных условиях) будут

$$\text{а) } x'' + 2n x' + \omega^2 x = v_0 \delta(t - \tau); \quad (5.6.11)$$

$$\text{б) } x'' + 2n x' + \omega^2 x = h \delta_1(t - \tau).$$

Ограничимся случаем затухающих колебаний ($0 < n < \omega$).

Строим изображающие уравнения:

$$\text{а) } (s^2 + 2ns + \omega^2)x(s) = (s + 2n)x_0 + x'_0 + v_0 e^{-ts}$$

$$\text{б) } (s^2 + 2ns + \omega^2)x(s) = (s + 2n)x_0 + x'_0 + h s e^{-ts} \quad (5.6.12)$$

Находим изображения решений:

$$\text{а) } \overline{x(s)} = \frac{(s+2n)x_0 + x'_0 + v_0 e^{-ts}}{s^2 + 2ns + \omega^2} = x_0 \frac{s+n}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)} + \frac{nx_0 + x'_0 + v_0 e^{-ts}}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)}$$

$$\text{б) } \overline{x(s)} = \frac{(s+2n)x_0 + x'_0 + h s e^{-ts}}{s^2 + 2ns + \omega^2} = (x_0 + h e^{-ts}) \frac{s+n}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)} = \quad (6; 3; 11)$$

$$= \frac{nx_0 + x'_0 + n h e^{-ts}}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)}$$

По найденным изображениям находим решения предложенных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } x(t) &= e^{-nt} \left\{ x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} t + \frac{v_0 + x_0 n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} t \right\} + \\
 &+ \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} u(t - \tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} (t - \tau) \\
 \text{б) } x(t) &= e^{-nt} \left\{ x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + x_0'}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} t \right\} + \quad (6; 3; 12) \\
 &+ u(t - \tau) e^{-n(t-\tau)} \times \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} (t - \tau) - \\
 &- \frac{nh}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} (t - \tau)
 \end{aligned}$$

В обоих случаях, как и раньше, до момента $t = \tau$ движения тождественны. В момент $t = \tau$ первая точка под действием импульсной силы первого порядка получает, как и при отсутствии сопротивления, мгновенную дополнительную скорость v_0 . Но в движение второй точки, находящейся под действием импульсной силы второго порядка, наличие сопротивления вносит дополнительное искажение: в момент $t = \tau$ эта точка получает не только мгновенное дополнительное смещение h (как и при отсутствии сопротивления), но и мгновенную дополнительную скорость, равную $-2nh$ (чего при отсутствии сопротивления не было); чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать x по t и положить $t = \tau$: множитель при $u(t - \tau)$ в выражении для $x'(t)$ обратится при этом в « $2nh$ ».

Таким образом, наличие сопротивления не оказывает влияние на действие импульсных сил первого порядка, но изменяет характер действия импульсных сил второго порядка, придавая им, в дополнение к своим, функций импульсных сил первого порядка (не только смещение, но и изменение скорости!).

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г. Лунц Г. Л. Эльсгольд Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М. «Наука», 1965.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. ГИФМЛ, 1960.
3. Диткин В. А. Прудников А. П. Операционное исчисление. М. «Высшая школа», 1966.
4. Диткин В. А. Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М. «Высшая школа», 1965.
5. Карслоу Х. Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М. ИЛ, 1948.
6. Контрович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. М, ГИФМЛ, 1953.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление М. – Л, ГИТТЛ, 1950.
8. Шелковников Ф. А. Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М. «Высшая школа», 1961.

Приложение 1

Составим краткую таблицу, устанавливающую соответствие между некоторыми оригиналами (часто встречающимися на практике) и их изображениями.

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
8	$e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{at} \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$
11	$e^{at} \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$
12	t^n (n – целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$

15	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
16	$t \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$
17	$t \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
18	$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p - a)}{((p - a)^2 + \omega^2)^2}$
19	$e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$	$\frac{(p - a)^2 - \omega^2}{((p - a)^2 + \omega^2)^2}$
20	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$
21	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t \text{ ch } \omega t - \text{sh } \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
23	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi \pm \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$

Достаточно полная таблица оригиналов и изображений, позволяющая по заданному оригиналу находить изображение и наоборот, есть, в частности, в книге «Справочник по операционному исчислению» (авторы В.А. Диткин и П.И. Кузнецов).

