Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ИНФОРМАТИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Ставрополь
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ СТАВРОПОЛЬСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Е. М. Петлина, Л. Г. Зверева, К. А. Киричек

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ИНФОРМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Ставрополь

2024

УДК 371.3:51
ББК 74.262.0я73
П29

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ГБОУ ВО СГПИ

Рецензенты:
Бондарева Галина Алексеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной информатики и математики Северо-Кавказского социального института
Бондарь Виктория Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии факультета математики и компьютерных наук имени профессора Н.И. Червякова ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Петлина Е.М., Зверева Л.Г., Киричек К.А.
П29 **Теория и методика обучения математическим основам информатики**: учебно-методическое пособие / Е. М. Петлина, Л. Г. Зверева, К. А. Киричек. – Ставрополь: Изд-во «Тимченко О.Г.», 2024. – 191 с.

ISBN 978-5-907642-95-9

Пособие предназначено для студентов педагогических специальностей, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», профили подготовки «Иностранный язык» и «Цифровые технологии в образовании», а также может быть полезно студентам профилей подготовки «Математика» и «Информатика». В пособии представлены разделы алгебры, математического анализа, теории чисел, необходимые для формирования у будущих учителей информатики ключевых математических знаний и навыков, лежащих в основе успешного освоения информатики и методики ее преподавания.

УДК 371.3:51
ББК 74.262.0я73

ISBN 978-5-907642-95-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время процесс информатизации общества охватил большинство сфер человеческой деятельности. Компьютер становится средством, «орудием труда» современного специалиста. Всё это требует соответствующей подготовки, знания основ математики и информатики, знания современных информационных технологий и определённого уровня информационной культуры.

Подготовка учителя информатики связана с изучением ряда фундаментальных наук, в том числе математических. Математика лежит в основе всех областей информатики: от программирования и алгоритмов до теории информации и криптографии. В пособии рассматриваются теоретические основы информатики и основные математические понятия, необходимые для освоения компьютерных наук. Представлены разделы алгебры, математического анализа, теории чисел. Рассмотрены вопросы, связанные с основными понятиями и теоремами, приведены практические примеры.

Основная цель учебно-методического пособия – определение структуры подготовки учителей информатики в системе вузовского образования, наполнение содержательной части программного обучения студентов и разработка дидактических материалов по реализации программы учебной дисциплины «Математические основы информатики».

Актуальность представляемого пособия определяется острой необходимостью подготовки учителей информатики с позиции практико-ориентированного обучения, а также реализации подхода междисциплинарного комплексирования знаний.

Данное учебное пособие составлено в соответствии с программой учебной дисциплины «Математические основы информатики» обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», профили «Иностранный язык» и «Цифровые технологии в образовании», с целью оказания помощи студентам при изучении соответствующих разделов дисциплины. Пособие призвано облегчить процесс усвоения учебного материала данного курса дисциплины и может быть использовано обучающимися во время аудиторных занятий, в процессе самостоятельной работы, а также при подготовке к экзамену.

Пособие написано для студентов таким образом, чтобы они могли познакомиться с такими разделами математики как алгебра, математический анализ, теория чисел, используя представленные в пособии определения, теоремы, алгоритмы и формулы, и в тоже время оно было пригодно для обеспечения решения широкого круга прикладных задач. В конце каждого раздела пособия приведены индивидуальные задания, которые обучающиеся решают самостоятельно согласно своему варианту. Кроме того, для проверки знаний по разделу приведены тестовые задания.

Пособие предназначено для студентов, обучающимся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Иностранный язык» и «Цифровые технологии в образовании», а также может быть полезно студентам профилей подготовки «Математика» и «Информатика», и направлено на то, чтобы развивать у будущих учителей информатики не только математические знания, но и умение применять их в контексте решения задач информатики.

1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ИНФОРМАТИКИ

1.1. Место и роль дисциплины «Математические основы информатики» в подготовке будущих учителей информатики

Сегодня термин «информация» не имеет однозначного определения. В переводе с латинского языка «informatio» – это сообщение о каком-либо факте, событии, объекте. В современном понимании «информация» – это не просто сообщение о чём-либо, это то, что содержит неизвестные для получателя факты, т.е. «информация» = «сообщение о ранее неизвестном».

Таким образом, сообщение либо несёт, либо не несёт информацию, причём объём информации зависит от осведомлённости воспринимающего субъекта (человека).

Например, для студента сообщение, что 2х2=4 не несёт никакой информации, а для ребёнка, не изучавшего ещё математику, это будет информацией.

Рассмотрим другой пример. Напишем набор цифр: 81498421234. Что это такое? Это информация? Нет, это просто данные. Но если пояснить, что это телефонный номер Иванова Ивана Ивановича, преподавателя кафедры, то приведённые данные становятся информацией.

Таким образом, понятие «информация» ≠ понятию «данные».

Во все времена существования человеческого общества роль информации имела определяющее значение во всех сферах человеческой деятельности: сельском хозяйстве, промышленности, политике, юриспруденции, педагогике, военном деле и т.д. Информация является также результатом творческой деятельности человека. Для своего развития члены общества получали, обрабатывали и передавали имеющуюся информацию. Также она может храниться, шифроваться, уничтожаться. До некоторых пор все это делалось вручную.

В целом информация представляется в двуединой роли:

- как продукт жизнедеятельности общества,
- как один из основных ресурсов общества наряду с природными и энергетическими ресурсами.

Однако в отличие от материальных ресурсов количество информации в процессе развития общества не уменьшается (как, например, запасы нефти, газа и т.д.), а лавинообразно увеличивается. Если материальные ресурсы необходимо получать, то информацию (и это основная проблема на сегодня) надо эффективно хранить и обрабатывать. Вручную все это делать становится труднее и труднее. В определённый момент времени настает так называемое информационное насыщение – состояние, при котором человеку невозможно воспринимать и обрабатывать поступающую информацию, особенно тогда, когда необходимо принять ответственное решение за ограниченный период времени.

В XX веке как следствие научно-технической революции произошел информационный взрыв, т.е. резкое повышение объема информации, которую необходимо было воспринимать, хранить и использовать в процессе своей трудовой деятельности общества. С появлением электронных вычислительных машин в 50-х годах XX века возникла новая наука, которая начала заниматься специфическими проблемами, связанными с переработкой больших объёмов информации – кибернетика. Считается, что если XIX век был веком механики, XX век – веком энергетики (строили ГЭС, ГРЭС, АЭС), то XXI век, в котором мы с вами живём, век информатизации (т.е. основная трудовая деятельность человека связана с переработкой информации). Мы уже сегодня видим, что информация нарастает лавинообразно.

Таким образом, мы вступили в информационное общество – новую историческую фазу развития цивилизации, при которой жизнь и деятельность человечества связаны с информационными процессами.

В качестве средств информационное общество широко использует информационно-коммуникационные технологии, телекоммуникационные сети, электронные библиотеки, автоматизированные банки данных, автоматизированные информационные системы. Современному педагогу необходимо уметь работать с различными программными продуктами. Это требование закона «Об образовании», ФГОС и профессионального стандарта педагога. При этом учителю информатики необходимо не только уметь работать с современными IT-средствами как пользователь, но и понимать математические основы информатики.

Дисциплина «Математические основы информатики» занимает ключевое место и значимую роль в подготовке будущих учителей информатики, так как закладывает фундаментальные знания и навыки, необходимые для понимания и преподавания информатики в школе, а также позволяет развивать математическое мышление студентов, в частности логическое и аналитическое мышление, через освоение разделов математики.

Изучение математических основ помогает будущим учителям понять математическую структуру, на которой строится информатика, осознавать суть современных технологий и их приложения. Например, современные технологии, такие как искусственный интеллект, большие данные, кибербезопасность, требуют глубокого понимания математических принципов. Учителя информатики должны быть готовы доступно и эффективно объяснять учащимся базовые математические концепции, лежащие в основе этих технологий.

Одной из важных задач в подготовке учителей информатики является обучение решению задач различной сложности. Применение математических методов в информатике играет ключевую роль в разработке эффективных, точных и надежных алгоритмов, а также их анализе, обработке данных, построении моделей и решении сложных задач в прикладных областях. Математические методы обеспечивают точные, надежные и оптимальные решения в различных областях информатики. В связи с чем, освоение дисциплины «Математические основы информатики» необходимо в подготовке будущих учителей информатики для анализа и решения задач, связанных с программированием, криптографией, компьютерными сетями, базами данных и т.п.

Таким образом, учебная дисциплина «Математические основы информатики» является неотъемлемой частью профессиональной подготовки будущих учителей информатики, помогая им развить как предметные знания, так и педагогические компетенции для успешного преподавания информатики.

1.2. Структура современной математики

Каждый человек, приступающий к изучению математики в ВУЗе, задается вопросом: «Зачем это надо?» Например, зачем это надо вам, будущим учителям информатики? Дело в том, что сам процесс изучения математики не явно, а как бы опосредованно влияет на теоретическое восприятие основ информатики. После изучения математических основ обучающийся более глубоко и многогранно видит суть процессов, происходящих в информационных системах, обладает навыками правильной работы с любой информацией.

Математику с функциональной точки зрения можно охарактеризовать как язык и инструмент познания окружающего нас мира, работы технических устройств, общества и нас самих. Математический язык – это лаконичный, лишенный двусмысленности язык формул и знаков, который обладает большой универсальностью. Он позволяет человеку сформировать навыки рационального мышления: последовательности, точности, ясности, лаконичности, выразительности, экономности, информативности.

Математика учит формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их выполнять, а это далеко не последнее качество, необходимое учителю информатики. Кроме того, благодаря математике родились многие методы и технологии информатики, поэтому также необходимо знать теоретические основы информатики.

Рассмотрим аксиоматический метод, который является основным практически для любого раздела математики. Начала аксиоматического метода берут ещё от древнегреческих математиков.

В настоящее время аксиоматический метод является одним из довольно распространённых способов организации научного знания, а также основным стилем современного математического мышления. Особенно широко он применяется в математике и математизированных научных дисциплинах, в том числе математической логике и дискретной математике, которые сегодня причисляют к разделам школьного курса информатики. Его можно рассматривать как разновидность дедуктивного метода, когда исследователь в своих рассуждениях идёт от общего к частному. Специфика аксиоматического метода состоит в том, что исходные общие положения имеют форму утверждений, истинность которых принимается без доказательств. Эти утверждения называются аксиомами. Из аксиом по определённым логическим правилам строится так называемое выводное знание в виде теорем, законов и т.д. Таким образом, в основу любой аксиоматической теории положены как бы «два кита»:

во-первых, она базируется на некоторой совокупности исходных понятий и аксиом;

во-вторых – на логике.

Исходными понятиями аксиоматической теории могут быть любые абстрактные понятия (числа, выражения, векторы и т.д.).

Аксиома – это утверждение, которое принимается как истинное (т.е. не требующее доказательства).

Логика – это наука о законах и операциях правильного мышления.

Итак, система аксиом образует основу теории, логика даёт правила, согласно которым из аксиом могут быть выведены теоремы.

Теорема – это утверждение, которое требует доказательства.

Классическим примером аксиоматической теории является геометрия Евклида под названием «Начала». Это блестящий, непревзойдённый в течение более 20 веков (вплоть до XIX века) пример аксиоматической теории (школьная геометрия).

Коротко опишем сущность аксиоматического метода на современном этапе развития математической науки:

1. Строится абстрактная теория, в основе которой лежат термины двоякого рода:

- одни обозначают исходные, основополагающие элементы теории (по аналогии с геометрией Евклида, где такими элементами были «точка», «прямая», «плоскость»);

- другие обозначают отношения между этими элементами (в геометрии Евклида – это были термины, «принадлежать», «лежать между» и т.д.).

Этим терминам пока не приписывается никакого содержательного смысла, они – только слова.

Далее формулируются аксиомы для указанных терминов. Они должны удовлетворять аксиомам. При помощи определений вводят новые термины, а затем из аксиом – логические следствия, т.е. теоремы.

2. Затем терминам абстрактной теории приписывают содержательный смысл.

Теперь они выражают понятия, поэтому их роль изменяется и они имеют более или менее наглядное, осязательное содержание. На этом этапе проверяют, соблюдаются ли для этих понятий аксиомы абстрактной теории. Полученную путем приписывания содержательного смысла абстрактной теории система называют моделью или интерпретацией этой теории.

Таким образом, благодаря аксиоматизации удаётся достичь высокой степени организованности научного знания. В этих условиях научная организация может быть, образно говоря, поставлена на конвейер, поскольку фиксированы как исходные положения, так и правила вывода следствий из аксиом. И задача учёного состоит только в том, чтобы получать все новые и новые теоремы.

А теперь рассмотрим общую концепцию построения математических структур (рисунок 1).

ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Вводится исходный основополагающий элемент математики, т.е. абстрактный математический объект

↓

Вводится понятие равенства элементов

↓

Вводятся операции над элементами ($\langle + \rangle$, $\langle \bullet \rangle$, $\langle - \rangle$, $\langle ^{-1} \rangle$) и задаются правила, по которым они выполняются

↓

Вводятся понятия:

- нулевого элемента, т.е. нейтрального элемента относительно операции сложения и её аналогов, такого, что для любого x элемента алгебры

$$x \langle + \rangle 0 = 0 \langle + \rangle x = x;$$

- единичного элемента, т.е. нейтрального элемента относительно операции умножения и её аналогов, такого, что для любого x элемента алгебры

$$x \langle \bullet \rangle 1 = 1 \langle \bullet \rangle x = x;$$

- противоположного элемента $-x$ к данному элементу x, такого, что их сложение приводит к взаимному поглощению, т.е.

$$-x \langle + \rangle x = 0;$$

- обратного элемента x^{-1} к данному элементу x такого, что их умножение даёт единичный элемент алгебры, т.е.

$$x^{-1} \langle \bullet \rangle x = 1$$

↓

Разрабатываются приложения к решению практических задач

Рисунок 1 – Общая концепция построения математических структур

В современном понимании алгебраическая структура (или алгебра) представляет собой совокупность абстрактных объектов (чисел, выражений, векторов, высказываний, множеств, событий), на которых определены операции.

Причем совершенно не важно, из каких элементов состоит эта совокупность. Однако необходимо выполнение определённых отношений между элементами, которые задаются с помощью системы требований, составляющих совокупность аксиом.

Алгебраическая операция на совокупности элементов М – это закон (правило), по которому каждому элементу или каждой упорядоченной паре элементов из множества М ставится в соответствие один и только один элемент опять же из М. В первом случае операция называется одноместной, во втором случае – двуместной.

Методологические проблемы и аксиоматические подходы к математическим основам информатики связаны с определением и применением строгих формальных систем, которые служат основой для разработки, анализа и реализации алгоритмов и структур данных. Эти проблемы и подходы помогают обеспечить точность и последовательность математических методов в информатике. Формализация и аксиоматизация обеспечивают строгую основу для анализа и доказательства, что критически важно для создания эффективных и корректных решений в области информатики.

Контрольные вопросы

1. В чём состоит суть информационного общества XXI века?
2. Что представляет собой информационное насыщение?
3. Объясните понятия «информация» и «данные». Идентичны ли они?
4. Поясните роль математических знаний для учителя информатики.
5. Какие навыки позволяет сформировать человеку математический язык?
6. В чём состоит сущность аксиоматического метода на современном этапе развития математической науки?
7. Что представляет собой алгебраическая структура в современном понимании?
8. Как формулируется общая концепция построения математических структур?

2. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ

2.1. Матрицы и определители

2.1.1 Матрицы и операции над ними

Рассмотрим основные понятия теории матриц.

Матрицей размера nxn называется прямоугольная таблица чисел, имеющая n строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Матрица записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m,n},$$

где $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$

Матрица размера 1×n называется *матрицей-строкой*, а матрица размера m×1 называется *матрицей-столбцом*.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера n×n называют *матрицей n-го порядка*.

Элементы матрицы a_{jj}, у которых номер столбца совпадает с номером строки (i = j), называются *диагональными,* они образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы n-го порядка главную диагональ образуют элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной*. Обозначается буквой E.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначается буквой O.

Две матрицы одинакового размера $A = (a_j)_{mn}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называются *равными*, если равны все их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ при $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$.

Операции над матрицами

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{mn}$ *на число* называется матрица $C=(c_{ij})_{mn}$ такая, что $c_{ij}=k\cdot a_{ij}$, где $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Обозначение: C=k·A.

Суммой двух матриц $A=(b_{ij})_{m,n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m,n}$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, где $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Обозначение: C=A+B.

Аналогично определяется *разность двух матриц*: C = A – B, где $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Свойства операций над матрицами

Пусть A, B, C – матрицы, а k и l– некоторые числа. Тогда:

1) A + B = B + A;
2) A + 0 = A;
3) 1 · A = A;
4) $(k + l) \cdot A = k\cdot A + l \cdot A$;
5) $k \cdot (A+B) = k\cdot A + k\cdot B$;
6) (A + B) + C = A + (B + C);
7) A – A = 0;
8) 0 · A = 0;
9) $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m,l}$ *на матрицу* $B=(b_{ij})_{l,n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m,n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е. $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{il}\cdot b_{lj}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Обозначение:
C = A · B.

Схематичная запись: $A_{m\times l}\cdot B_{l\times n}=C_{m\times n}$.

Свойства произведения матриц

Пусть A, B, C – матрицы соответствующих размеров, а k – число.

1) (A·B)·C = A·(B·C);
2) (A+B)·C = A·C+B·C
3) A·(B+C) = A·B+A·C;
4) k·(A·B) = (k·A) ·B.

В общем случае произведение матриц некоммутативно, т. е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пусть n – целое неотрицательное число. Тогда *n-й степенью квадратной матрицы* A называется матрица, которая вычисляется следующим образом:

$$A^0 = E \ (n=0); \quad A^1=A \ (n=1); \quad A^n=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{n} \ (n>1).$$

Транспонированной по отношению к матрице A называется матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером. Обозначение: A^T.

Если $A = (a_{ij})_{m,n}$, то $A^T = (a_{ij})_{n,m}$.

Свойства транспонирования

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A+B)^T = A^T+B^T$;
3) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Даны матрицы A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и B =$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти: а) 2A + B; б) $A^T - 3B^T$.

Решение.

а) По определению суммы матриц и произведения матрицы на число получим

$$2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+1 & 4-1 \\ -4+3 & 2+1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

б) По определению транспонированной матрицы найдём матрицы A^T и B^T, транспонированные к матрицам A и B соответственно:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

По определению разности матриц и проведения матрицы на число получим

$$A^T - 3B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-0 & -2-9 \\ 0-3 & 1-3 \\ 2-(-3) & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц A и B, если A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) $A_{2x2}xB_{2x3}=C_{2x3}$, т. е. произведение AB определено. Тогда

$$C=AxB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hline 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot 0+1\cdot 5 \\ 5\cdot 1+1\cdot 3 & 5\cdot 2+1\cdot 4 & 5\cdot 0+1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Произведение $B_{2x3}xA_{2x2}$ не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Пример 3. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вместо *x* подставляем в многочлен f(x) матрицу A, вместо числа 3 используем матрицу 3E, где E – единичная матрица 2-го порядка, что и A (это обеспечивает возможность сложения матриц).

Получим $F(A) = 2\cdot A^2 - 5A + 3E$. Тогда

1. $2A^2 = 2\cdot A\cdot A = 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4+4 & 8+0 \\ 2+0 & 4+0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

2. $5A = 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $3E = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Окончательно $f(A)=\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Задачи и упражнения для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1/2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) 3A+2B; б) $\mathrm{A} - 4\mathrm{B}$; в) $5\mathrm{A} + \mathrm{C}^T$; г) $3A^T - 2B^T + 7C$; д) числа x и y такие, что все элементы матрицы равны 0.

2. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти те из произведений матриц AB и BA, которые существуют:

а) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти $D = (AB)^T - C^2$, где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = ABC - 3E$, где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; E – единичная матрица.

6. Найти матрицу A^n:

а) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $n = 3$; б) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; $n = 5$.

7. Найти значение многочлена f(x) от матрицы A:

а) $\mathrm{f}(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{f}(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Даны матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Решить уравнение $5\mathrm{A} + 3\mathrm{X} - \mathrm{B} = 0$.

9. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & -\mathrm{a} & \mathrm{a} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\mathrm{a} & \mathrm{a} & -\mathrm{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{a} & 1 & \mathrm{a} \\ \mathrm{a} & 1 & -\mathrm{a} \\ -\mathrm{a} & 1 & \mathrm{a} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и многочлен $\mathrm{f}(x)=x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$. Вычислить f(A).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы, её элементов и видов (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, единичная, диагональная, нулевая матрицы).
2. Какие матрицы называются равными? Равны ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Как умножить матрицу на число?
4. Как сложить две матрицы? Можно ли сложить две матрицы с размерами 2×3 и 3×2?
5. Как вычесть из одной матрицы другую? Можно ли из матрицы A вычесть эту же матрицу A? Что получится в этом случае?
6. Для каких матриц A и B определено произведение AB? Как вычисляются элементы матрицы AB?
7. Можно ли умножить строку с n элементами на столбец с n элементами? Что получится в этом случае?

8. Всегда ли выполняется равенство:

а) A(BC) = (AB)C; б) AB = BA; в) (A+B)C = AC + BC.

9. Как возвести матрицу A в целую положительную степень n? Всякую ли матрицу A можно возвести в степень n?

10. Какая матрица называется транспонированной по отношению к матрице A? Для любой ли матрицы A существует транспонированная? Может ли выполняться равенство $A^T = A$? Ответ обоснуйте.

2.1.2. Определители и их свойства

Каждой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое *определителем (детерминантом)* матрицы A или просто *определителем n-го порядка*. Обозначения: $|A|$, $\det A$, Δ.

Определитель 1-го порядка квадратной матрицы $A=(a_{11})$ определяется следующим образом:

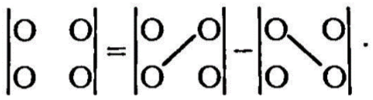
$$|A| = a_{11}.$$

Определитель 2-го порядка квадратной матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Определитель квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ может быть вычислен *по правилу треугольников*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

которое символически можно записать так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \oplus + \ominus.$$

+ −

Пусть дан определитель n-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определителем квадратной матрицы A n-го порядка называется сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j-1}^{n} a_{1j}\, A_{1j}$$

Основная теорема об определителях (теорема Лапласа). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,,\ i=\overline{1,n} \qquad (1)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,,\ j=\overline{1,n}$$

Равенства (1) называют *разложениями определителя по i-той строке или по j-му столбцу* соответственно.

Равенства (1) принимают особенно простой вид, если в i-ой строке (j-м столбце) определителя все элементы равны нулю, кроме одного, скажем a_{ij}. Тогда получим

$$|A| = a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

т.е. вычисление определителя n-го порядка $|A|$ сводится к вычислению одного определителя (n-1)-го порядка M_{ij}.

Преобразование определителя к нужному виду, а также вычисление определителей выполняется на основе свойств определителей.

Основные свойства определителей

1. При транспонировании матрицы определитель не изменяется.
2. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.
4. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.

5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

6. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

7. Величина определителя не изменится, если к одной из строк (столбцов) прибавить другую строку (столбец), умноженную на какое угодно число.

8. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

9. Матрица, у которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю, называется треугольной. Определитель треугольной и, в частности, диагональной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 6 + 4 = 10.$

б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 - ab \cdot ab = (ab)^2 - (ab)^2 = 0.$

Пример2. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

а) по правилу треугольников;

б) разложив его по первой строке;

в) разложив его по второму столбцу.

Решение.

а) по правилу треугольников

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$= 1 - 10 - 6 = -15.$

б) Используя теорему Лапласа, разложим определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} == (1-6) - 2\cdot(5-0) -$$

$$-0\cdot(15-0) = -15.$$

в) Используя теорему Лапласа, разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} = 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -2\cdot(5-0) + (1-0) -$$

$$-3\cdot(2-0) = -15.$$

Пример 3. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix}-2 & -5 & -1 & 3\\ 2 & -5 & 9 & 1\\ 1 & -6 & 4 & -2\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}$$

Решение. Используя свойство 7, преобразуем определитель Δ, не меняя его значение, таким образом, чтобы все элементы первого столбца, кроме $a_{31}=1$, стали равными нулю. С этой целью умножим третью строку на 2 и прибавим к первой строке, а также умножим третью строку на (-2) и прибавим ко второй и четвертой строкам. Получим

$$\begin{vmatrix}-2 & -5 & -1 & 3\\ 2 & -5 & 9 & 1\\ 1 & -6 & 4 & -2\\ 2 & 18 & -7 & 10\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \leftarrow\\ \cdot 2;\ \cdot(-2)\\ \leftarrow\end{matrix} = \begin{vmatrix}0 & -17 & 7 & -1\\ 0 & 7 & 1 & 5\\ 1 & -6 & 4 & -2\\ 0 & 30 & -15 & -6\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-17 & 7 & -1\\ 7 & 1 & 5\\ 30 & -15 & -6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-17 & 7 & -1\\ 7 & 1 & 5\\ 30 & -15 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ :3\end{matrix} =$$

$$3\cdot\begin{vmatrix}-17 & 7 & -1\\ 7 & 1 & 5\\ 10 & -5 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot 5;\ \cdot(-2)\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{matrix} = 3\cdot\begin{vmatrix}-17 & 7 & -1\\ -78 & 36 & 0\\ 44 & -19 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-78 & 36\\ 44 & -19\end{vmatrix} = -3\cdot(1482-1584) = 306.$$

Пример 4. Используя свойства определителей, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

Решение. Преобразуем левую часть данного равенства, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-x & 2 & 4 \\ 1 & 1-x & 3 & 9 \\ 1 & 1-x & 4 & 16 \\ 1 & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1-x & 2 & 4 \\ x & 1-x & 3 & 9 \\ x & 1-x & 4 & 16 \\ x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{0(\text{свв.})} - \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 3 & 9 \\ 1 & x & 4 & 16 \\ 1 & x & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & 2 & 4 \\ x & x & 3 & 9 \\ x & x & 4 & 16 \\ x & x & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{0(\text{свв.})} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 3 & 9 \\ 1 & x & 4 & 16 \\ 1 & x & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 3 & 9 \\ 1 & x & 4 & 16 \\ 1 & x & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, данное равенство справедливо.

<u>Задачи и упражнения для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & -\cos a \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители 3-го порядка по правилу треугольников и разлагая их по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

4. Разлагая по третьему столбцу, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -2 & b & -1 \\ -2 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$.

5. Разлагая по второй строке, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

6. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -5 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -7 & 4 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Используя только свойства определителей, доказать справедливость равенств:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)$; б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)$;

в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos2\gamma \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2x+3y+4 \\ 5 & 6 & 7 & 5x+6y+7 \\ 8 & 9 & 10 & 8x+9y+10 \\ 11 & 12 & 13 & 11x+12y+13 \end{vmatrix} = 0$.

8. Решить неравенства:

а) $\begin{pmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{pmatrix} > 0$; б) $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 6 \end{pmatrix} < 0$.

9. Найти члены определителя $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$, содержащие x^4 и x^3.

10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков.
2. Назовите элементы, расположенные на главной диагонали, и элементы, расположенные на побочной диагонали, в определителе матрицы $A=(a_{ij})_{4,4}$.
3. Что такое минор элемента a_{ij} определителя квадратной матрицы n-го порядка? Чему равен минор элемента a_{12} определителя квадратной матрицы $A= (a_{ij})_{2,2}$?
4. Что такое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя квадратной матрицы n-го порядка? Чему равно алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя квадратной матрицы $A=(a_{ij})_{2,2}$?
5. Сформулируйте определение определителя n-го порядка.
6. Сформулируйте основную теорему об определителях. Что значит разложить определитель по элементам данной строки или столбца?
7. При каких условиях разложение определителя по элементам строки или столбца имеет наиболее простой вид?
8. Чему равен определитель треугольной матрицы?
9. Известно, что $|A|=1$. Чему равен $|A^T|$?
10. Известно, что A – квадратная матрица 5-го порядка и $|A| = 3$. Чему равен определитель матрицы 2A?
11. Изменится ли определитель, если к элементам первого столбца прибавить соответствующие элементы всех остальных столбцов?
12. Опишите основные методы вычисления определителей.

2.1.3 Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратной для квадратной матрицы A порядка n называется такая матрица A^{-1} того же порядка, которая удовлетворяет условию

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E,$$

где E – единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю ($|A| \neq 0$). В противном случае ($|A| = 0$) матрица A называется *вырожденной*.

Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Для любой невырожденной матрицы A, т.е. $|A| \neq 0$, существует, и притом единственная, обратная матрица A^{-1}. Если матрица A является вырожденной, т.е. $|A| = 0$, то обратная матрица A^{-1} не существует.

Способы нахождения обратной матрицы

1. С помощью присоединённой матрицы

Если матрица A невырожденная, т.е. A = 0, то обратная – матрица A^{-1} может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^{*} = \frac{1}{|A|} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где матрица

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$), называется *присоединённой* для A. Обратная матрица A^{-1} для матрицы A может быть также найдена с помощью элементарных преобразований строк матрицы A.

Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы

1. Можно отбросить нулевую строку (столбец).
2. Можно умножить все элементы строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля.
3. Можно переставлять строки (столбцы) матрицы.

4. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число не изменяет матрицу.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается A~B.

2. С помощью элементарных преобразований строк матрицы

1. К данной невырожденной матрице A приписать справа единичную матрицу E:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований над строками объединённой матрицы $(A|E)$ привести матрицу A к единичной матрице:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

3. Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:

$$AX = B,\ XC = B,\ AXC = B,$$

где X – неизвестная матрица; A, B и C – некоторые заданные матрицы, причём A и C имеют обратные матрицы.

Решением этих уравнений являются соответственно матрицы

$$X = A^{-1}B,\ X = BC^{-1},\ X = A^{-1}BC^{-1}.$$

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример1. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

двумя способами – с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

Решение.

Способ 1. Найдём обратную матрицу с помощью присоединённой матрицы.

1. Вычислим определитель матрицы A:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0.$$

Так как $|\mathrm{A}| \neq 0$, то матрица A - невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует и единственна.

2. Запишем формулу для нахождения обратной матрицы:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \times \mathrm{A}^{*}$$

где $\mathrm{A}^{*} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix}$ – присоединённая матрица.

3. Найдём присоединённую матрицу A*. Для этого вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Таким образом, присоединённая матрица A* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найдём обратную матрицу A^{-1} по формуле (1):

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \times \mathrm{A}^{*} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5. Используя определение обратной матрицы, проверим правильность её вычисления:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{E},$$

где E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. Действительно,

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{E}$.

Способ 2. Найдём обратную матрицу с помощью элементарных преобразований.

Так как матрица A – невырожденная ($|\mathrm{A}| = 5 \neq 0$), то припишем к матрице A справа единичную матрицу E и будем выполнять элементарные преобразования над строками объединённой матрицы $(\mathrm{A}|\mathrm{E})$ до тех пор, пока матрица A не превратится в единичную:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2); \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) : 5 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right) \cdot 2;\ \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 4/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Таким образом обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Введём обозначения: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде AX = B. Так как $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу, и решение данного уравнения находится по формуле

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}. \qquad (2)$$

Найдём матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

По формуле (2) получим

$$\mathrm{X} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Задачи и упражнения для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Выяснить, какие из приведённых ниже матриц имеют обратные:

а) $\begin{pmatrix} 21 \\ 31 \\ 06 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2. При каких λ матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной.

3. Найти обратные матрицы для следующих матриц двумя способами – с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить матрицу $B = 11(A^{-1})^T + A^T$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; е) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

ж) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; з) $X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{X} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

6. Используя обратную матрицу, найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение обратной матрицы.
2. Какая матрица называется невырожденной? Приведите пример невырожденной матрицы.
3. Как связаны невырожденность матрицы и существование у неё обратной матрицы?
4. Какая матрица называется присоединённой для матрицы А? Напишите формулу нахождения обратной матрицы с помощью присоединённой матрицы.
5. Какие элементарные преобразования можно выполнять над строками (столбцами) матрицы?
6. Объясните алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
7. Напишите основные матричные уравнения и их решения. Объясните, при каких условиях данные решения существуют.

2.1.4. Ранг матрицы

Пусть дана матрица А размера $m \times n$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных столбцов, где $k \le \min(m, n)$.

Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы А, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором k-го порядка матрицы А.*

Элементы матрицы A являются минорами 1-го порядка. Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок миноров данной матрицы, отличных от нуля. Обозначение: r, r (A) или rang A.

Свойства ранга матрицы

1. Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то rang A $\le$ min (m, n).
2. rang A = 0 тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю.
3. Если A – квадратная матрица n-го порядка, то rang A = n тогда и только тогда, когда A $\neq$ 0.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*.

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Если в матрице A имеется минор r-го порядка, отличный от нуля, а все ее миноры (r+1) - го порядка, окаймляющие этот минор (т.е. содержащие минор r-го порядка целиком внутри себя), равны нулю, то ранг матрицы A равен r и данный минор r-го порядка является базисным.

Способы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймления миноров

1. Найти ненулевой элемент матрицы (если такого нет, то ранг матрицы равен нулю).
2. Вычислить миноры второго порядка, которые окаймляют выбранный элемент.
3. Если среди вычисленных миноров второго порядка имеется отличный от нуля, необходимо рассмотреть все миноры третьего порядка, окаймляющие какой-нибудь минор второго порядка, не равный нулю. Продолжать так до тех пор, пока все миноры окаймляющие ненулевой минор r-го порядка, не будут равны нулю. В этом случае ранг матрицы равен r.

Теорема об элементарных преобразованиях матрицы. Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ее ранг.

Ранг матрицы также не меняется при ее транспонировании. Из теоремы следует, что если матрицы A и B эквивалентны (A~B), то rangA = rangB.

Любую ненулевую матрицу A с помощью элементарных преобразований строк или столбцов можно привести к эквивалентной ей ступенчатой матрице B.

Матрица B размера m×n называется *ступенчатой или трапецеидальной,* если она имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где a_{11}, a_{22}, … , a_{rr} отличны от нуля.

Ранг ступенчатой матрицы B равен числу ее ненулевых строк, т.е. rang B = r.

2. С помощью элементарных преобразований

1. С помощью элементарных преобразований привести матрицу A к эквивалентной ей ступенчатой матрице B.

2. Подсчитать число r ненулевых строк в ступенчатой матрице B. Тогда rang A = rang B = r.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Найти ранг матрицы A методом окаймления миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Так как матрица A содержит ненулевые элементы, то rang A ≥ 1.

2. Матрица A имеет минор 2-го порядка M = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26,$ отличный от нуля. Следовательно, rang A = ≥ 2.

3. Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие минор M:

$$\mathrm{M}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \\ 1 & 17 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \end{vmatrix} = 13 \cdot 16 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mathrm{M}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 15 & 1 \\ 2 & 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & 16 & -16 \end{vmatrix} = 13 \cdot 16 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры 3-го порядка, окаймляющие минор М, равны 0, то минор М, имеющий 2-ой порядок, является базисным минором матрицы А и rang A = 2.

Базисными минорами матрицы А являются и миноры
$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 13 & -9 \end{vmatrix}$ и т.д. (все миноры 2-го порядка $\neq 0$).

Пример 2. Найти ранг матрицы А с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 19 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Приведём данную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 19 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \cdot(-2); \cdot 3; \cdot(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

В результате преобразований получили ступенчатую матрицу В, эквивалентную матрице А, число ненулевых строк которой равно 3. Следовательно, rang A = rang B = 3.

<u>Задачи и упражнения для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Найти ранги матриц методом окаймления миноров:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 10 & 24 & 20 & -44 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 12 & 17 \\ 5 & 10 & -10 & 10 & 26 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить при каком значении параметра а матрица А имеет ранг равный 3:

$$А = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

3. Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что если к матрице приписать одну строку (или один столбец), то её ранг либо не изменяется, либо изменяется на единицу.

5. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 \end{pmatrix}$ в зависимости от чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$.

6. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ в зависимости от числа a.

7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения минора, базисного минора и ранга матрицы.
2. Как найти ранг матрицы методом окаймления миноров?
3. Может ли ранг матрицы с размерами 5×6 быть равен 3; 5; 6; 7?
4. Чему равен ранг транспонированной матрицы A^T, если rang A = r?

5. Перечислите элементарные преобразования матрицы, которые не изменяют ее ранг.

6. Каким может быть ранг матрицы, полученной из матрицы ранга r вычеркиванием: а) одной строки; б) двух строк?

7. Какая матрица называется ступенчатой? Чему равен ее ранг?

8. Как найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?

2.2. Системы линейных уравнений

2.2.1. Основные понятия системы n линейных уравнений с n неизвестными

Линейным уравнением относительно неизвестных x_1, x_2, … , x_n называется выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где a_1, a_2, … , a_n, b – некоторые числа.

Системой линейных уравнений с n неизвестными называется конечная совокупность линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, … , x_n.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{ij} называются *коэффициентами* системы (1), а числа b_i – *свободными членами* ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Решением системы (1) называется такая совокупность чисел $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, … , $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы (1) можно записать в виде вектора:

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имеют одно и тоже множество решений.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы, к которым относятся:

- перестановка уравнений;
- умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;
- умножение какого-либо уравнения на число и прибавление его к другому уравнению.

Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ называется *тривиальным.*

При вычеркивании тривиальных уравнений в системе получим систему, эквивалентную исходной.

Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, называется *противоречивым*. Система, содержащая противоречивое уравнение, является несовместной.

2.2.2. Методы решения систем линейных уравнений с n неизвестными

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (2)$$

и называется *квадратной*, так как число ее уравнений совпадает с числом неизвестных.

Рассмотрим методы решения систем линейных уравнений.

1. Матричный способ

В матричной форме система (2) имеет вид AX = B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Здесь: A – матрица коэффициентов системы (2), называемая основной матрицей;

X – матрица-столбец неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов.

Определитель $\Delta = |A|$ основной матрицы системы (2) называется *определителем системы* (2).

В случае $\Delta = |A| \neq 0$ система (2) называется *невырожденной*. Если система (2) невырожденная ($\Delta = |A| \neq 0$), то она является совместной и ее единственное решение находится по формуле

$$X = A^{-1} B \qquad (3)$$

Отыскание решения системы (2) по формуле (3) называется матричным методом решения системы или методом обратной матрицы.

Замечание 1. Если система (2) вырожденная, т. е. $\Delta = |A| = 0$, то данную систему матричным методом решить нельзя.

2. Метод Крамера

Теорема Крамера. Если в системе (2) n линейных уравнений с n неизвестными определитель системы A, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля, то система (2) совместна и имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{4}$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов ($i = \overline{1,n}$). Формулы (4) называются формулами Крамера.

Замечание 2. Если система (2) вырожденная, т. е. $\Delta = |A| = 0$, то возможны два случая.

1. Если хотя бы один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то система (2) несовместна.

2. Если все определители $\Delta_i = 0$, то о совместности системы (2) вывод сделать нельзя.

3. Метод Гаусса

Универсальным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса или метод исключения неизвестных. В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения;

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения;

3) и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}.,$$ где $d_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, 3, \ldots, n+1$.

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$ $\quad i = 2, 3, \ldots, n;$ $\quad j = 2, 3, \ldots, n+1.$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом для третьего и т.д. Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса можно записать следующим образом.

Алгоритм метода Гаусса

1. Выбирают первый слева столбец матрицы, в котором есть хоть одно отличное от нуля значение.
2. Если самое верхнее число в этом столбце ноль, то меняют всю первую строку матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.
3. Все элементы первой строки делят на верхний элемент выбранного столбца.
4. Из оставшихся строк вычитают первую строку, умноженную на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) ноль.
5. Далее проводят такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.
6. После повторения этой процедуры n-1 раз получают верхнюю треугольную матрицу.
7. Вычитают из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.
8. Повторяют предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получают единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

Достоинства метода Гаусса решения систем линейных уравнений:

1) легкость метода,
2) число неизвестных и число уравнений могут не совпадать,
3) для любого числа неизвестных,
4) алгоритмичность метода.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение.

Обозначим: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.Тогда в матричной форме система имеет вид AX = B.

Найдём определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 18 + 24 - 12 - 18 - 26 = -1 \neq 0.$$

Следовательно, система является совместной и имеет единственное решение, определяемое по формуле $X = A^{-1}B$.

Найдём обратную матрицу A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, где

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad \begin{matrix} A_{11} = -5 & A_{21} = -1 & A_{31} = 2 \\ A_{12} = -8 & A_{22} = 1 & A_{32} = 2 \\ A_{13} = 3 & A_{23} = 0 & A_{33} = -1 \end{matrix}$$

Таким образом $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдём решение системы по формуле (3):

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -1$

Ответ: (3, 2, -1).

Пример 2. Решить систему уравнений по формуле Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Т. е. система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.

Найдем определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 полученные из определителя Δ заменой соответственно первого, второго столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2.$$

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases},$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

<u>Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Решить системы уравнений методом обратной матрицы по формулам Крамера и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 16 \\ 5x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 7x_1 + 2y_2 + 3z_3 = 15 \\ 5x_1 - 3y_2 + 2z_3 = 15 \\ 10x_1 - 11y_2 + 5z_3 = 36 \end{cases}$; з) $\begin{cases} x_1 - 3y_2 + 2z_3 = 5 \\ 3x_1 + y_2 - 5z_3 = 4 \\ 4x_1 - 2y_2 - 3z_3 = 10 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} 2x_1 - 3y_2 + z_3 = -7 \\ x_1 + 4y_2 + 2z_3 = -1 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$; к) $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$;

л) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+3x_4=-19 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=6 \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4=10 \\ 4x_1+6x_2+x_3-2x_4=12 \end{cases}$; м) $\begin{cases} x-2y+3z-t=9 \\ 4x+3y-z+2t=5 \\ 2x-5y+3z+t=16 \\ 4x+6y+2z-t=5 \end{cases}$.

2. Решить систему уравнений, заданную в виде AX = B, где A – основная матрица системы, B – матрица-столбец свободных членов:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 8 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ 2 & -4 & -3\\ 1 & 6 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5\\-6\\17\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 9 & 5\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\12\\-9\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\0\\10\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$.

3. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-5x_5=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3 \end{cases}$.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется линейным относительно неизвестных $X_1, X_2, \ldots, X_n$? Запишите систему m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде.

2. Дайте определение решения системы линейных уравнений с n неизвестными.

3. Дайте определение совместной, несовместной, определенной и неопределенной системы линейных уравнений с n неизвестными.

4. Какие системы линейных уравнений с n неизвестными называют равносильными? Перечислите основные элементарные преобразования, которые можно выполнять над системами линейных уравнений с n неизвестными.

5. Какое уравнение называется противоречивым? Может ли быть совместной система линейных уравнений с n неизвестными, содержащая противоречивое уравнение?

6. Запишите в матричной форме систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z: $\begin{cases} x=1 \\ y-z=0 \end{cases}$.

7. При каком условии система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение?

8. Напишите выражение для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными в случае ее невырожденности:

а) по формулам Крамера;

б) через обратную матрицу по отношению к основной матрице системы;

в) методом Гаусса.

2.3. Применение алгебраических методов в информатике

Наиболее предпочтительным способом организации информации для описания данных в различных информационных системах часто является табличный. Этот метод, с одной стороны, достаточно наглядный и информативный, а с другой – он предоставляет пользователю большой выбор математических инструментов по количественному и качественному анализу информации при достаточной простоте представления. Например, если информацию предметной области представляют в виде графовой модели, то осуществление анализа удобно с применением различного набора матриц: смежности, инцидентности и достижимости. С помощью них осуществляется изучение различных свойств графа, а также характер взаимодействия элементов информационной системы. В теории моделирования графов существует большое количество алгоритмов матричной математики: например, алгоритм Дейкстры или алгоритм Прима-Краскала.

Также матрицы используются для шифрования сообщений в Интернете.

В компьютерных играх процесс моделирования пространства осуществляется также с применением векторной алгебры. Векторная графика также не обходится без методов алгебры. Это способ описания изображений и объектов компьютерной графики, который основан на математическом описании элементарных геометрических объектов: точек, линий, кругов, окружностей и многоугольников. Таким образом, объекты векторной графики являются графическими изображениями математических объектов. Кроме того, каждое изображение на экране монитора – это двумерная матрица, элементами которой являются цвета точек.

Понятие «векторная графика» также используют для отличия от растровой графики, изображение в которой представляется в форме графической матрицы из пикселей фиксированного размера. Каждый пиксель графической матрицы в растровой графике имеет атрибут цвета.

Совокупность разноцветных пикселей растровой матрицы и формирует изображение.

В информатике также применяются импликативные матрицы. Математический аппарат импликативных матриц используется как инструмент анализа данных информационных систем. Свое широкое применение для предметной области информационных систем импликативные матрицы нашли благодаря применению различных критериев для исследования информации. Это обуславливает многомерную структуру большинства информационных систем.

Кроме того, в программировании при написании программ также используются матрицы. Они еще называются массивами.

Индивидуальные задания

Выполните задания в соответствии с номером по списку группы.

Задание 1. Даны матрицы А и В. Вычислить $A^T B - E$ (таблица 1).

Таблица 1

№	Матица А	Матрица В	№	Матрица А	Матрица В	№	Матрица А	Матрица В
1	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

7	$\begin{pmatrix}5&5\\3&2\\6&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&5\\7&1\\5&4\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\5&3\\3&3\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\5&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\5&4\\6&4\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&8\\8&4\\4&4\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}3&5\\6&2\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6\\6&3\\3&3\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}6&7\\7&2\\6&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&7\\7&3\\4&8\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}2&3\\7&3\\8&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&3\\4&5\\7&6\end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\\5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\3&7\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}5&3\\2&3\\4&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5\\4&3\\5&7\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}4&5\\3&4\\2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1\\5&6\\4&3\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}5&3\\7&3\\5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&6\\7&7\\3&5\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}3&5\\3&4\\5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&4\\7&2\\3&1\end{pmatrix}$

Задание 2. Вычислить определитель матрицы А (таблица 2).

Таблица 2

№	Матрица А	№	Матрица А	№	Матрица А
1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&7&10&13\\3&5&11&16&21\\2&-7&7&7&2\\1&4&5&3&10\end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix}-2&3&0&-1&3\\1&1&3&10&2\\3&2&0&5&5\\2&8&-4&-3&2\\0&-3&-1&1&3\end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix}1&3&3&1&1\\3&6&7&2&3\\7&3&6&2&-2\\0&-4&7&2&-5\\-2&7&5&1&7\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}3&6&5&6&4\\5&9&7&8&6\\6&12&13&9&7\\4&6&6&5&4\\2&5&4&5&3\end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&2&3&4\\3&2&1&2&3\\4&3&2&1&2\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}-2&5&4&4&0\\-2&7&3&5&-1\\-4&-2&5&-2&-4\\-6&4&5&2&-4\\-3&3&2&1&-2\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}2&1&1&2&6\\0&1&-2&1&1\\2&3&1&2&-1\\1&5&1&-1&0\\-1&1&4&2&1\end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix}3&3&5&7&9\\2&1&2&3&4\\5&3&3&5&7\\4&3&2&1&2\\3&7&5&3&3\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}2&-1&3&4&5\\4&-2&7&8&7\\-6&4&-9&-2&3\\3&-2&4&1&2\\-2&6&5&4&3\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1&1&3&5&4\\0&5&2&1&8\\1&4&0&-1&5\\3&5&3&0&7\\1&2&-1&3&1\end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix}5&-6&10&-7&2\\-3&4&2&2&2\\-2&2&4&5&3\\6&-8&7&-4&1\\2&1&7&0&5\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}2&-3&5&-2&1\\3&2&5&-4&3\\-2&3&-4&2&3\\6&4&7&-8&1\\2&-1&7&1&5\end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 12 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & 9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & 5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -9 & 2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти произведение матриц А и В. Коэффициенты взять из таблицы 3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} k_1 & 2 & -1 \\ -1 & k_2 & 3 \\ -2 & 4 & k_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Таблица 3

№	k_1	k_2	k_3	**№**	k_1	k_2	k_3	**№**	k_1	k_2	k_3	**№**	k_1	k_2	k_3	**№**	k_1	k_2	k_3
1	-5	7	-3	**7**	-2	7	3	**13**	5	2	-3	**19**	3	-4	2	**25**	3	3	-4
2	2	5	-3	**8**	1	5	3	**14**	1	3	-1	**20**	3	2	5	**26**	2	-4	1
3	-2	3	1	**9**	2	3	4	**15**	2	2	-1	**21**	-1	0	4	**27**	5	4	2
4	4	3	-3	**10**	3	1	2	**16**	3	-4	5	**22**	0	-1	2	**28**	3	-5	2
5	2	3	-2	**11**	2	5	3	**17**	2	-3	1	**23**	2	1	0	**29**	-3	-4	4
6	4	-4	-3	**12**	1	2	7	**18**	3	4	3	**24**	-3	2	-1	**30**	-1	-2	3

Задание 4. Дана матрица А (таблица 4). Найти A^{-1} и установить, что $AA^{-1} = E$.

Таблица 4

№	Матрица А	№	Матрица А	№	Матрица А	№	Матрица А
1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 5. Найти ранг матрицы А (таблица 5).

Таблица 5

№	Матрица А	№	Матрица А	№	Матрица А
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & 12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & -23 & 4 & 4 \\ 3 & 21 & 2 & 7 \\ 5 & -27 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6	$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&-1&2&0\\1&3&4&-2\\4&-3&1&1\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&1\\1&2&-1&1\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&1&5&5\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&5&1\\1&-4&4&0\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}3&1&-2&4\\1&3&1&2\\1&5&0&1\\3&-5&1&7\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}3&-1&2&4\\0&-2&3&1\\4&1&3&2\\5&3&1&-3\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}2&-1&3&5\\4&-3&0&3\\0&-2&3&7\\4&-1&1&17\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&3&0&-1\\1&2&1&4\\1&3&-1&0\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix}1&-3&5&6\\1&-3&1&1\\-1&-3&13&16\\1&-3&9&11\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}5&2&-3&1\\4&1&-2&3\\1&1&-1&2\\3&4&-1&2\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&1&2&3\\4&5&1&2\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&0&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$

Задание 6. Решить систему уравнений методом обратной матрицы по формулам Крамера и методом Гаусса (таблица 6)

Таблица 6

№	Уравнение	№	Уравнение	№	Уравнение
1	$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\3x_1+4x_2-2x_3=1\\5x_1+x_3=-1\end{cases}$	11	$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=9\\4x_1+x_2+2x_3=7\\5x_1+3x_2+x_3=9\end{cases}$	21	$\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3=2\\4x_1-5x_2+2x_3=1\\5x_1-6x_2+4x_3=3\end{cases}$
2	$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3=-3\\x_1+3x_2-5x_3=3\\8x_1-x_2+7x_3=-6\end{cases}$	12	$\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1\\x_1-2x_2+4x_3=3\\3x_1-x_2+5x_3=2\end{cases}$	22	$\begin{cases}3x_1+2x_2-4x_3=7\\5x_1+x_2+3x_3=6\\-4x_1-2x_2+2x_3=-6\end{cases}$
3	$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1-5x_2+3x_3=1\\2x_1+7x_2-7x_3=8\end{cases}$	13	$\begin{cases}3x_1+5x_2+9x_3=1\\x_1+4x_2+7x_3=2\\2x_1+3x_2+9x_3=4\end{cases}$	23	$\begin{cases}-x_1+2x_2-4x_3=3\\3x_1-x_2+5x_3=-2\\2x_1-4x_2+3x_3=-1\end{cases}$
4	$\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3=12\\3x_1+2x_2+5x_3=-10\\2x_1+5x_2-3x_3=-6\end{cases}$	14	$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=3\\-4x_1+4x_2-3x_3=1\\-5x_1+x_2-4x_3=-3\end{cases}$	24	$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=-5\\x_1-x_3=4\\2x_1-x_2+3x_3=-1\end{cases}$
5	$\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3=2\\x_1-x_2+2x_3=-3\\6x_1+4x_2+x_3=3\end{cases}$	15	$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2\\x_1+5x_2-4x_3=-5\\4x_1+x_2-3x_3=3=-4\end{cases}$	25	$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=2\\4x_1+3x_3=7\\6x_1+x_2+3x_3=10\end{cases}$

6	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=6 \\ 4x_1+4x_2+x_3=8 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2=4 \\ x_1+3x_2+x_3=6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=16 \end{cases}$	17	$\begin{cases} -x_1-2x_2+x_3=1 \\ -x_1+2x_2+2x_3=2 \\ x_1-x_2-x_3=1 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+x_3=-4 \\ 4x_1+x_2-7x_3=-5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=3 \end{cases}$	18	$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=4 \\ 5x_1-x_2+4x_3=13 \\ 2x_2-3x_3=-1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=5 \\ 2x_1+2x_2-x_3=2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=6 \\ -2x_1+2x_2=4 \\ x_1-2x_2+2x_3=-5 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+2x_2+x_3=-5 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1+5x_2+4x_3=8 \\ x_1+4x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=5 \end{cases}$	30	$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-6x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-4x_3=2 \end{cases}$

Тестовые задания

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 3; б) 99; в) -91; г) -91; д) 3.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

а) -12; б) -4; в) -37; г) -36; д) -76.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

а) -140; б) 32; в) -32; г) 0; д) 140.

4. Дана матрица А=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы $А^Т$ равен

а) -3; б) 5; в) 3; г) 6; д) -5.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

а) 56; б) -56; в) 16; г) -16; д) 32.

6. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы A^T равен

а) 1; б) -2; в) 0; г) -4; д) -1.

7. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы A^T равен

а) 1; б) 15; в) 2; г) 3; д) 9.

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

а) 1; б) 4; в) 2; г) 3; д) 0.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 0; б) 2; в) 6; г) 1; д) 8.

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

а) -15; б) 0; в) 15; г) 3; д) 2.

11. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

а) -3; б) -1; в) 1; г) 3; д) 0.

12. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & x & 3 \end{vmatrix} = -1$.

а) 2,1; б) 2; в) -2; г) 0; д) 3.

13. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 134; б) -134; в) 52; г) 0; д) -52.

14. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{32} определителя $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 134; б) -24; в) -5; г) 0; д) 140.

15. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{13} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

а) -16; б) -33; в) 18; г) 0; д) 34.

16. Вычислить алгебраическое дополнение элемента a_{11} определителя $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

а) 0; б) 10; в) -10; г) -40; д) 40.

17. Найти произведение A, B, если A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -14 & 36 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -14 & 106 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 14 & 106 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 106 \end{pmatrix}$.

18. Найти произведение A, B, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & 21 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 47 & 21 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 12 & 41 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$.

19. Найти A+ B, если A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; в)$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

г)$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 10 & 19 \end{pmatrix}$.

20. Вычислить ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 0.

21. Найти произведение A, B, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \\ -7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 8 \\ 1 & -51 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 8 \\ 1 & -51 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 6 & 8 \\ 1 & 51 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -6 & -8 \\ 1 & -51 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -6 & -8 \\ -1 & -51 \end{pmatrix}$.

22. Вычислить ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) 5.

23. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать $c_{12} + c_{21}$.

а) 18; б) 6; в) 4; г) 24; д) -4.

24. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать $c_{12} + c_{21}$.

а) 0; б) 3; в) 1; г) -3; д) 6.

25. Найти -5A+2B, если A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В ответе указать произведение элементов второго столбца матрицы.

а) 0; б) -80; в) -140; г) -75; д) 30.

26. Найти C = -5A+2B,если A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, указать $c_{12}+c_{21}$.

а) -18; б) -39; в) -21; г) 1; д) 2.

27. Найти произведение BA, если B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в ответе указать сумму всех элементов матрицы.

а) 6; б) 4; в) 8; г) 13; д) 9.

28. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. В ответе указать $c_{12}+c_{21}$.

а) -49; б) -13; в) 15; г) 18; д) 20.

29. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. В ответе указать $c_{11}+c_{22}+c_{32}$.

а) 11; б) 10; в) 4; г) 20; д) 3.

30. Найти произведение C= $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. В ответе указать c_{32}.

а) -4; б) -12; в) 28; г) -11; д) 22.

31. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. В ответе указать размерность матрицы.

а) 1× 3; б) 2 × 3; в) 3 × 2; г) 3 × 3; д) 2 × 2.

32. Найти произведение C=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. В ответе указать размерность матрицы.

а) 1× 2; б) 2 × 3; в) 2 × 2; г) 3 × 2; д) 3 × 1.

33. Найти A^{-1} ,если A =$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; д)$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

34. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 36 & -17 \\ 1 & 22 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 36 & 22 \\ 1 & 22 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 36 & -17 \\ 1 & 22 & -9 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 13 & 36 & 0 \\ 3 & 22 & -9 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 36 & 0 \\ 1 & 22 & -9 \end{pmatrix}$.

35. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму всех элементов матрицы.

а) -5; б) -2; в) 7; г) 1; д) -5.

36. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму элементов первой строки матрицы.

а) 0; б) 5; в) -16; г) -12; д) 24.

37. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму элементов первого столбца матрицы.

а) -9; б) 25; в) -25; г) 2,5; д) 16.

38. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. В ответе указать произведение элементов первой строки матрицы.

а) 12; б) -96; в) 154; г) -74; д) -42.

39. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму элементов второго столбца матрицы.

а) -5; б) -1; в) -2; г) 0; д) 6.

40. Найти A^{-1} ,если $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму элементов третьей строки матрицы.

а) 0; б) -4; в) -13; г) -52; д) 12.

41. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$. В ответе указать $2x_1-x_2+x_3$.

а) 1; б) 0; в) 6; г) 2; д) 4.

42. Решить систему $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 11x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$. В ответе указать $x_1+x_2+x_3$.

а) 3; б) 11; в) -3; г) 2; д) 1.

43. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$. В ответе указать $x_1-x_2-x_3$.

а) 0; б) -4; в) -5; г) 2; д) 4.

44. Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2\ \ x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$. В ответе указать $10x_1+2x_2+3x_3$.

а) 23; б) -3; в) -17; г) -17; д) 15.

45. Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$. В ответе указать значение произведения $x_1x_2x_3$.

а) 6; б) 7; в) -7; г) -6; д) 0.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Функция одной переменной

3.1.1. Постоянные и переменные величины

При изучении различных явлений природы, а также при решении инженерных, технических задач часто сталкиваются с множеством различных величин. Некоторые величины сохраняют свое постоянное числовое значение, другие же могут принимать различные значения.

Величины, которые сохраняют одно и то же числовое значение в условиях данного эксперимента называют *постоянными* или *параметрами*. Примерами постоянных величин могут служить:

1) температура кипения воды при нормальном давлении;
2) скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно;
3) ускорение силы тяжести на широте 45^{o}.

Величина называется *переменной*, если она в условиях данного эксперимента может принимать различные значения. Например, путь, пройденный телом с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения: $S = v \cdot t$. Этой формулой выражена зависимость переменной S – пути, пройденного телом, от переменной t – времени движения. Видно, что переменные S и t не могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Придав определенное значение переменной t, мы тем самым единственным образом определим значение переменной S.

Постоянные величины обычно обозначают первыми буквами латинского алфавита $(a,b,c,...)$, переменные – последними $(t,u,x,y,z,...)$.

3.1.2. Понятие функции

Пусть X и Y – произвольные непустые множества.

Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y.

В том случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется *оператором*; отображение нечислового множества X в числовое множество Y называется *функционалом*; отображение числового множества X в числовое множество Y называется *функцией*.