Приложение 2

Рассмотренные свойства преобразования Лапласа представляет собой основные правила (аппарат) операционного исчисления. Для удобства пользования перечислим эти свойства.

1. Линейность: $c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \doteq c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p)$.

2. Подобие: $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$.

3. Смещение: $e^{at} \cdot f(t) \doteq F(p - a)$.

4. Запаздывание: $f(t - r) \doteq e^{-pr} \cdot F(p), r > 0$.

5. Дифференцирование оригинала:

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq p \cdot F(p) - f(0), \\ f''(t) &\doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \\ f'''(t) &\doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) = f''(0), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

6. Дифференцирование изображения

$$\begin{aligned} F'(p) &\doteq -t \cdot f(t), \\ F''(p) &\doteq (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

7. Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(r) dr \doteq \frac{F(p)}{p}$.

8. Интегрирование изображения: $\int_0^\infty F(p) dp \doteq \frac{f(t)}{t}$.

9. Умножение изображений: $F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(r) \cdot$

$$f_2(t - r) dr = f_1 * f_2.$$

10. Умножение оригиналов: $f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) \cdot$
 $F_2(p - z) dz.$

Приложение 3

Формулировки некоторых теоретических сведений, используемых в тексте.

Несобственные интегралы. При рассмотрении определённых интегралов мы предполагали, что область интегрирования ограничена, т.е. является отрезком $[a, b]$; для существования определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx$$

необходима ограниченность подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$. Определённые интегралы, для которых выполняются оба этих условия (ограниченность и область интегрирования) принято называть собственными; интегралы для которых нарушаются эти требования (т.е. неограниченна либо подынтегральная функция, либо область интегрирования, либо и то, и другое вместе) называют несобственными интегралами.

1. **Несобственный интеграл**, распространённый на интервал $(-\infty, \infty)$, выражается, по определению равенством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx,$$

причем предполагается, что a и b стремятся к своим пределам независимо друг от друга. Нередко в указанном смысле предела нет, но при условии, что $a = b$ он существует. Этот последний предел называется *главным значением* несобственного интеграла и обозначается символом.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B f(x) dx$$

Несобственный интеграл с бесконечным пределом, зависящий от параметра a

$$I(a) = \int_a^{+\infty} f(x, a) dx,$$

называется *правильно сходящимся* на отрезке $[a_1, a_2]$, если существует такая функция $\varphi(x)$, что

$$|f(x, a)| \leq \varphi(x);$$

при $x \geq a$ и всех значениях a на указанном отрезке и

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx < \infty.$$

Признаки сравнения для неотрицательных функций. При решении практических задач, важно в первую очередь установить сам факт сходимости, и только затем вычислять интеграл (к тому же первообразная часто не выражается через элементарные функции). Сформулируем ряд теорем, которые позволяют устанавливать сходимость и расхождение несобственных интегралов, не вычисляя их.

1. Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по любому отрезку $[a + \varepsilon, b]$ ($0 < \varepsilon < b - a$) и при $x > a$ удовлетворяют неравенствам: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ тогда: если сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$ то сходится и интеграл $\int_a^b g(x)dx$; если расходится интеграл $\int_a^b g(x)dx$ то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Эти утверждения имеют простой смысл: если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл от меньшей функции; если расходится интеграл от меньшей функции, то расходится интеграл от большей функции; в случаях, когда сходится интеграл от меньшей функции или расходится интеграл от большей функции, никаких выводов о сходимости второго интеграла сделать нельзя.

2. Признак сравнения в предельной форме. Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$ и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

- если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся;

- если сходится интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся.

Признак Дирихле. Интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:
1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $(a, b]$; 2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $(a, b]$, причём $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$

Признак Абеля. Интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна на $(a, b]$ и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится;
- 2) функция $g(x)$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна на $(a, b]$, то есть имеет конечный предел $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = A < \infty$.

Научное издание

Сербина Людмила Ивановна

**ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Монография

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 12.03.2024 г.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 8,54.
Тираж 500 экз. Заказ 286.

Типография ИП Тимченко О.Г.
Идентификатор - 6044707
355000, РФ, г. Ставрополь, ул. Тухачевского, 26,
ИНН 263401442118

Телефон/факс (8-86-52)42-64-32
ideya_plus@mail.ru