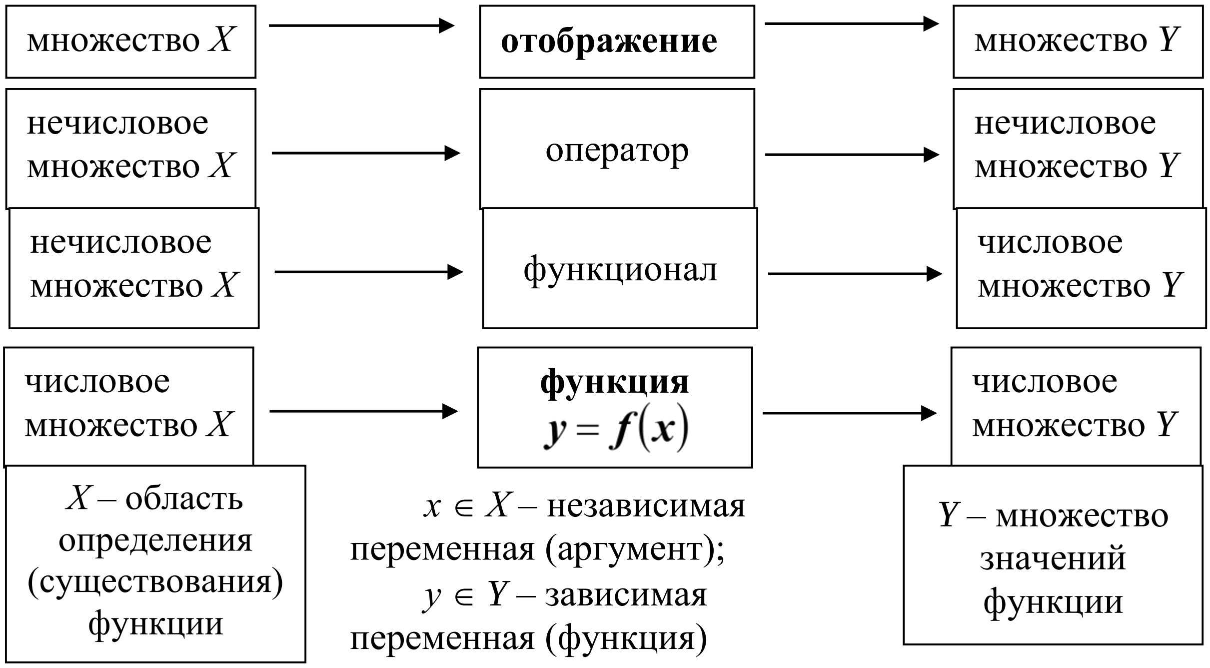


Рисунок 2 – Взаимосвязь понятий

Отображение числового множества X в числовое множество Y называется *функцией* и обозначается $y = f(x)$.

Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = F(x)$ и т.д.

Например, скорость свободно падающего тела есть функция времени t, т.е. $V = f(t)$, а правило, устанавливающее соответствие между переменными V и t, известно: $V = gt$.

Если аргумент x принял определенное числовое значение a, то функция $f(x)$ примет определенное значение, которое обозначается символом $f(a)$ или $y\big|_{x=a}$ и называют *частным значением функции*.

Например, если $f(x) = 3x + 2$, то $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$;

если $\varphi(x) = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, то $\varphi(2) = 4 - \dfrac{2^2}{2} = 4 - 2 = 2$;

если $f(t) = \dfrac{2t}{1 + \sin^2 t}$, то $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\pi}{4}}{1 + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{1 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{3}$.

3.1.3. Способы задания функции

Существует несколько способов задания функции. Рассмотрим их.

1. Аналитический способ задания функции

Функция считается заданной, если приведено правило для определения значения функции, соответствующего значению аргумента.

Часто это правило задают формулой, например:

$$y = 2x + 5; \quad y = \frac{2x^2 - 3}{x + 1}; \quad y = \sqrt{x + 1}.$$

Функцию можно задать и несколькими формулами:

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{при} \quad x \le 0 \\ x^2 + 3 & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

Способ задания функции при помощи формул называют *аналитическим* способом.

Единственный недостаток аналитического способа – отсутствие наглядности. Основным его преимуществом является возможность широкого использования математического аппарата для исследования функции.

Функция называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2 + 5x + 1$.

Функция называется *неявной*, если она задана уравнением вида $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно *y*. Например, $y + \sin y - x - \cos x = 0$.

2. Графический способ задания функции

В основе этого метода лежит метод координат. Функция $y = f(x)$ задается в виде геометрического места точек (x; y), образующих некоторую линию в плоскости xOy. При изучении многих реальных процессов с помощью приборов получаются кривые, по которым можно судить о поведении изучаемой функции, например, показания осциллографа, электрокардиографа и т.д. В математике часто используют графический способ представления функции даже в тех случаях, когда известна формула, определяющая функцию. Например, графиком $y = x + 1$ будет прямая (рисунок 3 а); графиком $y = x^2$ будет парабола (рисунок 3 б).

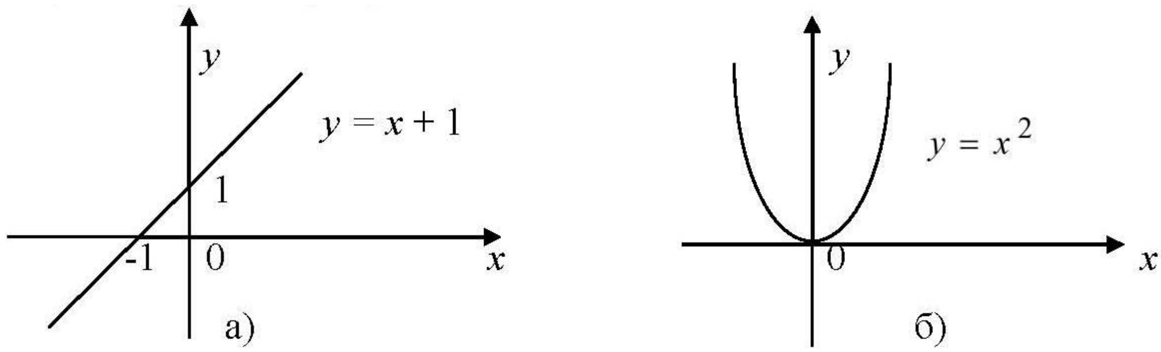


Рисунок 3 – Примеры графика функции

3. Табличный способ задания функции

При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, ...x_n$ и соответствующие значения функции $y_1, y_2, ...y_n$ в таблицу, т.е.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Этот способ является наиболее удобным, когда изучается зависимость между переменными величинами, по результатам наблюдений.

Для облегчения вычислений составляются таблицы часто встречающихся функций, например, таблица значений, применяемой в теории вероятностей функции Лапласа $\Phi(x)$, таблицы квадратов, логарифмов, тригонометрических функций и т.д.

4. Словесный способ задания функции

Функция описывается правилом ее составления, например,

- функция Дирихле $f(x)=1$, если x – рационально; $f(x)=0$, если x – иррационально;

- описание физического состояния человека, выраженное через его температуру в течение дня: с 7.00 до 15.00 ч. температура была равна 36,8°, с 15.00 до 22.00 ч. равнялась 37°.

3.1.4. Область определения функции

Данное понятие широко рассматривалось в курсе школьной математики. Напомним, что под *областью определения* (существования) функции $f(x)$ называется совокупность всех действительных значений аргумента x, при которых функция определена и выражается действительным числом. *Обозначается* $D(y)$.

Рассмотрим примеры.

Областью определения функции $y = x^2 - 1$ является бесконечный интервал (-∞, +∞), так как функция определена при всех значения x.

Функция $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ определена при всех значениях x, кроме значения x=1, так как при этом значении знаменатель обращается в нуль, т.е. область определения данной функции состоит из совокупности двух интервалов $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

При нахождении области определения функций, заданных формулами, следует обратить внимание на элементы формул, содержащих:

а) знаменатели дробных выражений – функция определена для тех значений x, при которых знаменатели отличны от нуля;

б) корни четных степеней – функция определена для тех значений x, при которых подкоренное выражение будет неотрицательно;

в) логарифмических функций – функция определена для тех значений x, при которых выражение под знаком логарифма, больше нуля и выражение, стоящее в основании логарифма больше нуля и не равно единице;

г) обратных тригонометрических функций $arcsin\ \varphi(x)$ и $arccos\ \varphi(x)$ – выражение, стоящее под знаком арксинуса и арккосинуса, по модулю не превосходило бы единицы, т.е. $|\varphi(x)| \le 1$.

Решение типовых примеров и задач

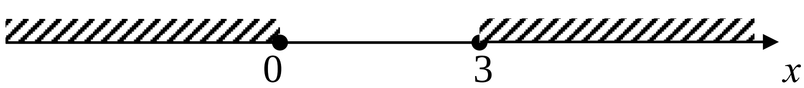
Пример. Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 6x}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \lg(x-1)$;

3) $y = \sqrt[3]{5x^2 - 4x + 1}$; 4) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

Решение.

1) Функция $y = \sqrt{2x^2 - 6x}$ определена только для неотрицательных значений подкоренного выражения, поэтому $2x^2 - 6 \ge 0$ или $2x(x-3) \ge 0$. Отсюда методом интервалов находим, что $x \le 0$ или $x \ge 3$.



Следовательно, $D(y) = (-\infty;\ 0] \cup [3;\ +\infty)$.

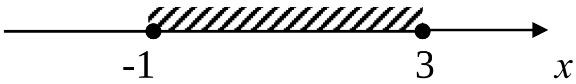
2) Найдем область определения каждого слагаемого в отдельности. Общая часть этих областей и будет областью определения функции. Для

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ имеем $x>0$, а для $\lg(x-1)$ имеем $x>1$. Тогда для суммы $\frac{1}{\sqrt{x}}+\lg(x-1)$ область определения найдем из $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$, т.е. $D(y)$ = (1; +∞).

3) Данная функция определена для всех действительных значений *x*, поскольку она содержит корень нечетной (третьей) степени, т.е. $D(y)=R$.

4) Функция будет определена только для тех значений *x*, для которых $\left|\frac{x-1}{2}\right|\le 1$ или $-1\le\frac{x-1}{2}\le 1$. Решим это двойное неравенство

$-2\le x-1\le 2$
$-2+1\le x\le 2+1$
$-1\le x\le 3$



Итак, $D(y)=[-1;\ 3]$.

3.1.5. Основные свойства функции

1. Четность и нечетность

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любых значений *x* из области определения $f(-x)=f(x)$ и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$. В противном случае $y=f(x)$ называется функцией *общего вида***.**

Например, функция $y=x^2$ является четной, так как $f(-x)=(-x)^2=x^2$ и $f(-x)=f(x)$, а функция $y=x^3$ – нечетная, так как $f(-x)=(-x)^3=-x^3$ и $f(-x)=-f(x)$.

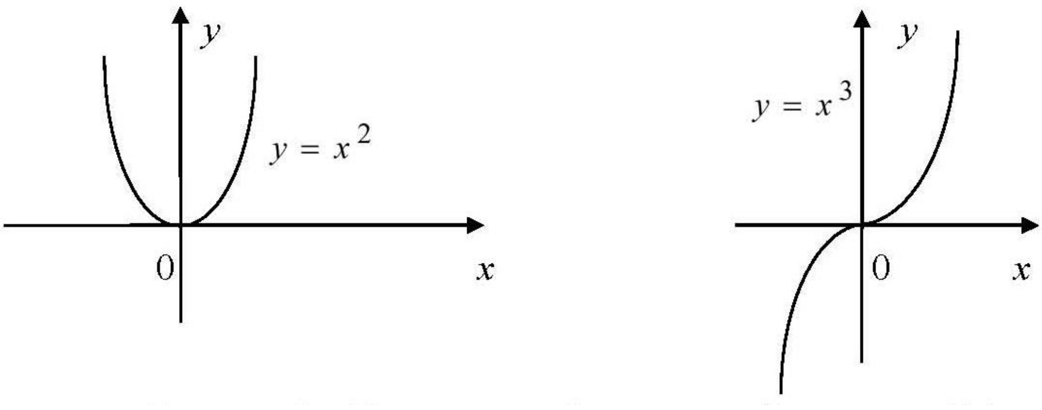


Рисунок 4 – Примеры графиков четной и нечетной функций

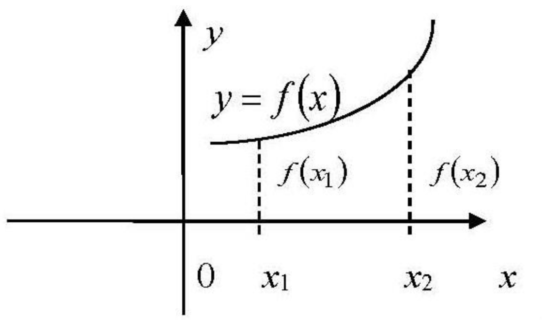
График четной функции симметричен относительно оси ординат (график $y = x^2$), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (график $y = x^3$) (рисунок 4).

2. Монотонность

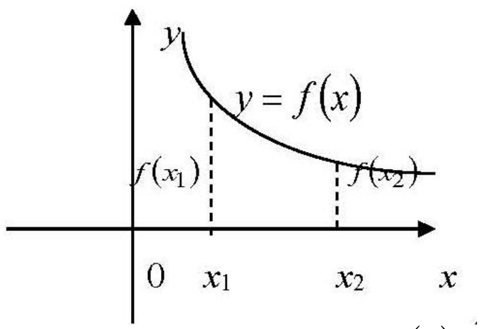
Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке *X*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда функция возрастает на промежутке *X*, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$ (рисунок 5).

Возрастающая и убывающая функции называются *монотонными.*



возрастающая функция $y = f(x)$



убывающая функция $y = f(x)$

Рисунок 5 – Возрастающая и убывающая функция

3. Ограниченность

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке *X*, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ – ограниченные функции, поскольку $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$ для любого действительного *x*.

4. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T, называемое *периодом* функции, что для всех *x* из области определения функции, выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x) = f(x-T).$$

Например, функция $y = \sin x$ – периодическая с периодом 2π, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

График периодической функции будет повторяться через каждый промежуток T равный периоду этой функции.

Периодические функции описывают, в частности, звуковые и электромагнитные волны (сигналы).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции одной переменной. Приведите примеры.
2. Что называется областью определения функции?
3. Какие способы задания функции существуют?
4. Перечислите основные элементарные функции: их графическое изображение, свойства.
5. Перечислите основные свойства функции. Приведите примеры.

3.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

3.2.1. Понятие предела функции

Теория пределов – это один из разделов математического анализа, а понятие предела является фундаментальным в математике. Так, например, в алгебре с понятием предела связан вопрос о сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии; в геометрии – вопрос о вычислении длины окружности. Вопрос решения пределов является достаточно обширным, поскольку существуют десятки приемов решений пределов различных видов. Рассмотрим основные термины, приводящие к понятию «предела».

Ограниченные и неограниченные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M,$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Последовательность $\{x_n\}$называется *ограниченной сверху*, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \leq M.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \geq M$$

Например, последовательность $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Число A называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n>N$ выполняется условие:

$$|A-x_n|<\varepsilon.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к A при $n\to\infty$.

Обозначается предел следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

lim – первые буквы латинского слова limes – предел.

Свойство: Если отбросить какое-либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Теорема 1. Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a;\ x_n \to b; \quad a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\le|a-x_n|+|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

А т.к. ε – любое число, то $|a-b|=0$, т.е. $a = b$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $x_n \to a$, то $|x_n|\to|a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n-a|<\varepsilon$. В то же время:

$$\big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|, \text{ т.е. } \big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon, \text{ т.е. } |x_n|\to|a|.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность

$$x_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n}, \text{при четном } n\\[2ex] 2-\dfrac{1}{n}, \text{при нечетном } n\end{cases}$$

не имеет предела, хотя $|x_n|\le 2.$

Монотонные последовательности

Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность *возрастающая*.

Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность *неубывающая*.

Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность *убывающая*.

Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность *невозрастающая*.

Все эти последовательности называются *монотонными*. Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Например, $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная, а $\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Предел функции в точке

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена).

Число *A* называется *пределом* функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Графическое обозначение определения предела представлено на рисунке 6.

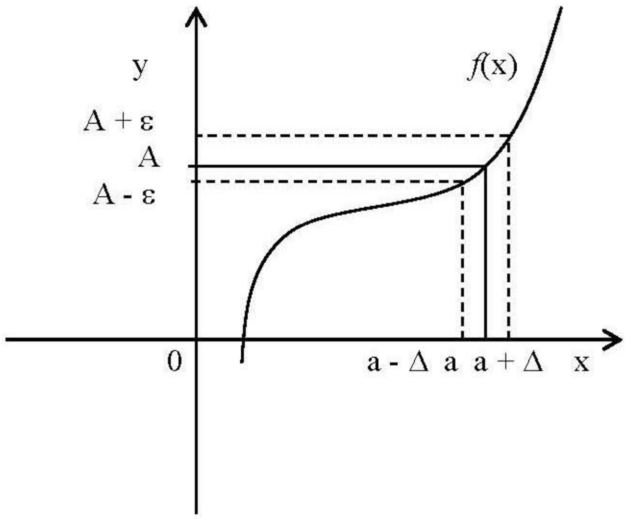


Рисунок 6 – Графическое представление предела функции

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Если f(x) → A_1 при x → a только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ называется *пределом* функции f(x) в точке x = a *слева*, а если f(x) → A_2 при x → a только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется *пределом* функции f(x) в точке x = a *справа* (рисунок 7).

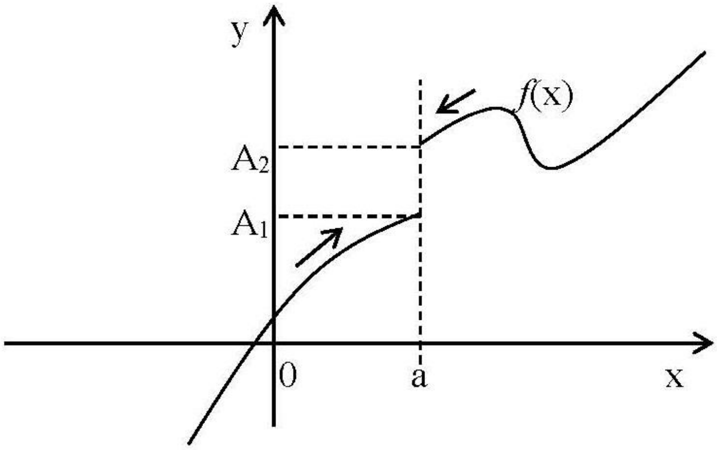


Рисунок 7 – Левосторонний и правосторонний предел на графике

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – *конечный предел* функции f(x).

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Проиллюстрируем понятие предела функции на примерах.

Рассмотрим рисунок 8. Здесь при приближении значения аргумента к числу $x_o = 3$ $(x \to 3)$ значение функции приближается к числу $A = 2$ как угодно близко (в данном примере даже становится равной 2). Записывается это так: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ или в общем случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

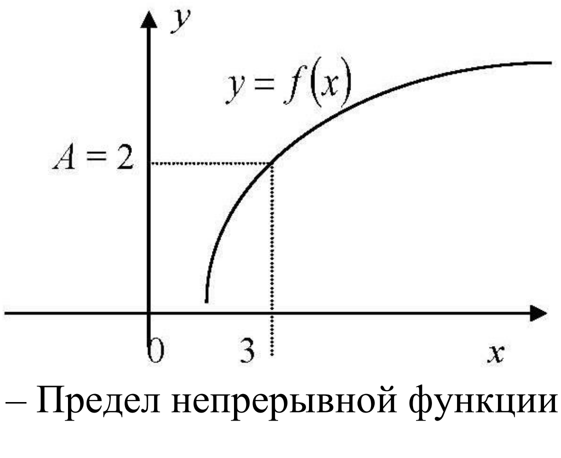


Рисунок 8 – Предел непрерывной функции в точке

В следующем примере на рисунке 9 при приближении значения x к нулю значение функции может стать как угодно малым по абсолютной величине:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

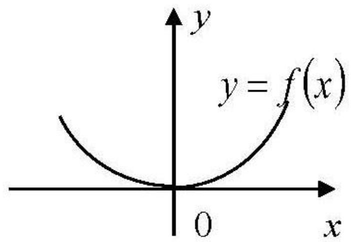


Рисунок 9 – Пример функции с малым предельным значением по абсолютной величине

На рисунке 10 показана функция, которая при неограниченном увеличении значения x $(x \to \infty)$ значение функции приближается к конечному числу A: $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$. Прямая $y = A$ является горизонтальной асимптотой к кривой $y = f(x)$.

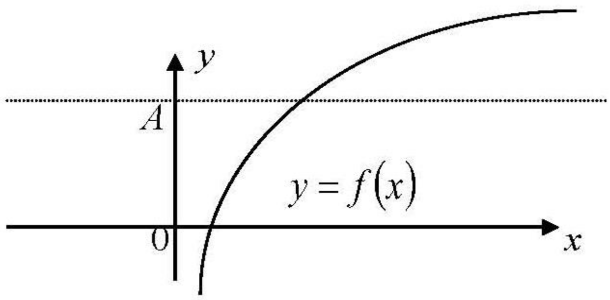


Рисунок 10 – Функция, имеющая горизонтальную асимптоту

В следующем случае аргумент x неограниченно увеличивается $(x \to \infty)$ и значение функции при этом стремится к нулю: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (рисунок 11). Это означает, что ось *Ox* для данной функции является горизонтальной асимптотой.

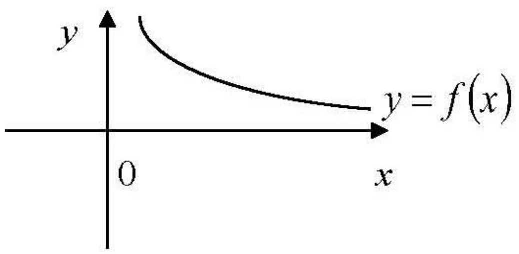


Рисунок 11 – Функция, имеющая горизонтальную асимптоту ось *Ox*

На графике, представленном на рисунке 12, аргумент x стремится к конечному числу a при этом значение функции по абсолютной величине неограниченно возрастает, причем при стремлении x к a справа $f(x) \to -\infty$, при стремлении x к a слева $f(x) \to +\infty$.

Коротко это записывают так: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$ – правосторонний предел; $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ – левосторонний предел.

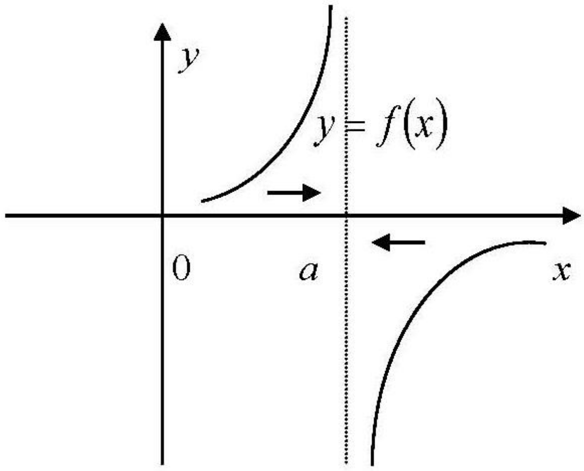


Рисунок 12 – Функция с левосторонним и правосторонним пределами

На рисунке 13 показан случай, в котором при неограниченном увеличении значения аргумента $(x \to \infty)$ значение функции также растет: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

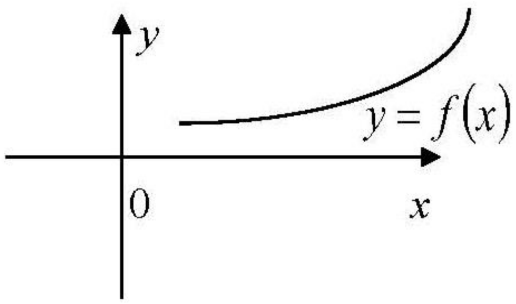


Рисунок 13 – Возрастающая функция с бесконечным пределом

Бесконечно-большие и бесконечно-малые величины

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой величиной (б.б.в.)* при $x \to a$ (a – число или один из символов +∞, -∞), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и *бесконечно малой величиной (б.м.в.)* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Теорема. Для того, чтобы функция f(x) при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.
5. Понятие предела позволяет прогнозировать поведение различных процессов как на бесконечности, так и в конкретных точках.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Следствие. $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Теорема 5. Если *f(x)>0* вблизи точки *x = a* и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то *A>0.*

Аналогично определяется знак предела при *f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.*

Теорема 6. Если *g(x) ≤ f(x) ≤ u(x)* вблизи точки *x = a* и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x \to a} = A$.

Функция *f(x)* называется *ограниченной* вблизи точки *x = a*, если существует такое число *M>0*, что $|f(x)| < M$ вблизи точки *x = a*.

Теорема 7. Если функция *f(x)* имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена вблизи точки *x = a*.

Вычисление пределов

1. Прямая подстановка: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Это наиболее общий прием, который всегда используется первым.

2. Раскрытие неопределенности:

1) Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Если непосредственная подстановка предельного значения аргумента в дробную функцию обращает ее числитель и знаменатель в нуль, т.е. $\left(\frac{0}{0}\right)$, то подстановку можно выполнять лишь после предварительного сокращения дробей.

2) Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Если непосредственная подстановка предельного значения аргумента в дробную функцию обращает ее числитель и знаменатель в бесконечность, т.е. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то необходимо числитель и знаменатель разделить на переменную с наибольшим показателем степени или применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

а затем применить непосредственную подстановку.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Решение. Пусть при n > N верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример 2. Показать, что при n→∞ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Решение. Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$. Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim \{x_n\} = 2$.

Пример 3. Вычислить предел:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2+3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+1}{x+1}$

Решение.

1) Применяя прямую подстановку, имеем:

$$\lim_{x\to 3} f\left(x^2+2x+3\right)=3^2+2\cdot 3+3=9+6+3=18.$$

2) После прямой подстановки получаем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+3x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Сократим функцию, разложив знаменатель на множители путем вынесения общего множителя за скобки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{0+3}=\frac{1}{3}.$$

3) После прямой подстановки получаем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

которую можно раскрыть сокращением дроби. В числителе квадратный трехчлен, который можно разложить по формуле:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена, а в знаменателе – разность квадратов, которая разлагается по формуле:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Тогда получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}.$$

4) Прямая подстановка предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{(\infty)^3+1}{\infty+1}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Рассмотрим два способа решения:

первый способ (деление на переменную с наибольшим показателем степени):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty;$$

второй способ (по правилу Лопиталя):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1}=\frac{3\cdot\infty}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty .$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Найти предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3+(1-3n)^3}{8n^3-2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-(1+2n)^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

2. Написать первые четыре члена последовательности и найти её предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{3n^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{1+n+3n^2}$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3+15n^2+9n+1}{5n^4+6n^2-3n-4}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{n+1}$ д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n+1}$.

3. Сформулировать определение предела функции в точке $x=a$. Исходя из определения доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{6x-x^2-5}{x-1}=4$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=3$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=2$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4x-12}{x^2+2x}=4$; д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2$; е) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}=2$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}=5$; з) $\lim\limits_{x\to2}\frac{5x-x^2-6}{x-2}=1$; и) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}=-1$.

4. Вычислить предел, используя прямую подстановку:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+3x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x+1}{x^3-4x^2-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+3x-4}{2x^3-4x-8}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-x-6}{x^2-7x+4}$; е) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-15}{3x^2-9x+7}$.

5. Раскрыть неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-6x+8}$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-9x+8}{x^2-4x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-10x+24}{36-x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{2x^2-3x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-36}{x^2-14x+48}$; и) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2+x-12}{x^4-16x^2}$.

6. Раскрыть неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x-15}{4x^3+2x^2-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+5x^2-2x+2}{-4x^3-2x^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2-1}{9x^4+2x^3-9x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+3x^2+x+4}{-10x^4-2x^3+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-6x^2+x-1}{x^3+2x^2-9x+9}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-6x^2-3x+7}{2x^3+3x^2+x-8}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$;

к) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3}$; л) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-x+3}{1+2x+3x^2+4x^3}$; м) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+2}{x+1}$.

7. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x+8}{x^2+8x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^3-9x}$; е) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2+x-12}{x^2-10x+24}$;

ж) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-10x+24}{x^2-14x+48}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3x+1}{2x^3+3x^2+x-8}$; и) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте понятие последовательности.
2. Какая последовательность называется ограниченной сверху? Ограниченной снизу?
3. Что называется пределом последовательности?
4. Сформулируйте теоремы о последовательностях.
5. Перечислите виды монотонных последовательностей.
6. Что называют односторонними пределами? Какие виды Вы знаете?
7. Что называется бесконечно-большой (бесконечно-малой) величиной?
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
9. Что называется пределом функции?
10. Какие виды неопределенностей вы знаете? Как они раскрываются?
11. Сформулируйте правило Лопиталя.

3.2.2. Непрерывность функции

Точка $x=x_0$ является точкой *непрерывности* функции $y=f(x)$, если существуют конечные пределы справа и слева и эти пределы равны значению функции в той точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0).$$

Если же хотя бы одно равенство из определения нарушено, то тогда точка $x = x_0$ является точкой *разрыва* функции.

Наглядное представление о непрерывности линии можно выразить так: линия непрерывна, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги (рисунок 14).

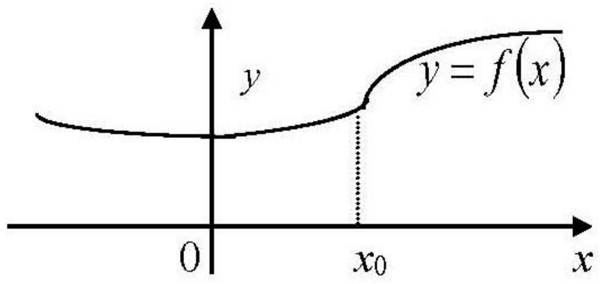


Рисунок 14 – Пример графика непрерывной функции

Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел справа $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и конечный предел слева $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, и эти пределы равны, но значение функции в точке не существует (на кривой эта точка «выколота»), то говорят, что функция в точке $x = x_0$ имеет *устранимый разрыв* (рисунок 15).

Если односторонние пределы $f(x)$ существуют, но они не равны, то функция в этой точке делает «скачок». Точка $x = x_0$ в этом случае называется точкой *разрыва I рода* для данной функции (рисунок 16).

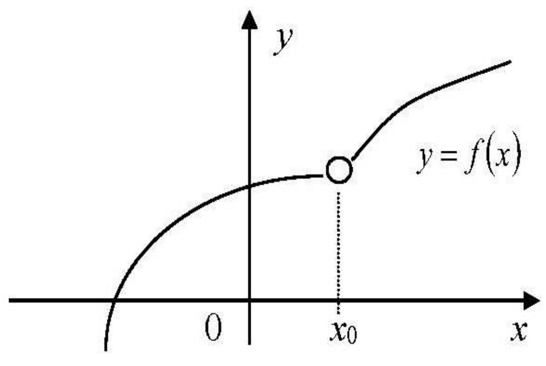


Рисунок 15 – Устранимый разрыв

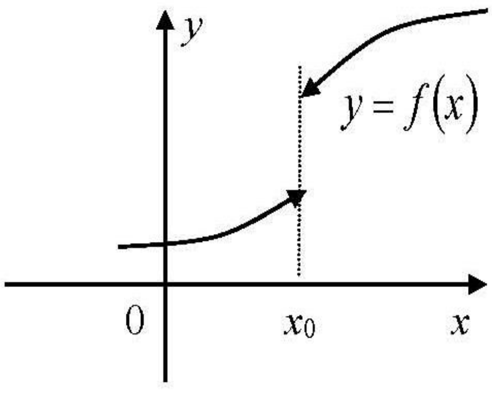


Рисунок 16 – Точка разрыва I рода

Если функция $y = f(x)$ не имеет конечных пределов ни справа, ни слева (а может быть только с одной стороны), то точка $x = x_0$ в этом случае называется *точкой разрыва II рода* (рисунок 17).

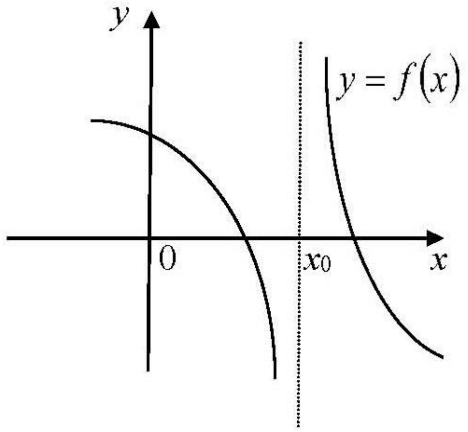


Рисунок 17 – Точка разрыва II рода

Замечание. Точка разрыва второго рода не обязательно является точкой бесконечного разрыва. Так для функции $y = sin\frac{1}{x}$ не существуют ни конечные, ни бесконечные односторонние пределы при $x \to 0$, так как не существует ни конечный, ни бесконечный предел функции sinx при $x \to \infty$, и точка x=0 является для этой функции точкой разрыва второго рода, но не точкой бесконечного разрыва.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность функции $y = 3x - 1$ в точке $x = -1$.

Решение. Проверим выполнимость трех условий.

1. Функция определена в точке $x = -1$ и $y(-1) = -4$.
2. $\lim\limits_{x\to-1}(3x-1) = \lim\limits_{x\to-1}3x + \lim\limits_{x\to-1}(-1) = 3\lim\limits_{x\to-1}x + \lim\limits_{x\to-1}(-1) = 3\cdot(-1) - 1 = -4$.
3. $\lim\limits_{x\to-1}(3x-1) = y(-1) = -4$.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1. \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем односторонние пределы для граничных точек x=1 и x=-1:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to1-0} f(x) = 3$$

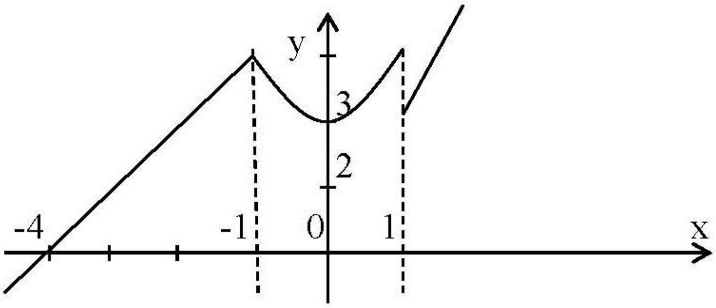
$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to1+0} f(x) = 2$$

Тогда в точке x=-1 функция непрерывна, так как

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} f(x) = f(-1) = 3,$$

а в точке x=1 точка разрыва I рода, так как $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1-0} f(x)$.

На графике это будет выглядеть следующим образом:



<u>Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность функции в точке:

а) $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ в x_0=-1; б) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{x-6}$ x_0=6;

в) $y=\dfrac{2x^2-x-15}{x-3}$ x_0=3; г) $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$ x_0=1.

2. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва:

а) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\le x\le 1 \\ \frac{3}{1-x}, & x>1. \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0, \\ x^2+1, & 0\le x\le 3 \\ -x+3, & x>3. \end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{2+x}, & x<-2, \\ 2, & -2\le x\le 2 \\ \frac{3}{2x}, & x>1. \end{cases}$; г) $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\le -1, \\ 1+2x, & -1<x<1 \\ \frac{1}{x-2}, & x\ge 1. \end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^4, & x<-2, \\ 7-2x, & -2\le x\le 1 \\ \frac{3}{x-1}, & x>1. \end{cases}$; е) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 3 \\ 2x+4, & x>3. \end{cases}$;

ж) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^4, & x<1, \\ 7-2x, & 1\le x\le 3 \\ \frac{3}{x-3}, & x>3. \end{cases}$; з) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3, & x<1, \\ 3-2x, & 1\le x\le 2 \\ \frac{3}{x-2}, & x>2. \end{cases}$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция является непрерывной? Приведите пример.
2. Перечислите условия непрерывности функции.
3. Что называется точкой разрыва функции?
4. Какая точка является точкой, устранимого разрыва?
5. Охарактеризуйте точки разрыва I и II рода.
6. Всегда ли точка разрыва II рода является точкой бесконечного разрыва?

3.2.3. Производная функции. Механический и геометрический смысл производной

Рассмотрим функцию $\Delta y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x. Перейдем от значения x к другому значению аргумента x, т.е. к точке x_1. В точке x_1 функция принимает значение $f(x_1)$ (рисунок 18).

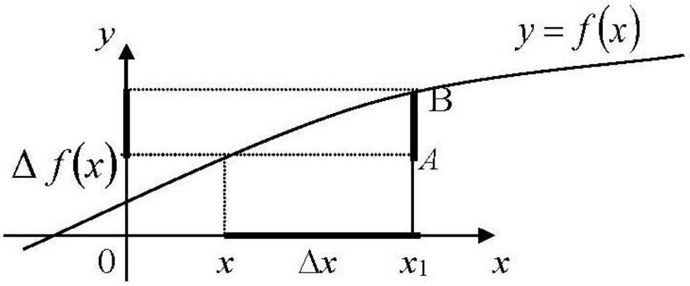


Рисунок 18 – Приращение функции и приращение аргумента

Разность между новым и первоначальным значением аргумента называется *приращением* аргумента и обозначается Δx. Таким образом,

$$\Delta x = x_1 - x .$$

Разность между значением функции в новой точке и ее значением в первоначальной точке называется *приращением* функции и обозначается Δy, т.е.

$$\Delta y = f\left(x_1\right) - f\left(x\right).$$

На рисунке 18 Δx – это длина отрезка между точками x_1 и x , а Δy – длина отрезка AB.

Из равенства $\Delta x = x_1 - x$ следует $x_1 = x + \Delta x$, поэтому величину Δy можно записать так: $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Другие эквивалентные обозначения:

$$y' = y'_x = f'\left(x\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}.$$

Геометрический смысл производной тесно связан с понятием касательной.

Проведем через точку M секущую MM_1 (рисунок 19). Если точку M_1 устремить к M, т.е. уменьшить Δx до нуля, то в момент слияния точек M и M_1 угол φ перейдет в угол α:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\phi = tg\alpha = f'\left(x\right).$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой х, т.е. $tg\alpha = f'(x)$.

В этом утверждении и состоит геометрический смысл производной.

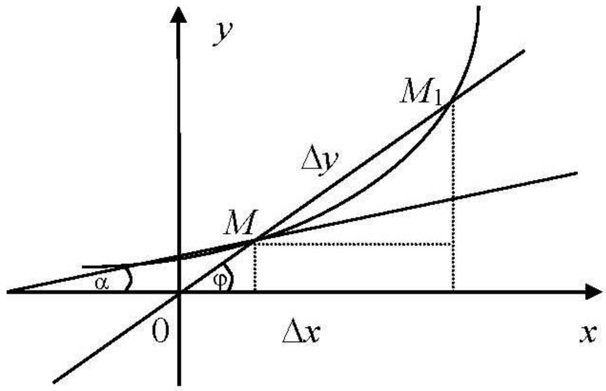


Рисунок 19 – Геометрический смысл производной

Если $y = f(x)$ отражает закон прямолинейного неравномерного движения, то Δy можно рассматривать как отрезок пути, пройденный точкой за промежуток времени Δx. Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ характеризует среднюю скорость переменного движения $\left(V_{ср} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает мгновенную скорость изменения функции в точке x, т.е. в данный момент времени:

$$V_{мгн} = f'(x)$$

В этом и состоит ***механический смысл производной***.

Если функция имеет единственную производную в точке, она называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках интервала $a \le x \le в$, называется *дифференцируемой* в данном интервале.

Рассмотрим основные формулы и правила дифференцирования функций.

Правила дифференцирования

(u, v, y – дифференцируемые функции от x, c – постоянная)

1) $(u+v)' = u' + v'$; 2) $(u-v)' = u' - v'$;

3) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; 4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ 6) $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Эти правила справедливы для любого конечного числа дифференцируемых функций.

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	Производные функций	Производные сложных функций
1. Постоянная функция		
$y=C$	$(C)'=0$	$(C)'=0$
2. Степенная функция		
$y=x^n$ $y=x$	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $x'=1$	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$
3. Показательная функция		
$y=a^x$ $y=e^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$ $(e^x)'=e^x$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$ $(e^u)'=e^u u'$
4. Логарифмическая функция		
$y=\log_a x$ $y=\ln x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
5. Тригонометрические функции		
$y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=tgx$ $y=ctgx$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ $(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
6. Обратные тригонометрические функции		
$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\mathrm{arctg}\, x$ $y=\mathrm{arcctg}\, x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\mathrm{arctg}\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\arccos u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\mathrm{arctg}\, u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$ $(\mathrm{arcctg}\, u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

С помощью таблицы производных и правил дифференцирования можно находить производные любых элементарных функций. Известно, что все элементарные функции дифференцируемы и их производные, в свою очередь, также являются элементарными функциями.

Пусть дана сложная функция (функция от функции) $y = f\left[\phi(x)\right]$, причём промежуточная функция $u = \phi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u' = \phi'(x)$, а функция $y = f(u)$ – в соответствующей точке u производную $y'_u = f'(u)$.

Тогда $y_x = f'(u)\phi'(x)$ или $y'_x = y'_u u'_x$, т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

Дифференциал функции и его применение

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции $f'(x)$ на приращение аргумента.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f'(x)dx.$$

Теорема*. *(о связи дифференцируемости с существованием производной). Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в точке x_0 производную. При этом для ее дифференциала в точке x_0 справедливо равенство

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Замечание. Из теоремы 1 следует, что нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют *дифференцированием функции*.

Основное применение дифференциала функции основывается на формуле приближенных вычислений функции:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Применение этой формулы с геометрической точки зрения означает замену участка кривой отрезком касательной. Это и есть геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим частные случаи этой формулы:

1. Формула для приближенного вычисления степеней

$$\left(x + \Delta x\right)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

2. Формула для приближенного вычисления корней

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

3. Формула для приближенного вычисления обратных величин

$$\frac{1}{x+\Delta x}\approx\frac{1}{x}-\frac{\Delta x}{x^2}.$$

4. Формула для приближенного вычисления синусов и тангенсов малых углов $\sin\Delta x\approx\Delta x$ и $tg\Delta x\approx\Delta x$.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Найти производные от следующих функций:

1) $y=5x^3+6x+3$; 2) $y=\sin x\cdot\ln x$; 3) $y=\dfrac{e^x-6x}{tgx}$; 4) $y=\left(x^6+7x^2\right)^8$;

5) $y=\ln arctgx$; 6) $y=\sin x^2$; 7) $y=\begin{cases}4x^2-6x, & x\le 0,\\ 5x\ -\ 7, & x>0.\end{cases}$

Решение.

1) Данная функция есть сумма трех дифференцируемых функций, следовательно, можно применить правило $(u+v)'=u'+v'$; затем постоянные множители вынесем за знак производной и воспользуемся формулами дифференцирования $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ и $(c)'=0$, получим

$$y'=\left(5x^3+6x+3\right)'=\left(5x^3\right)'+(6x)'+(3)'=5\left(x^3\right)'+6(x)'+0=15x^2+6.$$

2) Применяя правило $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ и формулы нахождения производных тригонометрической и логарифмической функцией, имеем

$$y'=(\sin x\cdot\ln x)'=(\sin x)'\cdot\ln x+(\sin x)(\ln x)'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}.$$

3) Применяя правило $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ и формулы нахождения производных $\left(e^x\right)'=e^x$; $(6x)'=6$ и $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, получим

$$y=\left(\frac{e^x-6x}{tgx}\right)'=\frac{\left(e^x-6x\right)'\cdot tgx-(tgx)'\left(e^x-6x\right)}{tg^2x}=\frac{\left(e^x-6\right)\cdot tgx-\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(e^x-6x\right)}{tg^2x}.$$

4) Это сложная функция. Представим ее через простые функции $y=u^8$, $u=x^6+7x^2$. Применяя формулу $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ или $\left(f\left(\phi(x)\right)\right)'=f'\left(\phi(x)\right)\cdot\phi'(x)$, получим:

$$y'=\left(\left(x^6+7x^2\right)^8\right)'=8\left(x^6+7x^2\right)^7\cdot\left(x^6+7x^2\right)'=8\left(x^6+7x^2\right)^7\cdot\left(6x^5+14x\right).$$

5) Применяя правило производной сложной функции, имеем:

$$y' = \left(\ln arctgx\right)' = \frac{1}{arctgx}\cdot\left(arctgx\right)' = \frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

6) Используя правило нахождения производной сложной функции, получим: $y' = \left(\cos x^2\right)' = -\sin x^2\cdot\left(x^2\right)' = -2x\sin x^2$.

7) $y' = \begin{cases}(4x^2-6x)' = 8x-6, & x\le 0,\\ (5x\ -\ 7)' = 5, & x>0.\end{cases}$

Пример 2. Закон движения точки по прямой описывается уравнением $S = t^3-3t^2+3t+5$, где S – путь (в метрах), t – время (в секундах). Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Согласно физическому смыслу производной $v(t) = s'(t) = 3t^2-6t+3$ и $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t-6$. При $t = 2$ с имеем $v = 3$ (м/с) и $a = 6$(м/с^2).

Пример 3. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = 5-3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной $k = f'(x_0)$, поэтому $y' = (5-3x^2)' = -6x$ и $k = -6\cdot(-2) = 12$.

Пример 4. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{6x^2-5}$.

Решение. $dy = \left(\sqrt[3]{6x^2-5}\right)' dx = \dfrac{4x}{\sqrt[3]{\left(6x^2-5\right)^2}}dx$.

Пример 5. Вычислите приближенное значение $(9{,}06)^2$.

Решение. Имеем $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $x_0 = 10$, $\Delta x = -0{,}94$. Согласно формуле получим: $(9{,}06)^2 \approx 10^2 + 2\cdot 10\cdot\left(-0{,}94\right) = 81{,}2$.

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 1-6x^3$; б) $y = \sin^3 x$; в) $y = 7x^7-3x^3+\sqrt{2}+x^{-2}-3x^{-7}.$;

г) $y = \left(x-1\right)\sqrt{x}$; д) $y = \sqrt[3]{6x^2-5}$; е) $y = \left(tgx-ctgx\right)^2$; ж) $y = \dfrac{3}{x^2-1}$;

з) $y = 2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+5$; и) $y = \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}$; к) $y = \dfrac{x^3-3}{5-x^2}$;

л) $y = \left(x^3+3\right)\cdot\left(4x^2-5\right)$; м) $y = \sin\left(x^2+5x+2\right)$;

н) $y = \begin{cases}4x^2-6x, & x\le 0\\ 5x\ -\ 7, & x>0\end{cases}$; о) $y = \begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^4-4x, & x\ge 0\end{cases}$.

2. Закон движения точки по прямой описывается уравнением $S = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$, где S – путь (в метрах), t – время (в секундах). Найдите скорость и ускорение точки в момент времени t = 2 сек.

3. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = 5 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

4. Прямолинейное движение точки задано уравнением. Найти скорость движения точки в момент времени t.

а) $s(t) = 3t^2 - 2t + 5$ $t = 5$с. б) $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$ $t = 8$с.

в) $s(t) = 3t^3 + 2$ $t = 2$с. г) $s(t) = -t^2 + 8t$ $t = 6$с.

д) $s(t) = 3t^2 - t^3 + 5$ $t = 1$с. е) $s(t) = t^3 + 2t^2 - t + 7$ $t = 1$ с.

5. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции:

а) $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 3$. б) $y = x^3 + 4x^2 - 3$ в точке $x_0 = 3$.

в) $y = x^2 - 3x$ в точке $x_0 = -1$. г) $y = 4 - x^2$ в точке $x_0 = 3$.

д) $y = x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = -1$. е) $y = 4 - 2x - x^2$ в точке $x_0 = 0$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции. Как обозначается производная?
2. В чём состоит геометрический смысл производной?
3. Каков физический смысл производной?
4. Сформулируйте правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.
5. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
6. Напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
7. Что такое дифференциал? Где он применяется?
8. Сформулируйте теорему о связи дифференцируемости с существованием производной.
9. Какие частные формулы для приближенного вычисления вы знаете?

3.2.4. Применение дифференциального исчисления при исследовании графика функции

Возрастание и убывание функций

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. 1) Если функция f(x) возрастает, то f(x + Δx) > f(x) при Δx>0 и f(x + Δx) < f(x) при Δx<0, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

2) Пусть f′(x)>0 для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$. Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$. По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает. Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то f′(x)≤0 на этом отрезке. Если f′(x)<0 в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически (рисунок 20).

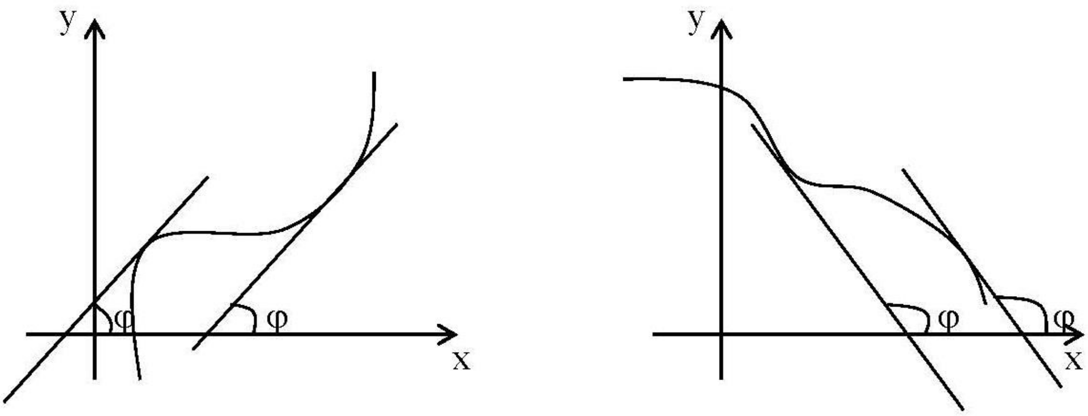


Рисунок 20 – Возрастающая и убывающая функции

Замечание: данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Точки экстремума

Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке, может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума.*

Теорема (необходимое условие существования экстремума). Если функция *f(x)* дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то, производная функции обращается в нуль в этой точке.

Доказательство. Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум. Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство: $f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$, т.е. $f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0$.

Тогда
$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad при \quad \Delta x < 0,$$
$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad при \quad \Delta x > 0.$$

По определению: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$,

т.е. если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x\to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Пример этого случая – функция $y = x^3$, производная которой в точке x=0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно. На рисунке 21 показано, что функция $f(x) = |x|$ в точке x = 0 имеет минимум, но не имеет производной, а функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

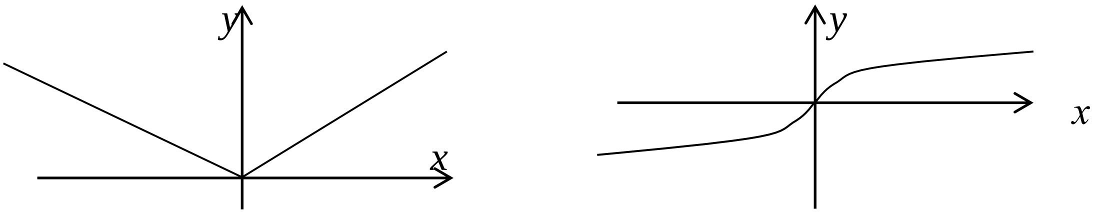


Рисунок 21 – Функции, демонстрирующие недостаточность условия существования экстремума

Теорема (Достаточные условия существования экстремума). Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» , то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с «-» на «+» – то функция имеет минимум.

Доказательство. Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$.

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно, $f(x) - f(x_1)<0$ или $f(x) < f(x_1)$.

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно, $f(x) - f(x_1)<0$ или $f(x) < f(x_1)$.

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

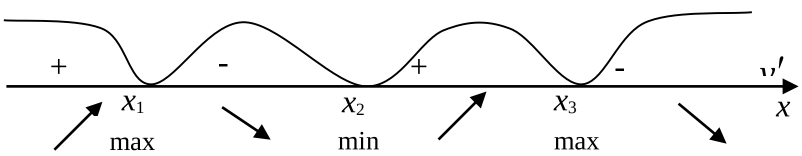
Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

Алгоритм исследования функции на промежутки монотонности и экстремум

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти производную функции y'.
3. Приравнять к нулю производную, найти все действительные корни уравнения $y' = 0$ и к ним присоединить те значения, при которых производная не существует.
4. Найденные значения расположить в порядке возрастания и определить знак на каждом из полученных промежутков.

На промежутке, в котором $y' > 0$ график функции возрастает, а при $y' < 0$ – график функции убывает. Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с «+» на «-», то в этой точке максимум, а если с «-» на «+», то в этой точке минимум.



Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.

Доказательство. Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

Таким образом, функция выпуклая, если она расположена не ниже любой своей касательной, а вогнутая – если не выше любой своей касательной.

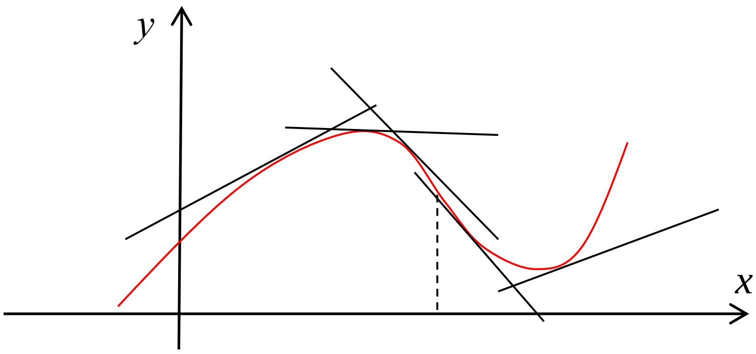


Рисунок 22 – Выпуклость и вогнутость кривой

На рисунке 22 показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. Если во всех точках интервала *(a, b)* вторая производная функции *f(x)* отрицательна, то кривая *y = f(x)* обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке. Уравнение кривой: $y = f(x)$.

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c < x.$$

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)].$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \qquad x_0 < c_1 < c.$$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$.

Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$.

Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x=a$ – точка перегиба.

Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x < b$.

Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

Алгоритм исследования функции на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба

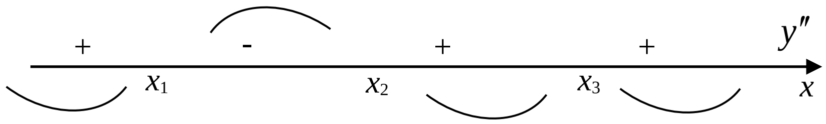
1. Найти область определения функции $D(y)$.

2. Найти вторую производную функции y''.

3. Приравнять к нулю вторую производную, найти все действительные корни уравнения $y''=0$ и к ним присоединить те значения, при которых вторая производная не существует.

4. Найденные значения расположить в порядке возрастания и определить знак на каждом из полученных промежутков.

На промежутке, в котором $y'' > 0$ график функции вогнут, а при $y'' < 0$ – график функции выпуклый. Точка из области определения, разделяющая выпуклую часть от вогнутой является точкой перегиба.



Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Одна из важных прикладных (оптимизационных) задач есть нахождение наибольшего и наименьшего значений (глобального $\max$ и глобального $\min$) функции на промежутке X.

Согласно теореме Вейерштрасса, если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Это могут быть точки экстремумов или концы отрезков.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции необходимо:

1) найти производную $f'(x)$.

2) найти критические точки функции, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.

3) найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее $f_{наиб}$ и наименьшее $f_{наим}$.

Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Различают вертикальные (рисунок 23, а), горизонтальные (рисунок 23, б) и наклонные (рисунок 23, в) асимптоты.

Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

1. Вертикальная асимптота

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ – вертикальная асимптота.

2. Горизонтальная асимптота

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ – горизонтальная асимптота.

3. Наклонная асимптота

Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=b$, то прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

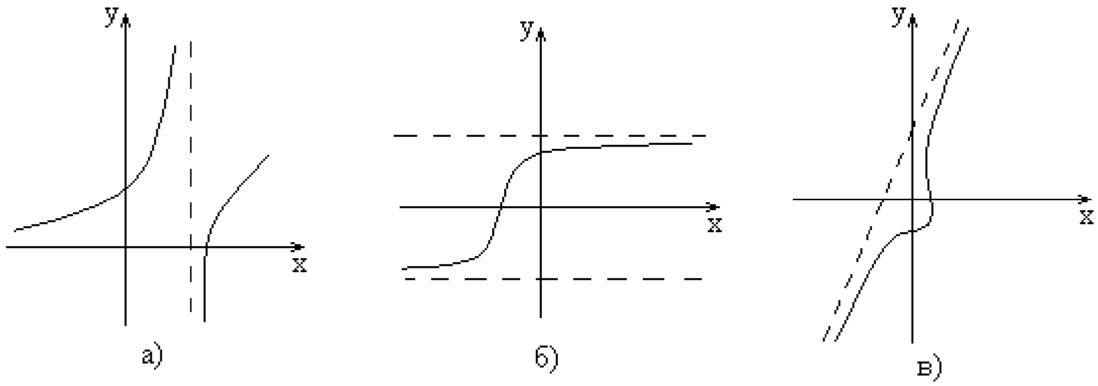


Рисунок 23 – Виды асимптот

Теорема 1. В точках вертикальных асимптот (например, $x = x_0$) функция $y = f(x)$ терпит разрыв, ее предел слева и справа от точки x_0 равен $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ и (или) } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty .$$

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)/x]=k \text{ и } \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b .$$

Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$. Тогда прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты, когда $k = 0$. Поэтому, если в каком-либо направлении кривая имеет горизонтальную асимптоту, то в этом направлении нет наклонной, и наоборот.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции. Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
2) Точки разрыва (если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба (если они имеются).
8) Асимптоты (если они имеются).
9) Построение графика.

Решение типовых примеров и задач

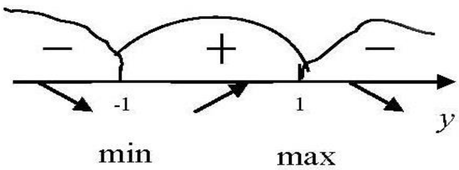
Пример 1. Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x - x^3 - 2$

Решение.

1) область определения функции $D(y) = R$;

2) $y' = (3x - x^3 - 2)' = 3 - 3x^2$;

3) $y' = 0$, $3 - 3x^2 = 0$, $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$;

4) 

Функция возрастает на (-1;1), убывает на (-∞;-1) и (1;+∞); точка минимума (-1; -4), точка максимума (1;0).

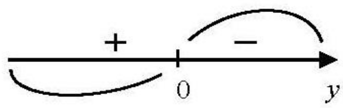
Пример 2. Найдите интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = 3x - x^3 - 2$ и точки перегиба.

Решение.

1) область определения функции $D(y) = R$;

2) $y' = (3x - x^3 - 2)' = 3 - 3x^2$, $y'' = (3 - 3x^2)' = -6x$;

3) $y'' = 0$, $-6x = 0$, $x = 0$;

4) 

Функция выпукла на (0; +∞), вогнута на (-∞;0); точка перегиба (0;-2).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{2x-1}{2+x^2}$ на отрезке [–2;0].

Решение.

1) $f'(x)=\frac{2\left(2+x^2\right)-2x(2x-1)}{\left(2+x^2\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-x-2\right)}{\left(2+x^2\right)^2}$.

2) $f'(x)=0$, откуда критические точки $x_1=2$, $x_2=-1$.

3) Значения функции в критической точке $x_2=-1$ $f(-1)=-1$ и на концах отрезка $f(-2)=-\frac{5}{6}$ и $f(0)=-\frac{1}{2}$.

Точку $x=2$ не рассматриваем, так как она не принадлежит отрезку [–2;0]. Итак, $f_{наиб}=f(0)=-\frac{1}{2}$, $f_{наим}=f(-1)=-1$.

Пример4. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^2-1}{x-5}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-1}{x-5}=\frac{5^2-1}{5-5}=\frac{24}{0}=\infty$, следовательно, прямая $x=5$ – горизонтальная асимптота;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x-5}=\frac{\infty^2-1}{\infty-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1}=\frac{2\cdot\infty}{1}=\infty$, следовательно, вертикальных асимптот нет;

3) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$;

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x-5}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2+5x}{x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1}=5.$$

Следовательно, прямая $y=x+5$ – наклонная асимптота.

Пример 5. Исследовать функцию $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Функция общего вида, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3) В точке $x=1$ функция терпит разрыв, найдем пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$.

Следовательно, прямая $x=1$ – это вертикальная асимптота.

4) Найдем наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x-1} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x+2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -1$$

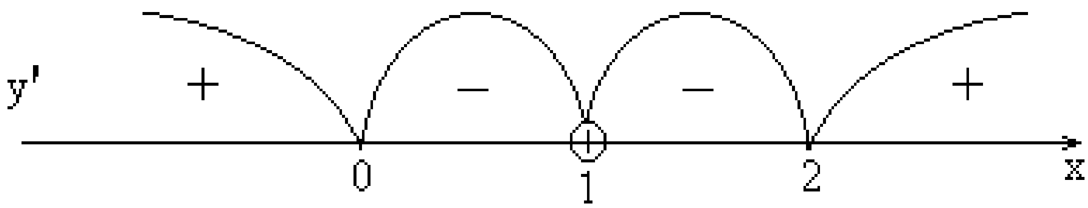
Таким образом, прямая $y = x - 1$ – наклонная асимптота.

5) Найдем $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$;

$y' = 0$ $x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

y' не существует при $x = 1$. Критическими точками являются только $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$, так как $x = 1$ не входит в область определения функции.

Определяем знаки производной вблизи критических точек:



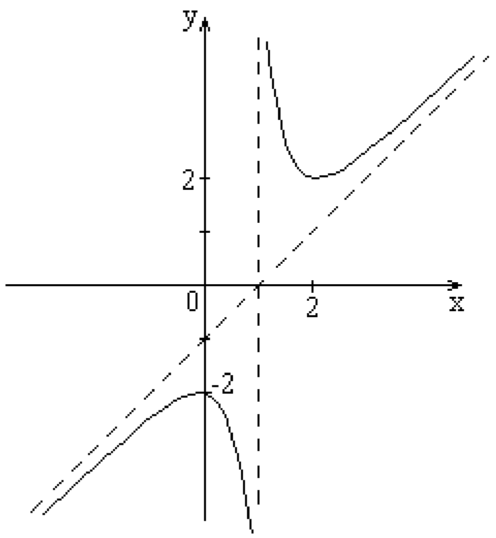
На интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$ – функция возрастает, на интервалах $(0;1)$ и $(1;2)$ – функция убывает, поэтому точка $x = 1$ – точка максимума, а точка $x = 2$ – точка минимума. Следовательно, $f_{max}(0) = -2$, $f_{min}(2) = 2$.

6) Точки пересечения с осями:

Ox : $y = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось Ox.

Oy : $x = 0$, $y = -2$, т.е. точка $(0;-2)$ – точка пересечения с осью Oy.

Используя полученные данные построим график функции:



<u>Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции:

а) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$; б) $y=x^4-2x^3+3$; в) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x$;

г) $y=9x^5+3x^3-1$; д) $y=x^4-2x^2-3$; е) $y=3x-x^3-2$.

2. Найти промежутки выпуклости (вогнутости) и точки перегиба:

а) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x$; б) $y=x^4-2x^2-3$; в) $y=3x-x^3-2$;

г) $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$; д) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$; е) $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$.

3. Найти асимптоты:

а) $y=\dfrac{3x-1}{2x+3}$; б) $y=\dfrac{2x-x^2-1}{x}$; в) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-2x}$;

г) $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$; д) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{x-6}$; е) $y=\dfrac{2x^2-x-15}{x-3}$;

ж) $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$; з) $y=\dfrac{2x^2-x-15}{x-5}$.

4. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x$; б) $y=x^4-2x^2-3$; в) $y=3x-x^3-2$;

г) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$; д) $y=\dfrac{2x-x^2-1}{2x}$; е) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$;

ж) $y=\dfrac{x^3-8}{x^2-8x+12}$; з) $y=\dfrac{x^2-9}{2x^2-x-15}$.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте возрастание и убывание функций. Каков алгоритм нахождения интервалов монотонности?

2. Что такое экстремум функции? Назовите условия его существования.

3. Что такое выпуклость, вогнутость и точки перегиба? Как с помощью второй производной можно их найти?

4. Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

5. Что называется асимптотой? Как их найти?

6. Перечислите этапы исследования функции.

3.3. Интегральное исчисление функций одной переменной

3.3.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной известной функции. Однако на практике при решении прикладных задач очень часто приходится зная производную функции, восстановить ее первичный образ. Существует обратная операция дифференцирования – нахождение функции по известной производной, которая называется *интегрированием*.

Итак, пусть дана некоторая функция $f(x)$. Необходимо найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функция $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Так, если $f(x)$ характеризует скорость протекания некоторого процесса, то часто возникает задача отыскания функционального описания самого процесса.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Например, $F(x)=x^2$ является первообразной для функции $f(x)=2x$, так как $F'(x)=\left(x^2\right)'=2x$.

Первообразная – первичный образ функции.

Следует отметить, что для заданной функции $f(x)$ ее первообразная определена неоднозначно. Дифференцируя, можно убедиться, что функции x^2+1, x^2-5 и вообще x^2+C, где C – произвольное число, являются первообразными для функции $f(x)=2x$.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке, если она на этом промежутке имеет первообразную.

Формулы нахождения первообразных (таблица первообразных)

$f(x)$ **(функция)**	$F(x)$ **(первообразная)**
0	C (константа)
1	x+C
x	$\frac{x^2}{2}+C$
x^n, $n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$+C
sin x	-cos x+C
cos x	-sin x+C
e^x	e^x+C

Три правила нахождения первообразных

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке первообразные соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
$y = k\,f(x)$	$y = k\,F(x)$
$y = f(k\,x+m)$	$y = \frac{1}{k}F(k\,x+m)$

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx,$$

где $\int$ – знак интеграла;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования.

Символ $\int$ введен Г. Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Интеграл от лат. Integratio – восстановление.

Таким образом, определённый интеграл вычисляется по формуле:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad ,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Наличие постоянной C делает задачу нахождения функции по ее производной не вполне определенной, отсюда происходит и само название «неопределенный интеграл».

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрический смысл неопределенного интеграла

Пусть дан неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Придавая произвольной постоянной конкретные числовые значения C_1, C_2, C_3, … C_n, получим следующие функции одной независимой переменной:

$$y_1 = F(x) + C_1,$$
$$y_2 = F(x) + C_2,$$
$$y_3 = F(x) + C_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = F(x) + C_n.$$

В системе координат xOy график каждой из функций представляет собой плоскую кривую. Все графики, называемые *интегральными кривыми*, сдвинуты друг относительно друга в направлении, параллельном оси Oy.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ в системе xOy представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль оси Oy (рисунок 24).

Если из этого семейства хотят выделить одну кривую, то заранее задают начальное условие.

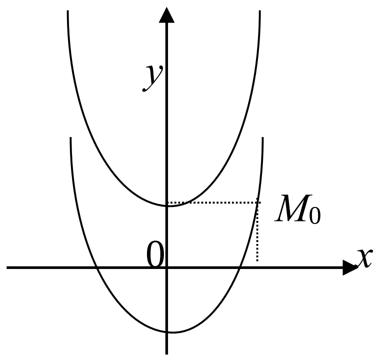


Рисунок 24 – Геометрический смысл неопределенного интеграла

Физический смысл неопределенного интеграла состоит в том, что интеграл от скорости неравномерного прямолинейного движения дает зависимость пути от времени

$$\int v(t)dt = s(t) + C.$$

Таким образом, неопределенный интеграл описывают уравнение движения материального тела.

Приведем без доказательства основные ***свойства неопределенного интеграла***:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Формулы интегрирования (таблица основных интегралов)

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x+a}{x-a} + C$

Справедливость приведенных формул проверяется непосредственно дифференцированием.

Правила вычисления неопределенных интегралов:

1. $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$.
2. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$.
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.
4. $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Найдите общий вид первообразных для функции $y=\sin(3x-4)$.

Решение. Одна из первообразных $f(x)$ есть функция $F_1(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x-4)$. А множество всех первообразных для данной функции имеет вид $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$.

Пример 2. Найти первообразную для функции $f(x)=2x$, график которой проходит через точку M_0 (2; 3).

Решение. Искомая первообразная для $f(x)=2x$ содержится среди множества функций $y=x^2+C$.

Определяем произвольную постоянную *C* по начальному условию. Подставляя значение $x=2$, $y=3$, получаем 3 = 4 + *C*, откуда *C* = 3 – 4 = -1.

Таким образом, $y=x^2-1$. Тогда линия, определяемая уравнением $y=x^2-1$, проходит через точку M_0 (2; 3).

Пример 3. Найти неопределенный интеграл: $\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$.

Решение. Применяя последовательно свойства $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, представим интеграл в виде суммы табличных интегралов:

$$\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx = 5\int cosxdx - 3\int x^2dx + \int\frac{dx}{x} = 5\sin x - \frac{3x^3}{3} + \ln|x| + C =$$
$$= 5\sin x - x^3 + \ln|x| + C.$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Установите, какие из данных функций являются первообразными для функции $f(x)=x^3$, если

а) $F_1(x)=x^4$, б) $F_3(x)=3x^2$, в) $F_5(x)=3x^2-7$,

г) $F_2(x)=\dfrac{x^4}{4}$, д) $F_4(x)=\dfrac{x^4}{4}+2$, е) $F_6(x)=x^4+5$.

2. Установите, какие из данных функций являются первообразными для функции $f(x)=x^4$, если

а) $F_1(x)=x^5$, б) $F_3(x)=4x^3$, в) $F_5(x)=4x^3-9$,

г) $F_2(x)=\dfrac{x^5}{5}$, д) $F_4(x)=\dfrac{x^5}{5}+12$, е) $F_6(x)=x^5+10$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции

а) $f(x)=3-4x^3$; б) $f(x)=2x+\sin x$; в) $f(x)=4x^3-2x+\sqrt[3]{x}+1$;

г) $f(x)=x^5+\sqrt{x}+6$; д) $f(x)=4\cos 2x+\dfrac{5}{\sqrt{x}}$; е) $f(x)=6x^3-\dfrac{1}{x^4}+3$.

4. Найдите для функции первообразную, график которой проходит через заданную точку.

а) $y=x^3$, $M(2;1)$; б) $f(x)=3x^2-4x+2$, $A(-1;0)$; в) $f(x)=3-4x^3$, $N(1;1)$;

г) $f(x)=6x^3-\dfrac{1}{x^4}+3$, $A(-1;1)$; д) $f(x)=x^4+5$, $M(0;1)$.

5. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ найдите первообразную, если известно, что $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=2$.

6. Найдите неопределенный интеграл:

а) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int(5x^2-2x+1)dx$; в) $\int\dfrac{dx}{6x+9}$; г) $\int 5^x dx$; д) $\int\dfrac{dx}{x^2-9}$;

е) $\int\dfrac{dx}{9+x^2}$; ж) $\int(3^x+2)dx$; з) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ и) $\int\dfrac{dx}{x^2-25}$; к) $\int\dfrac{dx}{x-25}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основную задачу интегрального исчисления.
2. Какие правила нахождения первообразных вы знаете?
3. Сколько первообразных существует для одной функции?
4. Как располагаются графики первообразных относительно друг друга?
5. Что называется неопределенным интегралом?
6. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
7. В чем состоит геометрический и физический смысл неопределенного интеграла?

3.3.2. Методы интегрирования

Вычисление первообразной функции не всегда выполняется с использованием свойств и таблиц интегралов. Точное нахождение первообразной произвольных функций – процесс более сложный, чем дифференцирование. Очень часто выразить интеграл в элементарных функциях невозможно. Например, нет формул для интегрирования произведения или частного функций. Именно поэтому единого метода интегрирования, который можно использовать для любых типов вычислений, не существует. В связи с чем возникает задача: преобразовать вычисляемые интегралы так, чтобы их можно было свести к табличным. Эта задача решается с помощью методов интегрирования.

Рассмотрим основные методы интегрирования.

1. Метод непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование – это определение интеграла с помощью основных свойств, таблиц интегрирования и тождественных преобразований подынтегральной функции.

Алгоритм непосредственного интегрирования:

1. Применить тождественные преобразования подынтегральной функции.
2. Используя основные свойства привести исходный интеграл к одному или нескольким табличным интегралам.
3. Непосредственно по соответствующему табличному интегралу вычислить получившиеся интегралы.

2. Метод замены переменной

Метод замены переменной (или метод подстановки) заключается в преобразовании исходного интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int u(t)dt$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. В основе метода замены переменной лежит следующая формула, которая является следствием правила дифференцирования сложной функции:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\phi(t)\right]\phi'(t)dt .$$

Данный метод основан на удачно выбранной замене, после которой интеграл либо сразу, либо после нескольких действий сводится к табличному.

Применяется метод замены переменной к интегралам, у которых подынтегральная функция является сложной.

Алгоритм метода замены переменной:

1. Заменить переменную x новой переменной t с помощью подстановки $x = \phi(t)$.

2. Найти дифференциал $dx=\phi'(t)dt$.

3. Подставить вместо *x* и *dx* их значения, выраженные через *t* и *dt*, получив интеграл $\int u(t)dt$.

4. Найти первообразные по переменной *t* по таблице основных интегралов, предварительно применив свойства интегралов, если это требуется.

5. Привести ответ, полученный относительно новой переменной *t*, к переменной *x*.

3. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть *u=u(x)* и *v=v(x)* – дифференцируемые функции. По правилу дифференциала произведения:

$$d(uv)=vd(u)+ud(v),$$

откуда *ud(v)=d(uv)-vd(u).*

Интегрируя левую и правую части, получим формулу метода интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

В данном методе функции u и v выбирают так, чтобы $\int vdu$ был для вычисления проще, чем исходный интеграл $\int udv$.

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначать через *u* и какой через *dv*.

Решение типовых примеров и задач

Пример. Найти интеграл:

1) $\int\frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{5x-1}$; 3) $\int x\cos x dx$.

Решение.

1) Подынтегральная функция представляет собой частное алгебраических сумм элементарных функций, поэтому применяем метод непосредственного интегрирования:

$$\int\frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^{\frac{5}{2}}}\right)dx=\int\frac{dx}{x}+\int x^{-\frac{1}{2}}dx-5\int x^{-\frac{5}{2}}dx=$$

$$=\ln|x|+2x^{\frac{1}{2}}+\frac{10}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C=\ln|x|+2\sqrt{x}+\frac{10}{3x\sqrt{x}}+C.$$

2) В данном интеграле подынтегральная функция является сложной, поэтому используем метод замены переменной.

Введем замену $t = 5x - 1$, откуда $x = \frac{t}{5} + \frac{1}{5}$. Тогда $dx = \frac{1}{5}dt$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{5x-1} = \int \frac{\frac{1}{5}dx}{t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|5x-1| + C.$$

3) Подынтегральная функция состоит из произволения двух элементарных функций, поэтому вычисляем интеграл по методу интегрирования по частям:

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

Вычислить интеграл:

1) методом непосредственного интегрирования:

а) $\int\left(x^7 - 2x^2 + 25x - 9\right)dx$; б) $\int(5x^2 + 2x + 1)dx$; в) $\int\left(x-2\right)^2 dx$;

г) $\int \frac{(5 - x^4 + 6x)}{x}dx$; д) $\int \frac{x^2+1}{x}dx$; е) $\int \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx$;

ж) $\int\left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{x^4}\right)dx$; з) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3}dx$ и) $\int\left(\sqrt[3]{x} + x^3\right)dx$.

2) методом замены переменной:

а) $\int\left(x^2-1\right)^3 x dx$; б) $\int \cos\left(2x-5\right)dx$; в) $\int \sqrt{2x-1}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$; д) $\int \frac{dx}{1+2x}$; е) $\int e^{3x+2}dx$; ж) $\int e^{-4x}dx$.

3) методом интегрирования по частям:

а) $\int x\ln x dx$; б) ; $\int(x+1)e^{2x}dx$ в) $\int(x+3)e^{x}dx$; г) $\int(x+3)\ln x dx$.

Контрольные вопросы

1. Для чего нужны методы интегрирования? Какую задачу они решают?
2. Почему не существует единого подхода к вычислению интегралов?
3. Перечислите основные методы интегрирования.
4. Каков алгоритм непосредственного интегрирования.
5. В каких случаях применяется метод замены переменной?
6. На использовании какой формулы дифференцирования основан метод интегрирования по частям. Опишите его особенности.
7. Есть ли правило замен в методе интегрирования о частям?

3.3.3. Определенный интеграл

Задача, приводящая к понятию определенного интеграла

Пусть дана функция $y = f(x)$. Проведем прямые $x = a,\ x = b$. Тогда функция $f(x)$, прямые $x = a,\ x = b$ и отрезок $[a,b]$ оси OX образуют фигуру, называемую *криволинейной трапецией* (рисунок 25).

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ отметим точку ς_i. Вычислим $f(\varsigma_i)$.

Обозначим ΔS_i – площадь части криволинейной трапеции над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$, а S – площадь всей криволинейной трапеции.

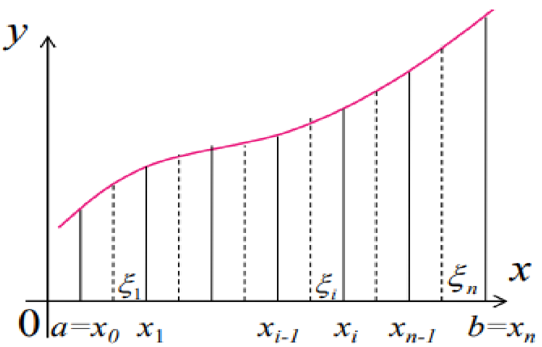


Рисунок 25 – Криволинейная трапеция

Заменим каждую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием Δx_i и высотой $f(\varsigma_i)$. Тогда площадь прямоугольника будет равна:

$$\Delta S_i = f(\varsigma_i)\,\Delta x_i\,,$$

а площадь всей криволинейной трапеции определяется как сумма площадей этих прямоугольников:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i\,.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*.

Будем измельчать разбиение так, чтобы $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он называется определенным от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$, то этот предел называется определенным интегралом:

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to o} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Вычисление определенного интеграла

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и имеет первообразную $F(x)$, то разность первообразных $F(b)-F(a)$ называется *определенным интегралом* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

где a – нижний предел интегрирования;

b – верхний интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$[a,\ b]$ – отрезок интегрирования;

x – переменная интегрирования.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница.

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ нужно:

1. Найти неопределенный интеграл функции $f(x)$, в котором взять $C=0$.

2. В полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b, а затем нижний предел a и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Замечание 1. Поскольку приращение $F(b)-F(a)$ равно некоторому числу, то определенный интеграл есть число в отличии от неопределенного интеграла, который является совокупностью функций.

Замечание 2. Из определения определенного интеграла следует, что он существует при условиях:

1) отрезок $[a;\ b]$ конечный;

2) функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$.

Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то интеграл не будет определенным. Такие интегралы называют *несобственными*. Например, интеграл $\int_2^\infty \frac{1}{x-3}dx$ не будет определенным, так как отрезок интегрирования $[2,+\infty)$ не конечный, а бесконечный (нарушается первое условие существования определенного интеграла).

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

2. $\int \lambda\ f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

5. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

6. $\int\limits_a^b c\,dx = b - a$.

7. Если на отрезке $f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

8. Если на отрезке $f(x) \ge g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$.

9. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

10. $\int\limits_a^b f(z)dz = \int\limits_a^b f(x)dx$

Методы вычисления остаются теми же, что и методы вычисления неопределенного интеграла, но разница есть. В неопределенном интеграле, делая замену переменной, необходимо затем возвратиться к исходной функции, а в определенном интеграле этого делать не нужно, при замене пересчитываются и пределы интегрирования для новой переменной. Определенный интеграл при постоянных пределах интегрирования – число и все равно, в каких переменных считать это число. Но требование взаимной однозначности функции – замены и в определенном интеграле сохраняется.

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ при $a < b$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью ОХ и кривой $y = f(x)$ (рисунок 25). В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = S.$$

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Первообразной для функции $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ является функция $y = tgx$.

Поэтому применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

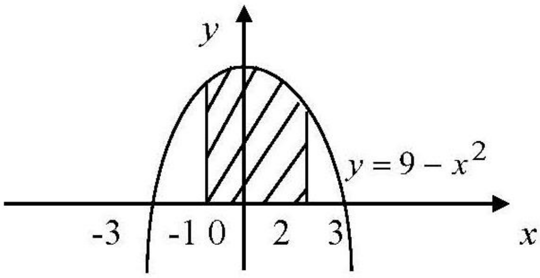
$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\pi/4} = tg\left(\pi/4\right) - tg0 = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\int_2^3 2xdx$.

Решение. $\int_2^3 2xdx = x^2 \Big|_2^3 = 3^2 - 2^2 = 5$, где $F(x) = x^2$ первообразная для $f(x) = 2x$.

Пример 3. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью O_x, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$.

Решение. Построим на чертеже искомую фигуру:



Фигура представляет собой криволинейную трапецию. Поэтому используем формулу площади криволинейной трапеции получим:

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2) dx.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, находим:

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24\frac{2}{3}(\text{кв. ед.}).$$

<u>Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Вычислите определённые интегралы

а) $\int_0^1 x^4 dx$; б) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$; в) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^{\pi/2} \cos xdx$; д) $\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$;

е) $\int_0^{-\pi/2} \sin 4xdx$; ж) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; з) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$;

2. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

а) $y = x^2 + 1$, осью OX, $x = 1$ и $x = 4$; б) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$;

в) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$; г) $y = -x^2 + x + 6$, $y = 0$;

д) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$; е) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 5$.

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейная трапеция? Опишите задачу, приводящую к понятию определенного интеграла.

2. Что называется определённым интегралом от данной функции на заданном интервале?

3. Перечислите свойства определенного интеграла.

4. В чем состоит геометрический смысл определённого интеграла?

5. Сформулируйте формулу Ньютона-Лейбница.

6. Какими методами можно решить определенный интеграл. В чем особенности?

3.3.4. Приложения интегралов

Геометрические приложения

1. Площадь фигуры, ограниченная плоской кривой

Площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f(x) > 0$ на $[a,b]$ (рисунок 26), определяется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

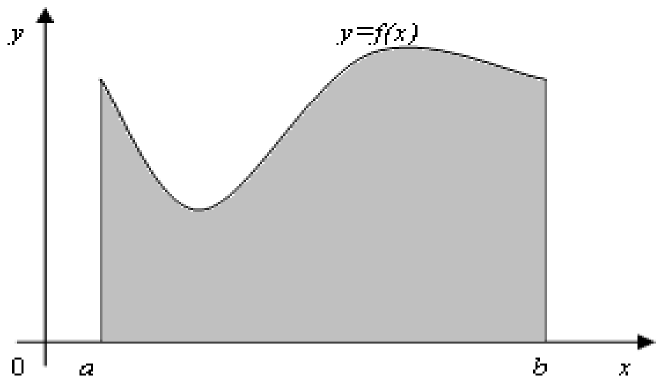


Рисунок 26 – Фигура, расположенная в положительной полуплоскости

Если фигура расположена в отрицательной полуплоскости (рисунок 27), т.е. $f(x) < 0$ на $[a,b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx .$$

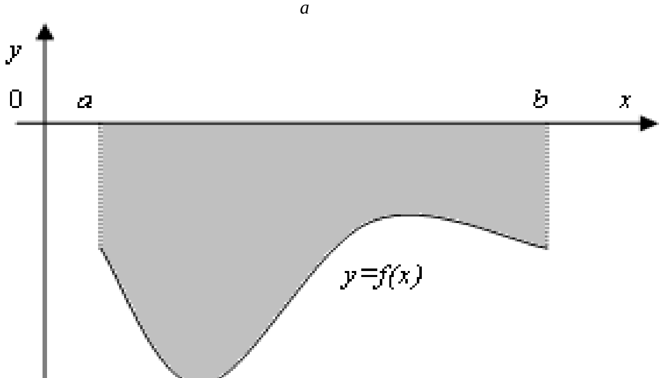


Рисунок 27 – Фигура, расположенная в отрицательной полуплоскости

Площадь, ограниченная кривой $x=\phi(x)$, осью Oy и прямыми $y=c$ и $y=d$ (рисунок 28), определяется по формуле:

$$S=\int_c^d \phi(y)dy\,.$$

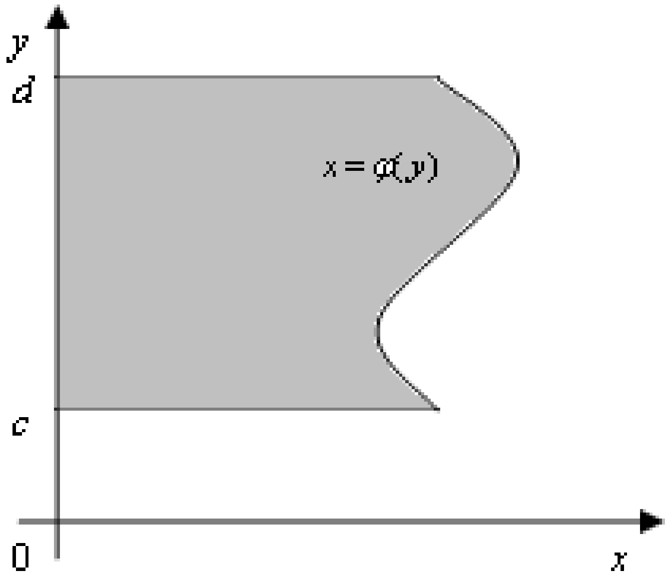


Рисунок 28 – Фигура, ограниченная осью Oy

Площадь, ограниченная кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рисунок 29), находится по формуле:

$$S=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx\,.$$

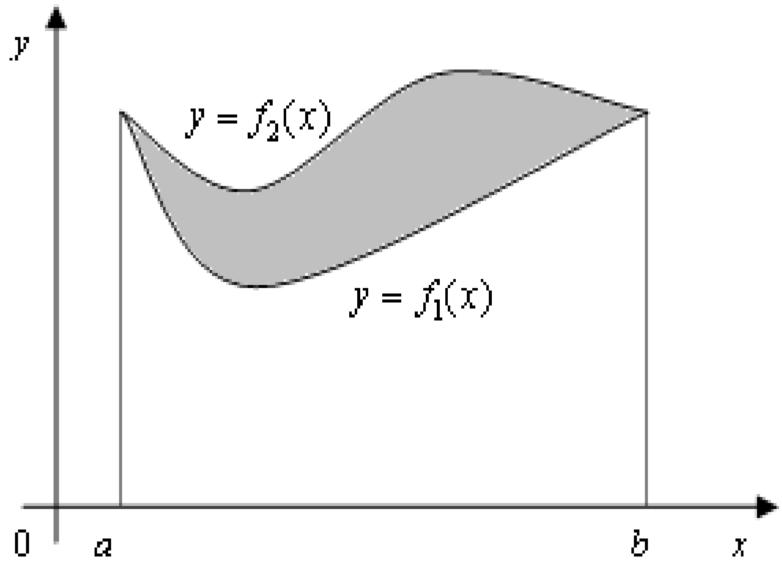


Рисунок 29 – Фигура, состоящая из двух функций

2. Длина дуги плоской кривой

Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ (рисунок 30), то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx \quad \text{или} \quad l=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}dy.$$

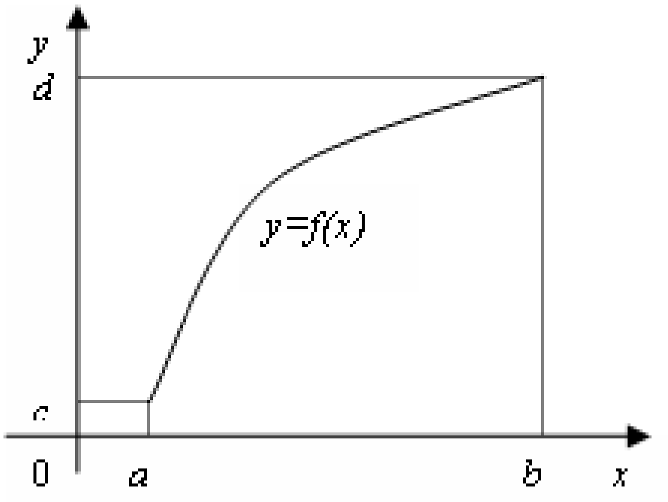


Рисунок 30 – Дуга плоской кривой

3. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением части кривой $y=f(x)$ (от a до b) вокруг оси Ox (рисунок 31), определяется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx.$$

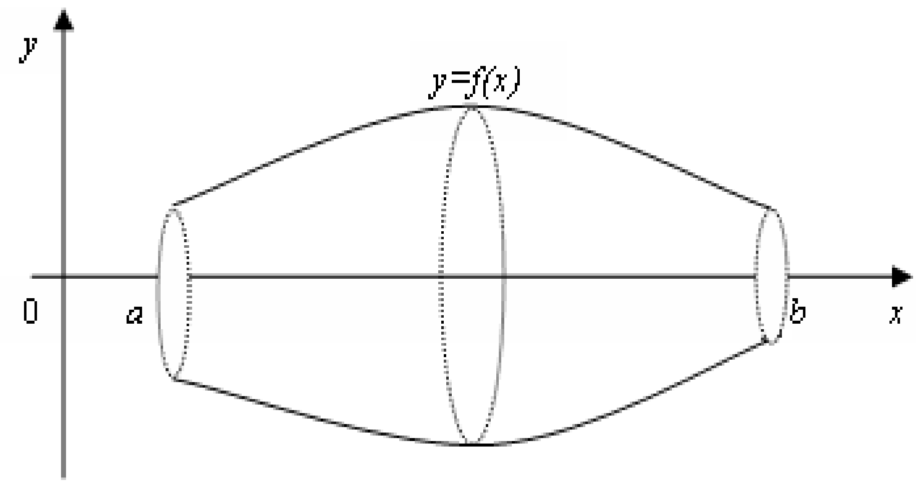


Рисунок 31 – Тело вращения вокруг оси Ox

Если необходимо найти объем между двумя вращающимися кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($y_2 > y_1$), то

$$V = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx .$$

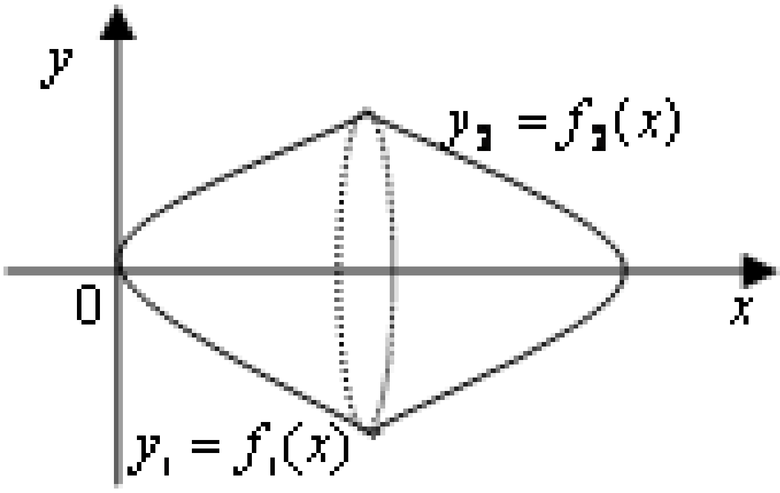


Рисунок 32 – Тело вращения двух функций вокруг оси *Ox*

Если часть кривой $x = \phi(y)$ (от c до d) вращается вокруг оси *Oy* (рисунок 33), то

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy .$$

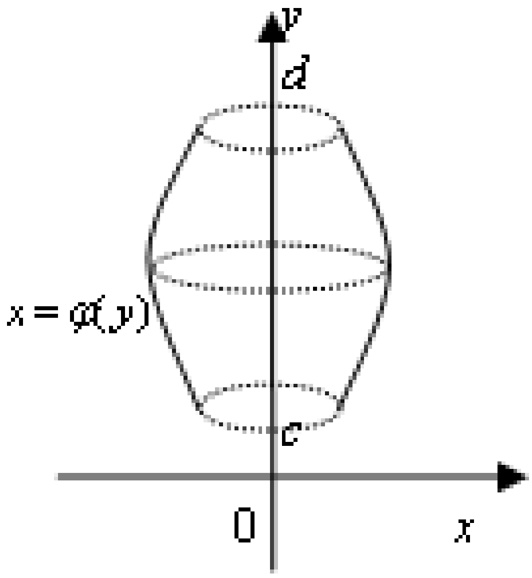


Рисунок 33 – Тело вращения вокруг оси *Oy*

Физические приложения

1. Путь, пройденный телом.

Если $v(t)$ – скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то перемещение точки за промежуток времени $[a,b]$ равно:

$$s=\int_a^b v(t)dt.$$

2. Скорость движения тела.

Если $a(t)$ – ускорение прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то скорость движения тела за промежуток времени $[a,b]$ равна:

$$v=\int_a^b a(t)dt.$$

3. Работа переменной силы.

Если материальная точка движется вдоль оси *Ox* под действием переменной силы (рисунок 34), проекция $F(x)$ которой на ось *Ox* есть функция от координаты *x*, то работа силы по перемещению точки из положения $x=a$ в положение $x=b$ равна:

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

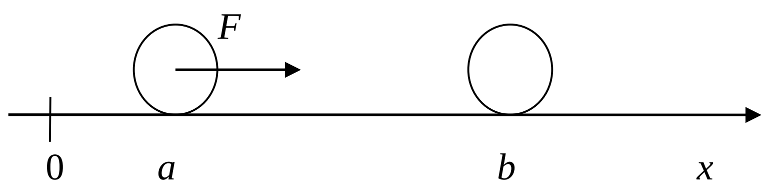


Рисунок 34 – Схема работы материального тела

4. Сила давления жидкости.

Если в жидкость плотностью ρ погружена пластинка *ABCD* (рисунок 35), то сила давления жидкости на нее равна:

$$P=\rho g\int_a^b xf(x)dx,$$

где $y=f(x)$ – функция, выражающая зависимость длины поперечного сечения пластины от уровня погружения *x*, g – ускорение свободного падения.

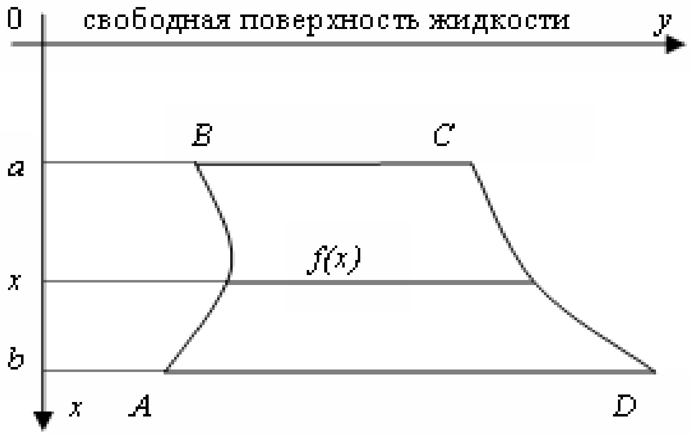


Рисунок 35 – Пластинка, погруженная в жидкость

5. Центр масс.

Пусть вдоль стержня – отрезка $[a,b]$ оси Ox – распределена масса плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ – непрерывная функция (рисунок 36).

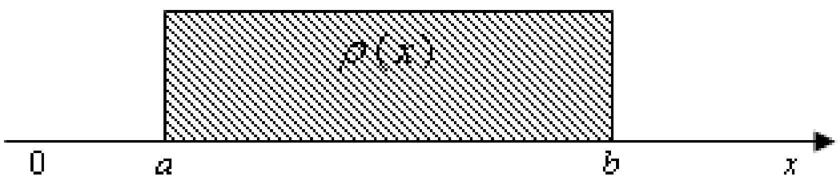


Рисунок 36 – Стержень плотностью $\rho(x)$

Тогда суммарная масса стержня равна:

$$M = \int_a^b \rho(x)dx,$$

а координата центра масс определяется по формуле:

$$x' = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx.$$

Экономический смысл определенного интеграла

Пусть функция $z=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции и, произведенной за промежуток времени $[0, t+\Delta t]$.

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени $f(t)$ (постоянная функция), то объем продукции Δu, произведенной за некоторый промежуток времени $[0, t+\Delta t]$, задается формулой $\Delta u = f(\Delta t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближенное равенство $\Delta u \approx f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [0, t+\Delta t]$, которое оказывается тем более точным, чем меньше Δt.

Разобьем отрезок $\left[0,T\right]$ на промежутки времени точками: $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n=T$. Для величины объема продукции Δu, произведенной за промежуток времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$, имеем $\Delta u = f(\xi_i)\Delta t_i$, где ξ_i $\in[\,0,t+\Delta t\,]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i=1,2,...,n$. Тогда

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \,.$$

При стремлении $\max\limits_i \Delta t_i$, к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$u = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t \,.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$u = \int_0^T f(t)dt \,,$$

т.е. если $f(t)$ – производительность труда в момент t, то $\int_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток $\left[0,T\right]$.

Сравнение данной задачи с задачей о площади криволинейной трапеции показывает, что величина объема продукции, произведенной за промежуток времени $[0,T]$, численно равна площади под графиком функции $z=f(t)$, описывающей изменение производительности труда с течением времени, на промежутке $\left[0,T\right]$ или $\int_0^T f(t)dt$.

Рассмотрим теперь функцию $t=t(x)$, описывающую изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_1 - x_2}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t=t(x)$, то часто она имеет вид

$$t = ax^{-b} \,,$$

где a – затраты времени на первое изделие, b – показатель производственного процесса.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t лет при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t – конечная сумма, полученная за t лет, и K – дисконтированная (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной* суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = p/100$ – удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1+it)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+it)^t$ и потому $K = K_t/(1+it)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt.$$

Для оценки последствий экономических преобразований на благосостояние народонаселения экономисты рассчитывают изменения излишков потребителя и производителя продукции.

Излишком потребителя CS при покупке Q единиц некоторого товара называется повышение общей денежной суммы, которую потребитель готов заплатить за данное количество товара, над его реальными расходами на их приобретение. Формула для расчета потребительского излишка имеет следующий вид:

$$CS = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ - P^*Q^*,$$

где P^* и Q^* – соответственно цена и количество товара, при которых достигается равновесие на рынке.

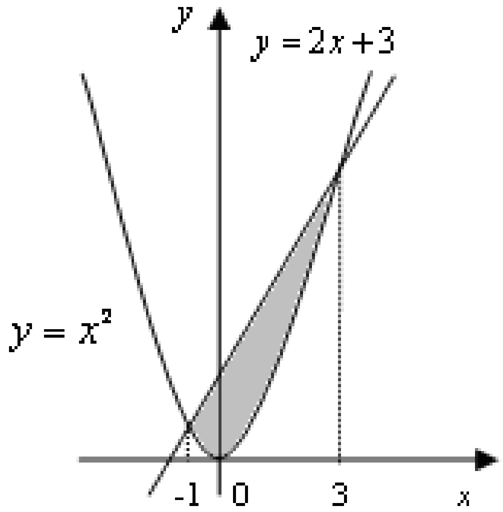
Излишек производителя PS представляет собой превышение той денежной суммы, за которую производитель был бы готов продать Q^* единиц товара, над той суммой, которую он реально получает от продажи этого количества товара. Очевидно, что $PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} P(Q)dQ$.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x+3$ и $y = x^2$.

Решение. График функции $y = x^2$ – парабола с вершиной в начале координат, ветви направлены вверх. График функции $y = 2x+3$ – прямая.

Для определения пределов интегрирования, найдем точки пересечения прямой и параболы. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = x^2, \end{cases}$ откуда $x^2 - 2x - 3 = 0$. Решив квадратное уравнение, получим $x_1 = -1,\ x_2 = 3$. Тогда $y_1 = 1,\ y_2 = 9$, т. е. $A_1(-1;1)$ и $A_2(3;9)$. По полученным данным строим чертеж:



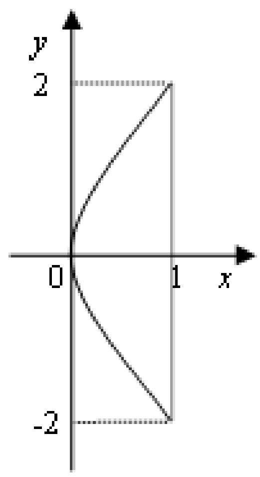
Имеем

$$S = \int_{-1}^{3} \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2 \right) dx = \left. \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{-1}^{3} =$$

$$= 9 + 9 - 9 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3} \right) = 10\frac{2}{3} \text{(кв. ед.)}$$

Пример 2. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 4x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Решение. График функции $y^2 = 4x$ – парабола, симметричная относительно оси *Ox*, с вершиной в начале координат. По полученным данным строим чертеж:



Так как $x=\frac{1}{4}y^2$, то $x'=\frac{1}{4}\cdot 2y=\frac{y}{2}$. Тогда $\left(x'\right)^2=\frac{y^2}{4}$. Длина дуги будет равна:

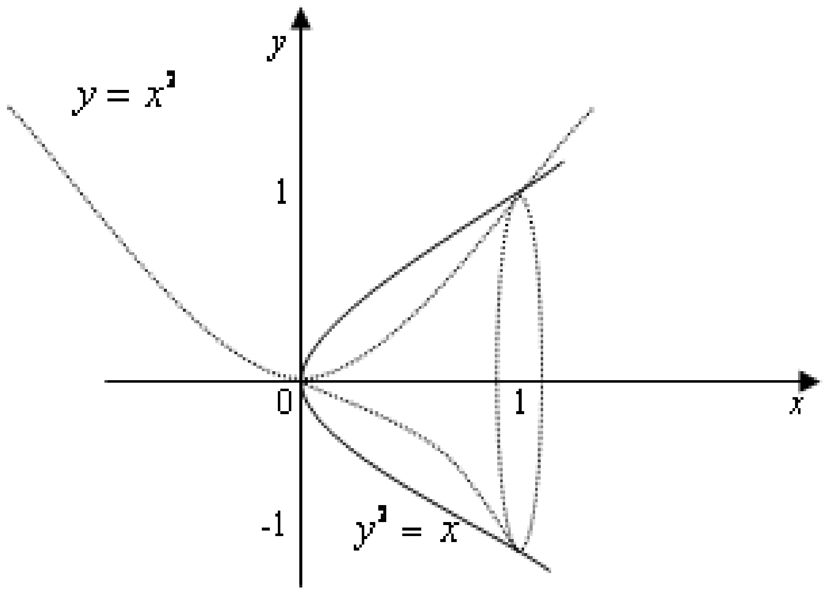
$$l=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dx=\int_{0}^{2}\sqrt{4+y^2}=\frac{1}{2}y\sqrt{4+y^2}\Big|_0^2+2\ln\left|y+\sqrt{4+y^2}\right|\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{8}-0\right)+2\left(\ln\left|2+\sqrt{8}\right|-\ln 2\right)=2\sqrt{2}+2\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* линий: $y^2=x$ и $y=x^2$ между точками их пересечения.

Решение. График функции $y^2=x$ – парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси *Ox*, график функции $y=x^2$ – парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси *Oy*.

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения графиков. Для этого решим систему: $\begin{cases} y^2=x, \\ y=x^2. \end{cases}$ Тогда $A_1(1;1)$ и $A_2(1;-1)$. По полученным данным строим чертеж:



Имеем

$$V=\int_0^1\pi\left[x-x^4\right]dx=\pi\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 4. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v=15-3t$, где v – скорость (в м/с), t – время (в с). Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

Решение. Так как в момент остановки тела скорость его равна нулю, то

$$v=0 \Rightarrow 15-3t=0 \Rightarrow t=5,$$

т. е. нам нужно определить путь, пройденный телом от момента времени $t_1=0$ до $t_2=5$. Согласно формуле получим:

$$s=\int_0^5 (15-3t)\,dt=\left(15t-\frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^5=37{,}5 \text{ (м)}.$$

Пример 5. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2+4$ (в м/с^2). Определите, какова скорость движения тела в момент времени $t=5$с.

Решение. По формуле определения скорости получим:

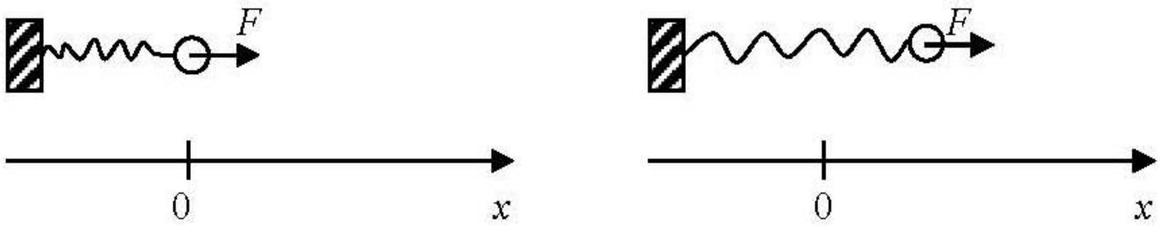
$$v=\int_0^5 a(t)\,dt=\int_0^5 \left(12t^2+4\right)dt=\left(4t^3+4t\right)\Big|_0^5=520\,(\text{м/с}).$$

Пример 6. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 60 Н. Какую работу она производит, растягивая ее на 0,12 м?

Решение. По условию при $.F=60$.Н $x=0{,}02$ м. По закону Гука для пружины $F=kx$ найдем k:

$$60=k\cdot 0{,}02,$$

откуда $k=\dfrac{60}{0{,}02}=3000$Н/м.

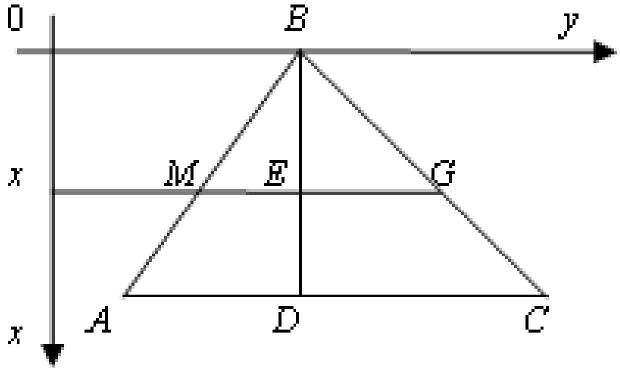


Подставив найденное значение k в формулу $F=kx$, получим $F=3000x$, т. е. $f(x)=3000x$.

Взяв пределы интегрирования от 0 до 0,12, вычислим работу:

$$A=\int_0^{0.12} 3000x\,dx=3000\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0.12}=21{,}6 \text{ Дж}.$$

Пример 7. Вычислить силу давления воды на вертикально погруженную треугольную пластину ABC с основанием $AC=9$ м и высотой $BD=2$ м, если вершина B лежит на свободной поверхности жидкости, а AC – параллельно ей.



Решение. Пусть MG – поперечное сечение пластины на уровне $BE=x$. Найдем зависимость длины MG от x. Из подобия треугольников MBG и ABC имеем

$$MG:AC=BE:BD \text{ или } MG:9=x:2,$$

откуда $MG=f(x)=4{,}5x$.

Тогда на основании формулы получим:

$$P=\rho g\int_0^2 4{,}5x^2dx=4{,}5\rho g\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=12\rho g\approx 1{,}2\cdot 10^5 \text{ Н},$$

так как плотность воды 1000 кг/м^3 и $g\approx 9{,}8$ м/с^2.

Пример 8. Определите координату центра масс стержня длиной 4 м, если его плотность определяется по формуле $\rho(x)=x+1$.

Решение. Определим суммарную массу стержня:

$$M=\int_0^4\rho(x)dx=\int_0^4(x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_0^4=\frac{4^2}{2}+4=12.$$

Тогда $x'=\frac{1}{M}\int_0^4 x\rho(x)dx=\frac{1}{12}\int_0^4 x(x+1)dx=\frac{1}{12}\int_0^4(x^2+x)dx=\frac{1}{12}\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4=\frac{32}{9}.$

Пример 9. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от x_1=100 до x_2=121 изделий, если a=600 (мин.), b=0.5.

Решение. Используя формулу, получаем

$$t_{ср}=\frac{1}{121-100}\int_{100}^{121}600x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{600}{21}\left.2\sqrt{x}\right|_{100}^{121}=\frac{400}{7}\approx 57.2(мин).$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Определить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

а) $y=x^2$, $y=2x$; б) $y=-x^2+4x-1$, $y=-x-1$;

в) $y=x^2-3x$, $x=-2$, $y=0$; г) $y=x^2-3x-4$, $y=0$, $x=5$;

д) $y=\dfrac{6}{x}$, $y=7-x$, е) $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$.

2. Определить объем тела, полученного от вращения плоской фигуры вокруг оси Ox, если:

а) $y=3x-x^2$, $y=0$; б) $y=1-x^2$, $y=0$, $x=0$;

в) $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=0$; г) $y^2=x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;

д) $y=-x^2+9$, $y=0$; е) $y=\cos x$, $x=-\pi$, $x=\pi$, $y=-1$.

3. Определить объем тела, полученного от вращения плоской фигуры вокруг оси Oy, если:

а) $y=x+2$, $y^2=9x$; б) $y^2=x$, $y=\dfrac{1}{2}x$;

в) $y=-x^2+2$, $y=x^2$; г) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

4. Найдите длину дуги указанных линий:

а) $y=-x^2+9$ от $x=1$ до $x=2$; б) $y=-x^2$ от $x=0$ до $x=3$;

в) $y=x^2+1$ от $x=2$ до $x=4$; г) $y=\sqrt{4-x^2}$ от $x=0$ до $x=4$;

д) $y^2=x$ от $x=1$ до $x=3$, е) $y=x^3$ от $x=-1$ до $x=1$.

5. Скорость движения тела задана уравнением $v=3t^2+2t-1$ (в м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

6. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении по прямой. Одно тело двигалось со скоростью $v=6t^2+2t$ м/с, другое – со скоростью $v=4t+5$ м/с. На каком расстоянии они будут друг от друга через 5 с?

7. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v=8-2t$, где v – скорость (в м/с), t – время (в с). Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

8. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2+4$. Найдите закон движения точки, если в момент времени $t=1$с ее скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 (единица измерения a равна 1м/с^2).

9. Тело брошено с поверхности земли вертикально верх со скоростью $v=39.2-9.8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

10. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от x_1=100 до x_2=121 изделий, если a=600 (мин.), b=0.5.

11. Определите средние и предельные издержки при объеме продукции 10 единиц, если зависимость между издержками производства и объемом выпускаемой продукции выражается функцией: $y=25x-0{,}025x^3$ (ден. ед.)

12. Определить дисконтированный доход за три года по процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млрд. руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млрд. руб.

13. Найти объем продукции, произведенной за 4 часа, если функция Кобба-Дугласа имеет вид: $g(t)=(1+t)e^{3t}$.

14. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x)=ax+bx^3$ ($a<p$, $b>0$). Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Перечислите случаи, которые возникают при вычислении площади плоской фигуры.
3. Какие физические приложения определенного интеграла Вы знаете?
4. Каков экономический смысл определенного интеграла?

3.4. Числовые ряды

3.4.1. Понятие числовых рядов

Ряд – математическое выражение, позволяющее записать бесконечное количество слагаемых и подразумевающее значение их суммы, которое можно получить в предельном смысле.

Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется *числовым рядом*.

В общем виде числовой ряд можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где $\sum$ – математический знак суммы;

a_n – общий член ряда;

n – переменная-«счётчик».

Запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее до бесконечности. Вместо переменной n иногда используются переменные k, m, i или j.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ либо с любого натурального числа.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Будем считать, что числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – неотрицательные, т.е. члены ряда положительные. Тогда ряд называется *положительным числовым рядом.*

Числовые ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными рядами*. Ряды, все члены которых отрицательные числа, не представляют нового по сравнению со знакоположительными рядами, так как они получаются умножением знакоположительных рядов на -1.

Если члены числового ряда с разными знаками, то такой ряд будет называться *знакопеременным.*

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

называется *знакочередующимся.* Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется *n-ой частичной суммой* и обозначается S_n.

Суммы $S_1 = a_1$;

$S_1 = a_1 + a_2$;

$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$;

…;

$S_1 = a_1 + a_2 + a_n$,..

называются *частичными суммами ряда.*

Если последовательность частичных сумм имеет конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \qquad (2)$$

то этот предел называется *суммой ряда*.

Если предел (2) конечен, то ряд называется *сходящимся.* Если же предел (2) не существует или равен ∞ то ряд *расходится* и суммы не имеет.

Примером расходящегося числового ряда является ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \ldots.$$

Очевидно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому 3 + 5 + 7 +… = ∞ и, значит, ряд расходится.

В качестве примера сходящегося числового ряда можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную из школьного курса алгебры:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots.$$

Сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно найти по формуле:

$$S_n=\frac{b_1}{1-q},$$

где b_1 – первый член прогрессии, q– основание прогрессии. В данном случае: b_1=1, q=1/4. Таким образом:

$$S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$.

Решение. Подставляем в общий член ряда сначала n = 1, потом n = 2 и n = 3, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}=\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 5^1}+\frac{\sqrt{3}}{5\cdot 5^2}+\frac{\sqrt{4}}{9\cdot 5^3}+\ldots.$$

Пример 2. Написать формулу общего члена для ряда:

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{8}+\frac{6}{11}-\frac{8}{14}+\ldots$$

Решение. Числители членов – четные числа вида 2n, а знаменатели – числа, которые получаются по формуле 3n+2 (n=1,2,3,...). Учитывая, что знаки членов ряда чередуются, получим $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n}{3n+2}$.

Пример 3. Найти сумму указанного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots.$$

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Запишем его иначе:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Распишем частичную сумму ряда, используя последнюю формулу:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тогда предел частичной суммы равен:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

откуда следует, что ряд сходится и его сумма S=1.

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Записать первые пять членов ряда:

а) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $a_n=\dfrac{n+1}{2^n}$; в) $a_n=\dfrac{n+2}{2n-1}$; г) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$; д) $a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$.

2. Найти общий член ряда:

а) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$; б) $-\frac{2}{5}+\frac{5}{7}-\frac{8}{9}+\ldots$; в) $\frac{5}{1}+\frac{9}{2}+\frac{13}{3}+\ldots$; г) $\frac{4}{2}-\frac{7}{4}+\frac{10}{12}-\ldots$;

д) $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{8}{9}+\ldots$; е) $\frac{2}{5}-\frac{4}{25}+\frac{6}{125}-\ldots$; ж) $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{3}-\ldots$; з) $\frac{2}{6}+\frac{4}{8}+\frac{8}{10}+\ldots$;

и) $-\frac{5}{1}+\frac{9}{2}-\frac{13}{3}+\ldots$; к) $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots$; л) $\frac{4}{2}+\frac{7}{4}+\frac{10}{12}+\ldots$; м) $-\frac{2}{6}+\frac{4}{8}-\frac{8}{10}+\ldots$.

3. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n^2-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{7^n}$;. е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n(n+1)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$; з) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+6}{n^2-1}$; и) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{5^n}$;.к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(n+1)^2}$; л) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$;. м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

Контрольные вопросы

1. Какое математическое выражение называют «ряд»?
2. Что означает выражение «числовой ряд»? Как он обозначается?
3. Что такое частичная сумма ряда.
4. Как найти сумму ряда?
5. Какой ряд сходящийся, а какой расходящийся?
6. Какие ряды называются знакопеременными?

3.4.2. Признаки сходимости рядов

Для установления сходимости или расходимости ряда требуется найти сумму ряда. Однако при решении практических задач зачастую сумму ряда находить не требуется, а необходим только ответ о сходимости ряда. Тогда для решения этой задачи используются специальные признаки, основанные на свойствах общего члена ряда.

Признак сходимости числового ряда – это метод, позволяющий установить сходимость или расходимость бесконечного ряда.

Рассмотрим основные признаки сходимости рядов.

1. Необходимый признак сходимости ряда

Если предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится, иначе расходится:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} =0, & \textit{ряд сходится} \\ \neq 0, & \textit{ряд расходится} \end{cases}$$

Данный признак называется необходимым, так как если общий член ряда стремится к нулю, то это еще не означает, что ряд сходится. Поэтому это условие не является достаточным. Если общий член ряда стремится к нулю, то ряд может, как сходиться, так и расходиться. В таких случаях для решения примеров необходимо использовать другие признаки.

Примером такого случая является гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Обобщенный гармонический ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Рассмотрим его частные случаи.

1) Данный ряд расходится при $\alpha \le 1$. Например, расходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

2) Данный ряд сходится при $\alpha > 1$. Например, сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

2. Признак сравнения для положительных числовых рядов

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}в_n$.

1. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}в_n$ – сходится, и выполнено неравенство $a_n \le b_n$ (для n = 1,2,3,…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

Иными словами: из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

2. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}в_n$ – расходится, и выполнено неравенство $a_n \ge b_n$ (для n = 1,2,3,…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже расходится.

Иными словами: из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

3. Предельный признак сравнения числовых положительных рядов

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}в_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу A : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно**.**

Замечание:

1) Если речь идёт о двух сходящихся рядах, то предел может быть равен и нулю (но не бесконечности).

2) Если речь идёт о двух расходящихся рядах, то предел может быть равен и бесконечности (но не нулю).

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда содержимым ряда являются многочлены, либо один многочлен в знаменателе, либо многочлены и в числителе, и в знаменателе, либо один или оба многочлена также могут находиться под корнем.

Замечание: когда используем предельный признак сравнения, не имеет значения, в каком порядке составлять отношение общих членов.

Алгоритм применения предельного признака сравнения

1. Составляем отношение общих членов.
2. Избавляемся от четырехэтажности дроби.
3. Раскрываем в числителе скобки.
4. Раскрываем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.
5. Почленно делим числители на знаменатели. Помечаем члены, которые стремятся к нулю.

4. Признак сходимости Даламбера

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то:

а) при $D<1$ ряд сходится;

б) при $D>1$ ряд расходится;

в) при $D=1$ вопрос о сходимости остается открытым и необходимо использовать другой признак.

Основные предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени.

2) В общий член ряда входит факториал.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей».

5. Радикальный признак Коши

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если существует предел: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, то:

а) при $K<1$ ряд сходится;

б) при $K>1$ ряд расходится;

в) при $K=1$ вопрос о сходимости остается открытым и необходимо использовать другой признак.

Отметим, что если признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, то признак Даламбера также не даст ответа, но если признак Даламбера не дает ответа, то признак Коши вполне может «сработать». То есть, признак Коши является в этом смысле более сильным признаком.

Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда полностью находится в степени, либо когда корень извлекается из общего члена ряда.

6. Интегральный признак Коши

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Данный ряд сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши является тот факт, что в общем члене ряда есть некоторая функция и её производная.

7. Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю $|a_{n+1}| < |a_n|$, то ряд сходится:

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0.$$

В условиях теоремы Лейбница должна выполняться монотонность убывания, причем неважно, строгая или нестрогая. При этом члены ряда могут даже некоторое время возрастать по модулю, но остаток ряда обязательно должен быть монотонно убывающим.

Если ряд сходится по признаку Лейбница, то также говорят, что ряд *сходится условно*.

Если сходится и ряд, составленный из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд *сходится абсолютно*.

Решение типовых примеров и задач

Пример. Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\frac{1}{25} + \frac{2}{36} + \frac{3}{49} + \ldots + \frac{n-2}{(n+2)^2} + \ldots$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$; 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$.

Решение. 1) Общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{n-2}{(n+2)^2}$.

По необходимому признаку сходимости получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{(n+2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{2(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

поэтому ряд сходится.

2) Используем признак сравнения. Находим похожий ряд среди частных случаев в обобщенном гармоническом ряде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Известно, что он сходится. Теперь нужно показать, что для всех значений n = 1,2,3… справедливо неравенство $\frac{1}{n^2+n+2}\leq\frac{1}{n^2}$:

если n = 1, то $\frac{1}{4}<1$;

если n = 2, то $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$;

если n = 3, то $\frac{1}{14}<\frac{1}{9}$;

если n = 4, то $\frac{1}{22}<\frac{1}{16}$;

….

Для всех членов ряда выполнено неравенство, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

3) В общем члене ряда имеется 4^n, следовательно, необходимо использовать признак Даламбера.

Из условия выписываем общий член ряда: $a_n=\frac{n^2+n-1}{4^n}$.

Составляем следующий член ряда a_{n+1}, для чего вместо n подставляем $n+1$: $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}$.

Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}.$$

Избавляемся от четырехэтажности дроби:

$$\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}=\frac{4^n\cdot\left(n^2+2n+1+n+1-1\right)}{4\cdot4^n\cdot\left(n^2+n-1\right)}.$$

Раскрываем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{n}^{\to0}+\frac{1}{n^2}^{\to0}}{1+\frac{1}{n}^{\to0}-\frac{1}{n^2}^{\to0}}\right)\overset{(7)}{=}\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}.$$

Упрощаем ответ и делаем вывод о сходимости ряда по признаку Даламбера:

$$D=\frac{1}{4}<1.$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

4) Общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от переменной, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши.

Преобразуем общий член ряда под корень:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}.$$

Используя свойство степеней $\sqrt[b]{x^a}=x^{\frac{a}{b}}$, получим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}}.$$

В показателе почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\frac{2}{n}^{\to 0}$, получим $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}$.

В результате получилась неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^3$, которую раскрываем делением числителя и знаменателя на n (старшую степень):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^3=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{5}{n}^{\to 0}}\right)^3=\left(\frac{7}{6}\right)^3=\frac{343}{216}.$$

По радикальному признаку Коши сравниваем результат с 1: $K=\frac{343}{216}>1$ и делаем вывод о том, что ряд расходится.

5) Общий член ряда содержит и функцию и ее производную, поэтому используем интегральный признак Коши.

Сначала берем значок интеграла и переписываем со «счётчика» ряда верхний и нижний пределы: $\int\limits_2^{+\infty}$.

Затем под интегралом переписываем общий член ряда, меняя n на x:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

Теперь необходимо вычислить несобственный интеграл. Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln x|\right)\Big|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b^{\to+\infty}-\ln\ln 2\right)=+\infty.$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

6) В общий член ряда входит множитель $(-1)^n$, а значит имеем знакочередующийся ряд и необходимо использовать признак Лейбница:

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}(n) = +\infty \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

<u>Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения</u>

1. Исследовать ряд на сходимость необходимым признаком сходимости:

а) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots+\frac{n+2}{(n+1)^2}+\ldots$; б) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots+\frac{2n}{3n+2}+\ldots$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$; г) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\frac{13}{26}+\ldots+\frac{3n-2}{n^2+1}+\ldots$

2. Исследовать ряд на сходимость признаком сравнения:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$.

3. Исследовать ряд на сходимость признаком Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2n-3)}{3^n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{3n+1}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n-2)}{5^n(n+1)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{3n-1}$; е) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(n-1)}{2^n(2n+3)}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

4. Исследовать ряд на сходимость радикальным признаком Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{9^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}$.

5. Исследовать ряд на сходимость интегральным признаком Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$.

6. Исследовать ряд на сходимость признаком Лейбница:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt[5]{(2n+1)^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[6]{(3n+2)^5}}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
2. Какие призраки сравнения для исследования сходимости существуют?
3. В чем суть сходимости ряда по признаку Даламбера?
4. В чем заключается радикальный признак Коши?
5. Раскройте особенности применения интегрального признака Коши.
6. Как исследовать на сходимость знакопеременные ряды? В чем их особенность?

3.4.3. Функциональные ряды

Выше было сказано, что числовой ряд состоит из чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots,$$

т.е. все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это числа.

Функциональный ряд – это ряд, каждый член которого состоит из функций:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + \dots$$

Например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$.

Как и числовой ряд, функциональный ряд можно расписать в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \dots$$

Наиболее популярной разновидностью функционального ряда является степенной ряд.

Членами степенного ряда являются целые положительные степени переменной x либо двучлена $(x - a)$ ($a = const$), умноженные на числовые коэффициенты:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

где c_n – это составляющая числовых рядов, которая зависит только от порядкового номера n.

Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{n^2} = 2(x+2) + \frac{2^2(x+2)^2}{2^2} + \frac{2^3(x+2)^3}{3^2} + \frac{2^4(x+2)^4}{4^2} + \frac{2^5(x+2)^5}{5^2} + \dots$$

Подставляя различные действительные значения вместо переменной x получаются различные числовые степенные ряды. Некоторые из полученных числовых рядов будут сходиться, а некоторые – расходиться.

Рассмотрим задачу поиска множества значений переменной x, при котором степенной ряд будет сходиться. Такое множество называется *областью сходимости степенного ряда*.

Возможны три случая:

1) Степенной ряд *сходится абсолютно* на некотором интервале (a; b), т.е. выбор любого значения x из интервала (a; b) и подстановка его в общий член степенного ряда ведет к получению абсолютно сходящегося числовому ряду. Интервал (a; b) и называется *интервалом сходимости степенного ряда*.

Радиус сходимости определяется по формуле: $R = \dfrac{b-a}{2}$.

С геометрической точки зрения данная ситуация иллюстрируется следующим образом:

Рисунок 37 – Интервал сходимости степенного ряда

На рисунке 37 интервал сходимости ряда для определённости указан для интервала (–4; –2), откуда получим радиус сходимости ряда:

$$R = \frac{-2-(-4)}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

На практике широко распространен тривиальный случай, когда интервал сходимости симметричен относительно нуля (рисунок 38).

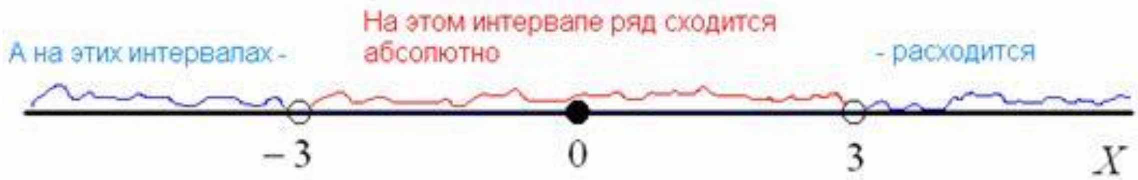


Рисунок 38 – Симметричный интервал сходимости степенного ряда

На данном рисунке для примера представлен интервал сходимости ряда: (–3; 3), радиус сходимости для которого:

$$R = \frac{3-(-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Рассмотрим, что будет происходить на концах интервала (a; b).

В точках $x = a$, $x = b$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Для определения этого необходимо проводить дополнительные исследования.

Рассмотрим понятие область сходимости ряда. Термины область сходимости и интервал сходимости ряда очень похожи, однако это чуть более детализированный. Однако область сходимости ряда – это чуть более детализированный интервал сходимости ряда.

Рассмотрим случаи.

1. Если установлено, что степенной ряд расходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда совпадает с интервалом сходимости: $(a; b)$

2. Если установлено, что степенной ряд сходится на одном конце интервала и расходится на другом, то область сходимости ряда представляет собой полуинтервал: $[a; b)$ или $(a; b]$.

3. Если установлено, что степенной ряд сходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда представляет собой отрезок: $[a; b]$.

Степенной ряд *сходится абсолютно* при любом значении x, т.е. какое бы значение неизвестной переменной бы не подставили в общий член степенного ряда, в любом случае получается абсолютно сходящийся числовой ряд.

Интервал сходимости и область сходимости в данном случае совпадают: $(-\infty; +\infty)$. Радиус сходимости: $R = +\infty$.

Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x = 0$.

В этом случае интервал сходимости и область сходимости ряда также совпадают и равны единственному числу – нулю: $x = 0$.

Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x = a$, если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$, то в точке $x=-a$.

Радиус сходимости ряда во всех случаях нулевой: $R = 0$.

Заметим, что данная классификация справедлива только для степенных рядов. Для произвольного функционального ряда она в общем случае является неверной.

Разложение функции в ряд

Любой числовой ряд может или сходиться, или расходиться. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то это значит, что сумма его членов равна некоторому конечному числу: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = S$.

Рассмотрим степенной ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Этот ряд сходится при $-1 \le x \le 1$. К чему он сходится? Ведь однозначного значения суммы у этого ряда нет.

Функциональные ряды сходятся к функциям. В частности, суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ в его области сходимости $-1\le x\le 1$ является некоторая функция $f(x)$:

$$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^5}{5^2}+\ldots=f(x).$$

Данный факт справедлив только для найденной области $-1\le x\le 1$, вне этого промежутка степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ будет расходиться.

Для того, чтобы функция разлагалась в степенной ряд необходимо, чтобы она была бесконечно дифференцируемой, но это условие не является достаточным.

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается на данном промежутке β, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, где $a_n, a\in R$, который сходится на этом промежутке к данной функции так, что

$$\begin{aligned}&f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots\\&\forall x\in\beta\end{aligned}\qquad(1).$$

В качестве промежутка β обычно рассматривается окрестность $(-a+r, a+r)$.

Задача разложения функции в степенной ряд заключается прежде всего в том, чтобы получить возможность приближенного вычисления значений функции через частичную сумму ряда (1). Далее это может использоваться для приближенного вычисления интегралов, корней уравнения. Причем степень приближения может оцениваться с любой точностью.

Теорема. Если в некотором интервале, содержащем точку a функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x-a)$, то такое разложение единственно.

Доказательство: Рассмотрим интервал $(a-r, a+r)$ и пусть в этом интервале имеет место разложение (1), в котором $a_0, a_1,\ldots a_n$-неизвестные пока коэффициенты. Найдем эти коэффициенты: продифференцируем n раз:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n:$$

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3(x-a)+\ldots+n(n-1)(x-a)^{n-1}+\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1a_n+\ldots$$

Полагая в этих равенствах $x=a$, выразим коэффициенты разложения через значения функций в точке a, т.е.

$$a_0=f(a);a_1=\frac{f'(a)}{1!};a_2=\frac{f''(a)}{2!};a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\qquad(2).$$

Отсюда следует единственность разложения функции в ряд (1), т.к. коэффициенты разложения определяются однозначно через функцию $f(x)$ и ее значения в точке a.

Степной ряд с коэффициентами, вычисленными по формулам (2), т.е. ряд вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+... \tag{3}$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a.

Если $a=0$, то получим ряд

$$f(0)+\frac{f(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...\ , \tag{4}$$

называемый рядом Маклорена.

Замечание: Бесконечная дифференцируемость функций не является достаточным условием разложимости функций в ряд Тейлора.

Примером бесконечно дифференцируемой функции, которая не может быть представлена своим рядом Тейлора является $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

Чтобы ответить на вопрос, при каких условиях, составленный ряд Тейлора для функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ нам потребуется формула Тейлора.

Для функции $f(x)$, имеющей в окрестности точки $x=a$ производные до $(n+1)$-го порядка справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \tag{5}$$

где $R_n(x)$-остаточный член. Остаточный член может иметь различный вид:

$$R_n(x)=(\frac{x-a}{x-\xi})^p\cdot\frac{(x-\xi)}{n!\,p}f^{n+1}(\xi), \tag{6}$$

где $\xi\in(a;x)$-в общей форме.

Так как $a<\xi<x$, то можем записать : $\xi-a=\Theta(x-a)$, где $0<\Theta<1$, тогда

$\xi=a+\Theta(x-a)$

$x-\xi=x-a-\Theta(x-0\Rightarrow \quad R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\Theta)^{n+1-p}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)) \quad (7)$

$x-\xi=(x-a)(1-\Theta)$

1. Положим $p=n+1$, тогда

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)) \tag{8}$$

в формуле Лагранжа.

2. Положим $p=1$:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)) \qquad (9)$$

в формуле Коши.

Теорема 1. Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на некотором интервале, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена стремился к нулю на этом интервале, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Доказательство: (Достаточное) Если функция имеет производную всех порядков в окрестности точки $x=a$, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим.

Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный член $R_n\to 0$ при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, тогда переходя в (3) к пределу при $n\to\infty$, получим бесконечный ряд – ряд Тейлора (3).

Последнее равенство справедливо лишь при условии $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. В этом случае написанный ряд сходится и его сумма равна $f(x)$. Действительно, $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, где $P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Тогда $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Но $P_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда (3), ее предел равен сумме ряда, стоящего в правой части равенства (3). Следовательно, равенство (3) справедливо.

(Необходимое) Пусть $f(x)$ представляется формулой Тейлора (3), тогда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, но так как ряд сходится, то можно записать $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируемая функция в некоторой точке a и некоторой ее окрестности, тогда ряд Тейлора сходится к этой функции, если последовательность е производных $f^{(n)}(x)$ равномерно ограничена.

Доказательство: Пусть последовательность производных $f^{(n)}(x)$ - равномерно ограничена, то есть $\exists M>0, \left|f^{(n)}(x)\right|<M, \forall x\in V_a, n=1,2,...,$ тогда $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}$ (остаточный член в формуле Лагранжа). Используя условие теоремы можно оценить остаточный член в формуле Лагранжа: $\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}<\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ (так как последовательность равномерно ограничена). Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ – он по признаку Даламбера сходится, тогда $\lim_{n\to\infty}\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}=0$ (необходимое условие сходимости), но тогда $\left|\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\right|\to 0, n\to\infty$. А отсюда по теореме 1 следует, что ряд Тейлора сходится к данной функции.

Замечание: Если для какой-нибудь функции формально написан ряд Тейлора, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора

Задача разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 решается в следующем порядке:

1. Находятся последовательно производные $f'(x),...f^{(n)}(x)$.
2. Вычисляются значения функции и ее производных в точке x_0 $f(x_0), f'(x_0),...f^{(n)}(x_0)$.
3. Записывается ряд путем подстановки найденных значений в ряд (3): $f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+....$
4. Находим интервал сходимости ряда : $(x_0-R;x_0+R)$.
5. Записываем остаточный член $R_n(x)$.
6. Находим те точки $x\in(x_0-R,x_0+R)$, для которых $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

После выполнения этих пунктов в ряде вместо $\approx$ можно поставить равенство$=$.

Разложим элементарные функции в ряд Маклорена.

1. Функция $f(x)=e^x$.

Пусть задана функция $f(x)=e^x$, она бесконечно дифференцируемая и $f^{(n)}(x)=e^x, \forall x\in\left]-r,r\right[$, где $r\in R$.

По теореме 2, оценим последнюю производную $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le r, n=1,2...$. Поэтому наша функция может быть разложена в ряд Тейлора (Маклорена).

Найдем производные данной функции:

$f'(x)=(e^x)'=e^x$,

$f''(x)=(f'(x))'=(e^x)'=e^x$,

$f'''(x)=(f''(x))'=(e^x)'=e^x$,

...

Теперь начинаем находить значение функции и ее производных в точке $a = 0$:

$f(0) = e^0 = 1,$

$f'(0) = e^0 = 1,$

$f''(0) = e^0 = 1,$

$f'''(0) = e^0 = 1,$

…

Очевидно, что $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$

Найдем коэффициенты разложения $C_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{e^x}{n!} = \dfrac{1}{n!}$, тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Получили ряд Маклорена для функции e^x, который сходится к этой функции на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x) = \sin x$.

Найдем ее производные

$$f'(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x),\ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin\ = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 2 + x),\ f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 3 + x),\ f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 4 + x),\ f^{(4)}(0) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot n + x),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot n$$

Вычислим коэффициенты в формуле Тейлора:

$C_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot n}{n!}$. Пусть $n = 2k$, тогда $C_{2k} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2k}{(2k)!} = 0$, если $n = 2k-1$, то $C_{2k-1} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(2k-1)}{(2k-1)!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$ так как $\left|f^{(n)}\right| = \left|\sin(\frac{\pi}{2}\cdot n + x)\right| \le 1, \forall x, \forall n$, то по теореме 2, можно утверждать, что ряд Тейлора сходится к функции $\sin x, \forall x$.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, -\infty < x < \infty.$$

3. Функция $f(x) = \cos x$.

Можно провести аналогично разложение, а можно разложить другим способом. Мы знаем, что степенной ряд можно дифференцировать в интервале его сходимости. Тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^2 n}{2n!} + \ldots, -\infty < x < +\infty.$$

4. Функция $f(x)=\ln(1+x)$.

Так как функция $y=\ln x$ и ее производные не определены в точке $x=0$, поэтому будем рассматривать функцию $f(x)=\ln(1+x)$, которая определена $\forall x>-1$, вместе с производными. Продифференцируем $f(x)$:

$\ln'(1+x)=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$ $\quad\dfrac{1}{1+x}$ – как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{1}{1-q^n}\Rightarrow q=-1$ (имеет сумму при $|x|<1$). Проинтегрируем этот ряд почленно по любому отрезку от 0до x, где $x\in(-1;1)$. Получим $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots$ он сходится при $|x|<1$. Проверим сходится ли ряд на границах интервала $(-1;1)$:

1) при $x=-1$ ряд вообще суммы не имеет;

2) при $x=1$ получается знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ по теореме Лейбница он сходится, покажем, что он сходится к $\ln 2$, то есть $\ln 2=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$. Воспользуемся теоремой (достаточным условием разложимости в ряд Тейлора). Для этого оценим остаточный член в формуле Лагранжа. $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\Theta(x))}{(n+1)!}$ при $x=1$:

$$R_n(1)=\frac{(\ln(1+\Theta))^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$(\ln(x+1))'=\frac{1}{x+1}$$

$$(\ln(x+1))''=(\frac{1}{x+1})'=-\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$(\ln(x+1))'''=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$(\ln(x+1))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

Тогда $\begin{array}{l} R_n(1)=\dfrac{(-1)n!}{(n+1)!(\Theta+1)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\Theta)^{n+1}}\to \\ \to 0, n\to\infty \end{array}$.

Таким образом, $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$, то есть ряд сходится при $-1<x\le 1$.

При $x>1$ ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

Приложения степенных рядов

Разложение функции в ряд означает её приближённую замену полиномом в виде степенного ряда. Представление элементарных функций в виде степенных рядов позволяет применять эти ряды для приближенных вычислений. С заданной степенью точности можно вычислить значения функций, значения определенных интегралов, которые не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, а также можно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим приложения степенных рядов подробнее.

1. Приближенные вычисления значений функции.

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n – конечная величина), а остальные члены отбрасывают:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n .$$

Точность этого равенства с увеличивается с ростом n.

Для оценки погрешности найденного приближенного значения необходимо оценить сумму отброшенных членов. Здесь возможно два случая:

1. Если ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов сравнивают с бесконечно убывающей прогрессией.

2. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка:

$$|R_n| < |u_{n+1}|.$$

где $|u_{n+1}|$ – первый из отброшенных членов ряда.

Абсолютная погрешность приближенного равенства равна модулю остатка ряда:

$$|f(x_0 - S_n(x_0))| = |r_n(x_0)|,$$

где

$$r_n(x_0) = a_{n+1}(x_0 - a)^{n+1} + a_{n+2}(x_0 - a)^{n+2} + \cdots$$

2. Разложение сложных функций в ряд Маклорена.

Используя разложения основных элементарных функций, а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, умножения/деления функции на множитель, сложения/вычитания и замены переменной, можно разложить сложные функции в ряд по степеням x и указать области сходимости полученных рядов.

3. Приближенные вычисление определенных интегралов.

Пусть необходимо вычислить определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Если известно разложение функции $f(x)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

тогда по свойству степенных рядов, это разложение можно интегрировать:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)dx .$$

Полученное подынтегральное выражение представляет собой сумму степенных функций, для которых легко находятся первообразные.

Погрешность вычисляется аналогично п. 1.

4. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Существует два метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов:

1. Метод неопределенных коэффициентов. Наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

2. Метод последовательного дифференцирования. Применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Решение. Переменная x может принимать любое действительное значение от $-\infty$ до $+\infty$.

На первом этапе находим интервал сходимости ряда.

В большинстве заданий используется схема, основанная на признаке Даламбера для произвольных числовых рядов.

Технически необходимо вычислить предел $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$, для этого

1. Составляем предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right|.$$

2. Избавляемся от четырехэтажности дроби:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right|.$$

3. В числителе разлагаем степень переменной по правилу действий со степенями, а в знаменателе возводим двучлен в квадрат:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right|.$$

4. Сокращаем переменную в степени и выносим оставшийся x за знак предела, причем со знаком модуля:

$$|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}.$$

5. Раскрываем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$:

$$|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}}=|x|\cdot 1=|x|.$$

После того, как предел найден, нужно проанализировать, что получилось.

В данном случае предел равен $|x|$. Для определения интервала сходимости ряда составляем неравенство: $|x|<1$.

Раскрываем модуль:

$$-1<x<1.$$

Это и есть интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

На втором этапе необходимо исследовать сходимость ряда на концах найденного интервала.

Сначала берём левый конец интервала $x=-1$ и подставляем его в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$:

При $x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Получен числовой ряд, который исследуем по признаку Лейбница:

1) ряд является знакочередующимся;

2) $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

При этом каждый следующий член ряда по модулю меньше предыдущего: $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$ $\left(|a_{n+1}|<|a_n|\right)$, значит, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

С помощью ряда, составленного из модулей, выясним, как именно: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится, так как это частный случай обобщенного гармонического ряда.

Таким образом, полученный числовой ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим правый конец интервала x = 1. После подстановки этого значения получим степенной ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится.

Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится, причём абсолютно, на обоих концах найденного интервала. Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1\le x\le 1$.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$

Решение. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4}{(n+1)!}}{\dfrac{7^n\cdot n^4}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4\cdot n!}{7^n\cdot n^4\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\quad\cdot(n+1)^4}{n^4\cdot(n+1)}=$$

$$=7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4}=\frac{\infty}{\infty}=7\cdot 0=0<1.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, а значит, по соответствующей теореме, сходится и исследуемый ряд, причём абсолютно.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$ сходится абсолютно.

Пример 3. Разложить функцию $f(x)=x^3+4x^2-3x+2$ в ряд Тейлора по степеням (x – 1).

Решение. В данном случае a = 1. Теперь разложения:

$f(a)=f(1)=1+4-3+2=4$

$f'(x)=(x^3+4x^2-3x+2)'=3x^2+8x-3$

$f'(a)=f'(1)=3+8-3=8$

$f''(x)=(3x^2+8x-3)'=6x+8$

$f''(a)=f''(1)=6+8=14$

$f'''(x)=(6x+8)'=6=const$

$f'''(a)=f'''(1)=6$

$f^{(4)}(x)=(6)'=0$, все производные, начиная с четвёртой производной, будут нулевыми.

Теперь подставляем весь найденный материал в формулу Тейлора:

$$f(x)=x^3+4x^2-3x+2=4+\frac{8}{1!}(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3+0+0+0+\ldots=$$
$$=4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3$$

Для проверки можно раскрыть скобки:

$$4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3=4+8x-8+7(x^2-2x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)=$$
$$=4+8x-8+7x^2-14x+7+x^3-3x^2+3x-1=x^3+4x^2-3x+2$$

Получен исходный многочлен, что и требовалось доказать.

Пример 4. Разложить функцию $f(x)=x\cos 3x$ в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Определяем функцию, разложение которой есть в таблице:

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

В данном случае $\alpha=3x$:

$$\cos 3x=1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Раскрываем в числителе скобки:

$$\cos 3x=1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Теперь умножаем обе части на переменную x:

$$x\cos 3x=x\cdot\left(1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right).$$

В итоге искомое разложение функции в ряд:

$$y=x\cos 3x=x-\frac{3^2x^3}{2!}+\frac{3^4x^5}{4!}-\frac{3^6x^7}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{0,25}e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем разложение функции e^x в ряд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Подставим в разложение вместо переменной x выражение $-x^2$, получим:

$$e^{-x^2}=1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Подставим в подынтегральное выражение найденное разложение:

$$\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx=\int_0^{0,25}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx.$$

Найдем первообразные:

$$x\Big|_0^{0.25} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0.25} + \frac{x^5}{10}\Bigg|_0^{0.25} - \frac{x^7}{42}\Bigg|_0^{0.25} + \ldots$$

По формуле Ньютона-Лейбница, получим:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} + \ldots$$

Так как

$$\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} < 0{,}001,$$

то значение интеграла равно:

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Разложить функцию в ряд Маклорена:

а) $f(x) = x \cdot e^x$; б) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; в) $f(x) = x \cdot \sin x$; г) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

2. Найти приближенное значение:

а) $\cos 0{,}5$; б) $\sin 0{,}5$; в) $e^{0,5}$; г) $\ln 3$; д) $\cos(-0{,}1)$; е) $\sin 0{,}3$; ж) $\ln 0{,}1$.

3. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой:

а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}dx$; в) $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

д) $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\int_0^1 3\left(x^2 + x^2 e^{x^3}\right)dx$; ж) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

Контрольные вопросы

1. Какой ряд называется функциональным? Степенным?
2. Раскройте сущность понятий: интервал сходимости и область сходимости ряда.
3. Какой ряд называется рядом Тейлора? Рядом Маклорена?
4. Сформулируйте алгоритм разложения функции в ряд Тейлора.
5. Запишите разложение элементарных функций в ряд Маклорена
6. Перечислите приложения степенных рядов.

3.5. Применение методов математического анализа в информатике

Компьютерные платы представляют собой электрическую цепь. Процессы, происходящие в электрических цепях, описываются на основе методов математического анализа: дифференциального и интегрального исчисления.

Рассмотрим другой пример. Для оценки процесса формирования информационного сообщества фиксируют развитие сектора ИКТ и внедрение информационных технологий в различные виды деятельности общества. Этот процесс сопровождается анализом факторов, которые оказывают влияние на процесс использования IT-технологий. Методы математического анализа изучения внедрения IT-технологий считаются инструментом контроля, выполняемого для определения достигнутых результатов и степень расхождения показателей от запланированных.

Рассмотрим применение рядов для цифровой обработки звука. Из физики известно, что звуковой сигнал в компьютерной технике представляется в форме некоторого набора амплитуд в определенные промежутки времени, называемые периодом дискретизации. Они представляются некоторым количеством двоичных разрядов. Это представление удобно для хранения звукового сигнала. Но есть операции по обработке звукового сигнала, при которых складываются составляющие его частот с определенной амплитудой и фазой. После этих преобразований звуковой сигнал представляется в виде коэффициентов, которые соответствуют амплитудам и фазам частот этого сигнала. Такое преобразование информации и есть представление сигнала в виде математического ряда. Такое разложение вряд используется в обработке растровых изображений, сфере телекоммуникаций, исследовании и измерении сигналов, радиолокации и пр. Например, ряды Фурье используются в передаче данных в цифровой форме по аналоговым линиям телефонной сети, либо через модем. Для передачи данных в цифровой форме, их сперва преобразуют в некий набор частот и передают по линиям передачи связи, а потом на приемнике выполняют обратное преобразование и восстанавливают исходные данные.

Индивидуальные задания

Выполните задания в соответствии с номером по списку группы.

Тема: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Задание 1. Найти предел функции при разных значениях x_0 (таблица 8).

Таблица 8

№	Предел	x_0	x_0	x_0	№	Предел	x_0	x_0	x_0
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-6x-7}{x^2-1}$	1	-1	∞	16	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$	1	-2	∞
2	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{5x^2+8x-4}{4-x^2}$	1	-2	∞	17	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+3x-4}{x^2-16}$	2	-4	∞
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$	2	4	∞	18	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$	2	-3	∞
4	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$	-1	5	∞	19	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$	1	-1	∞
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$	2	-1	∞	20	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-x-15}{x^2-3x}$	1	3	∞
6	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$	2	1	∞	21	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-8x+7}$	-1	7	∞
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+x-2}{x^2-1}$	2	-1	∞	22	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-12x+18}{x^2-2x-3}$	-1	3	∞
8	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$	1	2	∞	23	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-5x-6}{x^2-7x+6}$	2	6	∞
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+14x-5}{x^2+4x-5}$	1	-5	∞	24	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-9x+8}{x^2-64}$	-1	8	∞
10	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-18x+81}{x^2-8x-9}$	1	9	∞	25	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-11x+10}{x^2-9x-10}$	2	10	∞
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7x^2-13x-2}{x^2+x-6}$	1	2	∞	26	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+4x-4}{6x^2+11x-2}$	-1	-2	∞
12	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-x-3}{3x^2-6x+3}$	-1	1	∞	27	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-3x-5}{4x^2+5x+1}$	1	-1	∞
13	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-7x+3}{2x^2-18}$	1	3	∞	28	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$	-1	1	∞
14	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+5x-14}$	1	2	∞	29	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+4x-21}{x^2+x-12}$	1	3	∞
15	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+3x-28}{x^2-16}$	1	4	∞	30	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-35}{x^2-x-20}$	1	5	∞

Задание 2. Функция *y=f(x)* задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной (таблица 9). Найти точки разрыва функции, если они существуют, указать их характер. Сделать чертеж.

Таблица 9

№	Функция	№	Функция	№	Функция
1	$y=\begin{cases} x^3+1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$	11	$y=\begin{cases} x^2+1, & x\le -1,\\ \dfrac{2}{x}, & -1<x<2,\\ x-1, & x\ge 2.\end{cases}$	21	$y=\begin{cases} x-3, & x\le 0,\\ 3+\sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 4, & x\ge 1.\end{cases}$
2	$y=\begin{cases} 2x^2, & x<1,\\ \dfrac{1}{x-2}, & 1\le x<3,\\ x-2, & x\ge 3.\end{cases}$	12	$y=\begin{cases} 2-x^2, & x\le -1,\\ 1-2x, & -1<x\le 3,\\ \dfrac{x}{3}, & x>3.\end{cases}$	22	$y=\begin{cases} 2^x, & x\le 0,\\ x+2, & 0<x<2,\\ \dfrac{1}{x-3}, & x\ge 2.\end{cases}$
3	$y=\begin{cases} 2-x, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$	13	$y=\begin{cases} x^3+1, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<4,\\ x-3, & x\ge 4.\end{cases}$	23	$y=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x\le -1,\\ 2x+3, & -1<x<0,\\ \cos x, & x\ge 0.\end{cases}$
4	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & 0\le x<1,\\ \sqrt{x}, & x\ge 1.\end{cases}$	14	$y=\begin{cases} x^2-4, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<\dfrac{1}{2},\\ -2, & x\ge \dfrac{1}{2}.\end{cases}$	24	$y=\begin{cases} x^3-3, & x\le 0,\\ 2-x, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$
5	$y=\begin{cases} 3^x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$	15	$y=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1<x<1,\\ \sqrt[3]{x}, & x\ge 1.\end{cases}$	25	$y=\begin{cases} x^2-1, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ \ln(x-2), & x>2.\end{cases}$

6	$y=\begin{cases} x^2-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$	16	$y=\begin{cases} 1-x, x\le -2,\\ \dfrac{1}{2-x}, -2<x<1,\\ \dfrac{1}{2}x \;, x\ge 1. \end{cases}$	26	$y=\begin{cases} x^2 \;, & x\le 1,\\ \sqrt[3]{x} \;, & 1<x\le 8,\\ \dfrac{2}{x-9}, & x>8. \end{cases}$
7	$y=\begin{cases} 0 \;, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ \ln x, & x>1. \end{cases}$	17	$y=\begin{cases} -2x, x\le 0,\\ \sqrt{x} \;, 0<x<4,\\ x-3, x\ge 4. \end{cases}$	27	$y=\begin{cases} -x \;, x\le 0,\\ -(x-1)^2, 0<x<2,\\ x-3 \;, \; x\ge 2. \end{cases}$
8	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & x<-2,\\ x-2, & -2\le x\le 1,\\ 4 \;, & x>1. \end{cases}$	18	$y=\begin{cases} -x \;, & x\le -1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & -1<x\le 2,\\ 5 \;, & x>2. \end{cases}$	28	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x<0,\\ 1 \;, & 0\le x<\pi,\\ \sin x, & x\ge \pi. \end{cases}$
9	$y=\begin{cases} x \;, & x\le 0,\\ tg\, x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2 \;, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$	19	$y=\begin{cases} \cos x, & x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 \;, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ \pi+x, & x\ge \pi. \end{cases}$	29	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, x\le -\dfrac{1}{2},\\ 2x+1, -\dfrac{1}{2}<x<1,\\ 3 \;, x\ge 1. \end{cases}$
10	$y=\begin{cases} -x^2, & x<-1,\\ 1 \;, & -1\le x<2,\\ \dfrac{1}{3-x}, & x\ge 2. \end{cases}$	20	$y=\begin{cases} e^x \;, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x} \;, & x>2. \end{cases}$	30	$y=\begin{cases} 0 \;, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{x}, & -1<x<2,\\ \dfrac{1}{2}, & x\ge 2. \end{cases}$

Задание 3. Функция *y=f(x)* задана в таблице 10. Исследовать функцию и построить ее график.

Таблица 10

№	Функция		№	Функция	
1	$y=4x^4-20x^2-7$	$y=\frac{5x}{4-x^2}$	16	$y=4x^3-6x^2-24x+1$	$y=\frac{x+2}{x^2-9}$
2	$y=2x^3+12x^2+18x-5$	$y=\frac{5x-2}{(4-x)^2}$	17	$y=3x^3+12x^2+6x-1$	$y=\frac{3x}{4x-x^2}$
3	$y=2x^3-3x^2-12x-1$	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$	18	$y=x^4-5x^2+4$	$y=\frac{4x}{4+x^2}$
4	$y=-3x^2-12x$	$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$	19	$y=x^3+6x^2+9x-8$	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$
5	$y=\frac{1}{3}x^3-9$	$y=\frac{2x^2}{1+x^2}$	20	$y=-4x^4+8x^2+9$	$y=\frac{x^3}{x^2-1}$
6	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$	$y=\frac{3x-1}{2x+3}$	21	$y=x^4-2x^3+3$	$y=\frac{2x-x^2-1}{x}$
7	$y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$	$y=\frac{x}{x^2-2x}$	22	$y=9x^5+3x^3-1$	$y=\frac{x-1}{x^2-x}$
8	$y=x^4-2x^2-3$	$y=\frac{2x^2}{1-x^2}$	23	$y=3x-x^3-2$	$y=\frac{x}{4-x^2}$
9	$y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$	$y=\frac{x+2}{x^2-25}$	24	$y=x^4-2x^2-3$	$y=\frac{2x}{x-4x^2}$
10	$y=3x-x^3-2$	$y=\frac{x-1}{x^2-x+2}$	25	$y=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$	$y=\frac{x^2+8}{1-x}$
11	$y=x^3-\frac{x^4}{4}$	$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$	26	$y=3x^5-5x^3+2$	$y=\frac{x^3}{x^2-1}$
12	$y=x^3-3x^2+12x$	$y=\frac{4-x^3}{x^2}$	27	$y=x^4-12x^3$	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$
13	$y=x^3-4x^2-16x+17$	$y=\frac{x^2}{x^2+3}$	28	$y=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x-23$	$y=\frac{1}{x^2+1}$
14	$y=5x^{11}+4x^5-5$	$y=\frac{6x-6}{x^2+3}$	29	$y=16x^3+12x^2-5$	$y=\frac{x+2}{x^2+1}$
15	$y=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x+1$	$y=\frac{5x^2}{x^2-9}$	30	$y=3x^{54}-5x^3$	$y=\frac{2x^2}{x^2-1}$

Тема: «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1. Вычислить интеграл, выбрав необходимый метод интегрирования (таблица 11)

Таблица 11

№	а	б	в
1	$\int (5x^2+\sqrt{x}+1)dx$	$\int \cos 4x dx$	$\int (x-2)\ln x dx$
2	$\int \frac{4x^3-2x+2}{x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$	$\int (x+2)e^x dx$
3	$\int (-x^2+x-3)dx$	$\int \sin 5x dx$	$\int (2x-1)\ln x dx$
4	$\int \frac{4x^5+6x+1}{x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}}$	$\int (x-4)e^x dx$
5	$\int (4x^3-2x+2)dx$	$\int \cos 9x dx$	$\int (x-4)\ln x dx$
6	$\int \frac{4x^3-2x^2+4}{x}dx$	$\int \sqrt{2x-6}dx$	$\int (x+5)e^x dx$
7	$\int (5x^2+\sqrt{x}+3)dx$	$\int \cos 5x dx$	$\int (x+6)\ln x dx$
8	$\int \frac{x^3-2x^2+7}{x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-7}}$	$\int (x-7)e^x dx$
9	$\int (3x^2-4x+\sqrt{x})dx$	$\int \sin 8x dx$	$\int (2x-3)\ln x dx$
10	$\int \frac{2x^7-x+2\sqrt{x}}{x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+6}}$	$\int (2x+4)e^x dx$
11	$\int (3x^6+x\sqrt{x}+1)dx$	$\int \sin 8x dx$	$\int (x+4)\ln x dx$
12	$\int \frac{x^3-2x^2+7}{x}dx$	$\int \frac{dx}{4x}$	$\int (x-3)e^x dx$
13	$\int (x^6+x\sqrt{x}-x-2)dx$	$\int \sqrt{x-6}dx$	$\int (x+7)\ln x dx$
14	$\int \frac{4x^3-2x^2+4}{x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$	$\int (2x-4)e^x dx$
15	$\int (x^6-\sqrt{x}-8)dx$	$\int \sqrt{x-6}dx$	$\int (x-2)e^x dx$
16	$\int (3x^2+\sqrt{x}-5)dx$	$\int \cos(x+7)dx$	$\int (x+2)\ln x dx$
17	$\int \frac{2x^3-2x+1}{x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	$\int (2x-1)e^x dx$
18	$\int (-x^2+4x-\sqrt{x})dx$	$\int \sqrt{7x+4}dx$	$\int (2x+1)\ln x dx$
19	$\int \frac{6x^5-2x+7}{x}dx$	$\int \frac{dx}{4x+1}$	$\int (x+4)e^x dx$
20	$\int (3x^3+8x+2)dx$	$\int \sin(2x-5)dx$	$\int (x+4)\ln x dx$

21	$\int \frac{4x^3-2x^2+4}{x^3}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$	$\int (x-5)e^x dx$
22	$\int (5x^2+\sqrt{x}+3)dx$	$\int \sqrt{2x-5}dx$	$\int (x-6)\ln x dx$
23	$\int \frac{x^3-2x^2-4}{x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x}}$	$\int (x+7)e^x dx$
24	$\int (3x^5+2x+\sqrt{x})dx$	$\int \sin(2x+5)dx$	$\int (2x+3)\ln x dx$
25	$\int \frac{2x^8-4x+2\sqrt{x}}{x}dx$	$\int \frac{dx}{2x+7}$	$\int (2x-4)e^x dx$
26	$\int (4x^6-x\sqrt{x}+7)dx$	$\int \cos(3x+7)dx$	$\int (x-4)\ln x dx$
27	$\int \frac{x^7-5x^2+7}{x}dx$	$\int \frac{dx}{6x-4}$	$\int (x+3)e^x dx$
28	$\int (x^6-x\sqrt{x}-7)dx$	$\int \cos(2x-5)dx$	$\int (x-7)\ln x dx$
29	$\int \frac{6x^3+4x^2-4}{x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x}}$	$\int (2x+4)e^x dx$
30	$\int (2x^9-3\sqrt{x}-2)dx$	$\int \sqrt{2x+3}dx$	$\int (2x+1)e^x dx$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, указанных в таблице 12.

Таблица 12

№	Функции	№	Функции	№	Функции
1	$y=x^2-x,\ y=3x$	11	$x^2=4y,\ x+y=3$	21	$4y=x^2,\ 2y-6x+x^2=0$
2	$y=x^2-2x+3,$ $y=3x-1$	12	$y^2=8x,$ $2x-3y+8=0$	22	$y=x^2-6x+9,$ $4x-y-12=0$
3	$y=1/3x^2-2x+4,\ y=10-x$	13	$y=x^2,\ y=3x+4$	23	$y=x^2,\ y=2-x^2$
4	$y=x,\ y=2x-x^2$	14	$y=x^2-2x+3,\ y=4-2x$	24	$y=x^2+4x,\ y=x+4$
5	$y=7x-2x^2,\ x+y=3.5$	15	$y=2-x,\ y=\sqrt{x}$	25	$y=x^2-6x+7,\ y=x+1$
6	$y=1-x^2,\ y=2-2x$	16	$y=x^3,\ y=2x,\ y=x$	26	$y=x^2-6x+7,\ y=-x+7$
7	$y=x^2,\ y=1+0.75x^2$	17	$y=0.5x^2,\ y=2-1.5x$	27	$y=-x^2+6x-5,\ y=x-5$
8	$y=x^2,\ y=2x-x^2$	18	$y=-x^2,\ y=x^2-2x-4$	28	$y=-x^2-6x-5,\ y=x+1$
9	$y=x^2-2x+2,\ y=2+4x-x^2$	19	$y=\sqrt{x},\ y=x-2$	29	$y^2=9x,\ y=x+25$
10	$y=x^{2+}2,\ y=1-x^2$	20	$y=-x^2,\ x+y+2=0$	30	$y=\frac{5}{x},\ y=6-x$

Задание 3. Найти объём тела вращения, полученного в результате вращения графиков вокруг указанной оси (таблица 13).

Таблица 13

№	Функции	Ось	№	Функции	Ось	№	Функции	Ось
1	$x^2=4y$, $x+y=3$	Ox	11	$4y=x^2$, $2y-6x+x^2=0$	Oy	21	$y=x^2-x$, $y=3x$	Oy
2	$y^2=8x$, $2x-3y+8=0$	Oy	12	$y=x^2-6x+9$, $4x-y-12=0$	Ox	22	$y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$	Oy
3	$y=x^2$, $y=3x+4$	Ox	13	$y=0.5x^2$, $y=2-1.5x$	Oy	23	$y=1/3x^2-2x+4$, $y=10-x$	Ox
4	$y=-x^2$, $x+y+2=0$	Oy	14	$y=x^2+4x$, $y=x+4$	Ox	24	$y=x$, $y=2x-x^2$	Oy
5	$y=2-x$, $y=\sqrt{x}$	Ox	15	$y=x^2-6x+7$, $y=x+1$	Oy	25	$y=7x-2x^2$, $x+y=3.5$	Oy
6	$y=x^3$, $y=2x$, $y=x$		16	$y=x^2-6x+7$, $y=-x+7$	Oy	26	$y=1-x^2$, $y=2-2x$	Ox
7	$y=x^2$, $y=2-x^2$	Ox	17	$y=-x^2+6x-5$, $y=x-5$	Oy	27	$y=x^2$, $y=1+0.75x^2$	Oy
8	$y=-x^2$, $y=x^2-2x-4$	Oy	18	$y=-x^2-6x-5$, $y=x+1$	Ox	28	$y=x^2$, $y=2x-x^2$	Oy
9	$y=\sqrt{x}$, $y=x-$ 2	Ox	19	$y^2=9x$, $y=x+25$	Oy	29	$y=x^{2+}2$, $y=1-x^2$	Ox
10	$y=x^2-2x+3$, $y=4-2x$	Oy	20	$y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$	Ox	30	$y=x^2-2x+2$, $y=2+4x-x^2$	Oy

Тема: «Числовые ряды»

Задание. Исследовать на сходимость следующие ряды

1) $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{m^t(at+b)}{p^t(bt-m)}$, 2) $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{t+k}{(at-b)^2}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mp^n}{q^n}$.

Параметры взять из таблицы 14.

Таблица 14

№	*a*	*b*	*k*	*m*	*p*	*q*
1.	4	-1	2	1	-3	2
2.	9	-1	3	1	-4	3
3.	16	-1	4	1	-5	4
4.	25	-1	5	1	-6	5
5.	4	1	2	-1	-1	-2
6.	9	1	3	-1	-2	-3
7.	16	1	4	-1	-3	-4
8.	**25**	1	5	-1	-4	-5
9.	4	-27	2	3	-5	6
10.	64	-8	8	2	-10	16
11.	16	-8	4	2	-6	8
12.	25	-8	5	2	-7	10
13.	9	8	3	-2	-1	-6
14.	16	8	4	-2	-2	-8
15.	25	8	5	-2	-3	-10

№	*a*	*b*	*k*	*m*	*p*	*q*
16.	4	27	2	-3	1	-6
17.	16	-27	4	3	-7	12
18.	16	27	4	-3	-1	-12
19.	25	-27	5	3	-8	15
20.	25	27	5	-3	-2	-15
21.	25	-64	5	4	-9	20
22.	25	64	5	-4	-1	-20
23.	4	1	-2	-1	3	2
24.	9	8	-3	-2	5	6
25.	16	27	-4	-3	7	12
26.	25	64	-5	-4	9	20
27.	9	64	-3	-4	7	12
28.	9	125	-3	-5	8	15
29.	4	64	-2	-4	6	8
30.	4	125	-2	-5	7	10

Тестовые задания

1. Предел функции обозначается:

а) $\int\limits_{x}^{x_0} f(x)$;   б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;   в) $\sum\limits_{x}^{x_0} f(x)$;   г) $f'(x)$.

2. Какого свойства предела не существует?

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

3. Функция $f(x)$ не является непрерывной, если

а) она непрерывна в точке x_0;

б) она определена в точке x_0;

в) она дифференцируема в точке x_0;

г) она не определена в точке x_0.

4. Предел $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x+5}{x^2-25}$ является неопределенностью вида

а) $\frac{0}{0}$;   б) $\frac{\infty}{\infty}$;   в) 1^∞;   г) $\frac{0}{\infty}$.

5. Производная функции обозначается

а) $\int\limits_{x}^{x_0} f(x)$;   б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;   в) $\sum\limits_{x}^{x_0} f(x)$;   г) $f'(x)$.

6. Какого правила дифференцирования не существует?

а) $(u+v)'=u'+v'$;

б) $(u\cdot v)'=u'\cdot v'$;

в) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

г) $(Cu)'=Cu'$.

7. Функция $f(x)$ является дифференцируемой, если

а) она непрерывна в точке x_0;

б) она определена в точке x_0;

в) она имеет производную в точке x_0;

г) она не определена в точке x_0.

8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^2-25}$ является неопределенностью вида

а) $\frac{0}{0}$;   б) $\frac{\infty}{\infty}$;   в) 1^∞;   г) $\frac{0}{\infty}$.

9. Для приближенного значения функций используется формула:

а) дифференциала;

б) предела;

в) производной;

г) частной производной.

10. Для исследования графика функции на выпуклость и вогнутость необходимо найти:

а) производную;

б) предел;

в) частную производную;

г) вторую производную.

11. Основной задачей интегрального исчисления является определение производной функции

а) да; б)нет.

12. Задача восстановления функции по ее производной решается однозначно

а) да; б)нет.

13. Операция интегрирования обратна операции дифференцирования

а) да; б)нет.

14. Графики любых двух первообразных для функции получаются друг от друга параллельным переносом вдоль оси Oy

а) да ; б)нет.

15. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке E, если на этом промежутке она имеет производную

а) да; б)нет.

16. Все первообразные функции $f(x)$ можно записать с помощью одной формулы, которую называют общим видом первообразных для функции $f(x)$.

а) да; б)нет.

17. Всякая функция имеет первообразную

а) да; б)нет.

18. Понятия производная и первообразная – синонимы

а) да; б)нет.

19. Если функция $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке E, то $F(x)$ – имеет производную во всех точках промежутка E.

а) да; б)нет.

20. Не возможно записать все первообразные данной функции.

а) да; б)нет.

21. Неопределенным интегралом называется

а) совокупность всех непрерывных функций;

б) совокупность всех первообразных функции;

в) совокупность всех производных функции.

22. Что из ниже перечисленного не является свойством неопределенного интеграла?

а) интеграл от суммы равен сумме интегралов;

б) постоянную можно выносить за знак интеграла;

в) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению;

г) интеграл от произведения равен произведению интегралов.

23. Какого метода интегрирования не существует?

а) стандартный метод;

б) метод интегрирования по частям;

в) метод замены переменной;

г) метод непосредственного интегрирования

24. Неопределенный интеграл $\int 2xdx$ равен

а) $2+C$; б) x^2+C ; в) x; г) $x+C$.

25. Какой метод необходимо применить для нахождения неопределенного интеграла $\int x^2 cosxdx$

а) метод непосредственного интегрирования;

б) метод интегрирования по частям;

в) уникальный метод интегрирования;

г) метод замены переменной.

26. Множество всех первообразных функции $y = 2x$ имеет вид:

а) 2; б) x^2; в) $x^2 + C$; г) $2x^2 + C$.

27. Установите, какие из данных функций являются первообразными для функции $f(x) = x^4$

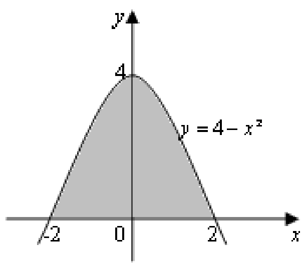
а) $F_1(x) = x^5$; б) $F_3(x) = 4x^3$; в) $F_5(x) = 4x^3 - 9$;

г) $F_2(x) = \dfrac{x^5}{5}$; д) $F_4(x) = \dfrac{x^5}{5} + 12$; е) $F_6(x) = x^5 + 10$.

28. Определенный интеграл $\int_1^2 4x^3dx$ равен:

а) 15; б) 17 ; в) 36 ; г) x^4.

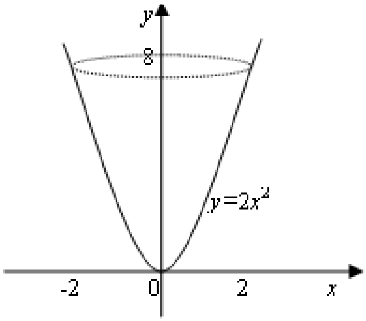
29. Площадь криволинейной трапеции определяется интегралом:



а) $\int_0^4 (4 - x^2)dx$; б) $\int_{-2}^0 (4 - x^2)dx$; в) $\int_0^2 (4 - x^2)dx$; г) $\int_{-2}^2 (4 - x^2)dx$.

30. Скорость материальной точки движущейся прямолинейно равна $v(t)=12-3t$. Путь, пройденный точкой от начала отсчета времени до остановки равен ...

31. Объем тела вращения



определяется по формуле:

а) $\pi\int_{-2}^{2}4x^4dx$; б) $\pi\int_{0}^{8}\frac{y}{2}dy$;

в) $\pi\int_{0}^{8}4x^4dy$; г) $\pi\int_{-2}^{2}2x^2dx$.

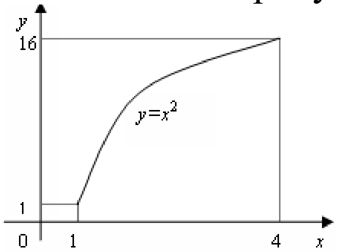
32. Функция $F(x)=x^3+C$ – первообразная для функции

а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=x^3+C$; в) $f(x)=3x^2$; г) $f(x)=x^2+3$.

33. Установите соответствие

1. геометрический смысл интеграла;	а. объем тела вращения;
2. экономический смысл интеграла;	б. координата центра масс;
3. физический смысл интеграла;	в. объем производимой продукции.

34. Длина дуги кривой, обозначенной на рисунке



определяется по формуле:

а) $\int_{1}^{4}\sqrt{1+4x^2}dx$; б) $\int_{1}^{4}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy$;

в) $\int_{1}^{16}\sqrt{1+4x^2}dx$; г) $\int_{1}^{16}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy$.

35. Основной задачей интегрального исчисления является

а) восстановление функции по ее первообразной;

б) определение производной функции;

в) восстановление функции по ее производной;

г) определение первообразной функции.

36. Четвертый член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ равен …

а) $\frac{1}{7}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $-\frac{1}{7}$; г) $-\frac{1}{9}$.

37. Относительно сходимости рядов: А) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots$ и

В) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ можно сделать следующий вывод

а) ряды А и В сходятся;
б) ряд А сходится, ряд В расходится;
в) ряды А и В расходятся;
г) ряд А расходится, ряд В сходится.

38. Если $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, то ряд Маклорена для функции $y=e^{2x}$ имеет вид …

а) $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots$;

б) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots$;

в) $2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)$;

г) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{x^n}{2^n\cdot n!}+\ldots$.

39. Установите соответствие между рядами и их названиями.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; а) знакоположительный;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; б) знакочередующийся;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+3}$; в) степенной.

40. В признаках сходимости числового ряда используются:

а) производные;
б) пределы;
в) интегралы;
г) дифференциалы.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

4.1 Предмет теории чисел. Делимость чисел

Исследование целых чисел всегда воспринималось учеными как безграничная область для научных изысканий, привлекая внимание величайших умов. Как отмечал И. Гаусс: «Эта особенность теории чисел вместе с неистощимым богатством её, которым она столь сильно превосходит другие отрасли математики, придаёт высшей арифметике неотразимое очарование, сделавшее её любимой наукой величайших математиков».

Теория чисел, или высшая арифметика – наука о числовых системах с их связями и законами, которая изучает числа с точки зрения их строения и внутренних связей, рассматривает возможности представления чисел через другие, более простые.

Теория чисел постоянно развивающаяся наука. Например, в еще Древней Греции было известно, что Пифагоровы числа (натуральные числа), удовлетворяющие условию $x^2+y^2=z^2$, вычисляются по формулам:

$$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2,$$

где $m,n \in N$, $m>n$ и одно из них четное, а другое нечетное.
Однако то, что уравнение великой теоремы Ферма $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ неразрешимо в натуральных числах, было доказано сравнительно недавно.

Теория чисел сыграла ключевую роль в эволюции математики. Это в первую очередь связано с расширением понятия числа, которое породило метод координат, аналитическую геометрию и математический анализ. Кроме того, измерение длин, площадей, объемов не только объединили геометрию и теорию чисел, но и привели к возникновению интегрального исчисления.

Современная теория чисел сильно отличается от элементарной (классической) теории чисел. Она делится на геометрическую теорию чисел, аналитическую теорию чисел, где применяются методы математического анализа, в частности, теория функций комплексного переменного, комбинаторную теорию чисел, алгебраическую теорию чисел. Для изучения разделов теории чисел используют методы геометрии, математического анализа, теории вероятностей и др.

Делимость целых чисел

Пусть $a, b \in Z$, $b \neq 0$. Говорят, что a делится на b, если существует $c \in Z$ такое, что

$$a=b\cdot c$$

Обозначают: $a \vdots b$.

Говорят также: b – делитель a, b делит a и обозначают: $b \mid a$. Данное обозначение используют, когда a кратно b.

Свойства делимости

1. Рефлексивность: $a \vdots a$, если a≠0.

Действительно, a=a·1

2. Транзитивность: если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Так как a=bq, b=cq_1, где q, q_1 – целые числа, откуда a=c(q_1q).

3. Если a≠0, то $0 \vdots a$.

4. Если a≠0 и $a \vdots b$, то $|a| \geq |b|$.

Имеем a=bq, q ϵ Z. Так как q≠0, то $|q|$ ϵ N, следовательно, $|q| \geq 1$. Умножим обе части неравенства на положительное число $|b|$, получим: $|bq| \geq |b|$, то есть $|a| \geq |b|$.

5. Если $1 \vdots b$, то b=±1

Следует из свойства 4.

6. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то a=±b.

Имеем a=bq, b=aq_1, где q, q_1 – целые числа. Подставим второе выражение в первое: a=a(q_1q), откуда q_1q=1, q=±1 и a=±b.

7. $a \vdots 1$ для любого целого a.

8. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

Имеем a=cq, b=cq_1, где q, q_1 – целые числа $(a \pm b) = c(q \pm q_1)$.

9. Если $a \vdots c$ и b ϵ Z, то $ab \vdots c$.

10. Если $a_1,\ a_2, \cdots, a_n \vdots c$ и $b_1,\ b, \cdots, b_n \in Z$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n) \vdots c.$$

Следует из свойств 9, 8.

11. Если $(a + b) \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

12. Если $(a + b) \vdots c$ и b не $\vdots c$, то a не $\vdots c$.

13. Если $a \vdots c$ и $b \vdots d$, то $(ab) \vdots cd$.

14. Если $a \vdots c$ и b ϵ N, то $(ab) \vdots cb$.

15. Если $(ab) \vdots cb$, то $a \vdots c$.

16. Если $a \vdots b$, то $\pm a \vdots (\pm b)$.

Теорема о делении с остатком. Для любого целого числа a и любого целого b≠0 существуют и единственные целые числа q и r, такие, что

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|.$$

Число q называют неполным частным, r – остатком.

Разложить на простые множители означает представить число в виде произведения простых множителей.

С данным понятием из школьного курса математики связано два понятия: НОД и НОК. Рассмотрим их.

НОД (наибольший общий делитель) – это наибольшее число, на которое заданные числа делятся без остатка.

Алгоритм нахождения НОД

1. Разложить заданные числа на простые множители.

2. Записать все простые множители, которые встречаются в каждом из полученных разложений, причем для каждого из них взять наименьшую степень, с которой данный множитель входит в разложение указанных чисел.

3. Вычислить из полученных множителей произведение.

НОК (наименьшее общее кратное) – это наименьшее число, которое делится на каждое из заданных чисел.

Алгоритм нахождения НОК

1. Разложить заданные числа на простые множители.

2. Записать все простые множители первого числа, дополняя теми простыми множителями, которые есть во втором числе, но отсутствуют в первом. Каждое из простых чисел берется с максимальным значением степени, с которой оно встречается в разложениях обоих чисел.

3. Сформировать произведение из всех собранных множителей и вычислить его.

4.2. Понятие сравнения

Предпосылкой к созданию теории сравнений послужило восстановление трудов Диофанта, выпущенных в оригинале и с латинским переводом при содействии Баше де Мезириаку в 1621 году. Изучение этих работ привело к открытиям Ферма, которые существенно опередили его эпоху. В частности, в письме к Френиклю де Бесси 18 октября 1640 года он без доказательства привел теорему, которая впоследствии получила название малая теорема Ферма.

Сравнение двух целых чисел по модулю натурального числа m представляет собой математическую операцию, позволяющую узнать, имеют ли два выбранных числа одинаковый остаток при делении на m. Каждое целое число при делении на m дает один из m возможных остатков: от 0 до m-1. Это означает, что все целые числа можно разделить на m групп, где каждая группа соответствует определенному остатку от деления на m.

Арифметические операции с остатками по фиксированному модулю составляют модульную арифметику, которая находит широкое применение в таких областях, как математика, информатика и криптография.

Если два целых числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки, то они называются *сравнимыми* (или *равноостаточными*) *по модулю числа m*.

Сравнимость чисел a и b записывается в виде формулы:

$$a \equiv b \pmod m.$$

Число m называется *модулем сравнения*.

Например, $8 \equiv 5 (mod\ 3)$.

Иногда b называют *вычетом a по модулю m, a – конгруэнтным b по модулю m.*

Определение сравнимости чисел a и b по модулю m равносильно любому из следующих утверждений:

- разность чисел a и b делится на m без остатка;
- число a может быть представлено в виде $a=b+k*m$, где k – некоторое целое число.

Рассмотрим свойства функции сравнения.

Свойства сравнений не зависящие от модуля

1. Отношение сравнения $a \equiv b \pmod m$ является отношением эквивалентности, т. е. удовлетворяет требованиям:

- рефлексивности: $a \equiv a \pmod m$;
- симметричности: если $a \equiv b \pmod m$, то и $b \equiv a \pmod m$;
- транзитивности: если $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

2. Сравнения по одинаковому модулю можно почленно складывать:

$$a_1 \equiv b_1 (mod\ m),\ a_2 \equiv b_2 (mod\ m) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv (b_1 + b_2)(mod\ m).$$

3. Два сравнения по одному и тому же модулю можно почленно вычитать одно из другого, т.е. если $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, то

$$a-c \equiv b-d \pmod m.$$

4. К обеим частям сравнения можно прибавить одно и то же целое число (следствие свойств 1, 2, 3).

5. Сравнения по одинаковому модулю можно почленно перемножать:

$$a_1 \equiv b_1 (mod\ m),\ a_2 \equiv b_2 (mod\ m) \Rightarrow a_1 a_2 \equiv (b_1 b_2)(mod\ m).$$

6. Обе части сравнения можно умножать на одно и то же целое число.

7. Обе части сравнения можно возвести в одну и ту же степень.

8. Слагаемое, стоящее в какой-либо части сравнения, можно переносить в другую часть, изменив его знак на противоположный:

$$a + b \equiv c (mod\ m) \Rightarrow a \equiv (c - b)(mod\ m).$$

Свойства сравнений, зависящие от модуля

1. К любой части сравнения можно прибавить любое число, кратное модулю:

$$a \equiv b (mod\ m) \Rightarrow a + mk \equiv b (mod\ m).$$

2. Если $a_0 \equiv b_0 (mod\ m)$, $a_1 \equiv b_1 (mod\ m), \ldots,$ $a_n \equiv b_n (mod\ m)$, и $x \equiv y (mod\ m) \Rightarrow$, то

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n)(mod\ m).$$

3. Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, взаимно простой с модулем.

4. Обе части сравнения и его модуль можно умножить на одно и то же целое число или разделить на их общий делитель.

5. Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким разным модулям, то оно имеет место и по модулю, равному наименьшему общему кратному этих модулей.

6. Если сравнение имеет место по модулю m, то оно имеет место и по модулю d, равному любому делителю числа m.

7. Если одна часть сравнения и модуль делятся на некоторое число, то и другая часть сравнения должна делиться на то же число.

Числа, сравнимые по модулю m, образуют *класс вычетов по модулю* m. Все числа из одного и того же класса имеют один и тот же остаток r от деления на m. Любое число a из класса вычетов называется вычетом по модулю m.

Всего имеется m классов вычетов по модулю m. Если классы обозначать как $\bar{a}$, то для модуля m имеются следующие классы: $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}$.

Существует два варианта системы вычетов.

Полная система вычетов – это совокупность вычетов, взятых по одному из каждого класса эквивалентности.

Приведенная система вычетов по модулю m – это совокупность всех вычетов из полной системы, взаимно простых с модулем m.

Свойства классов вычетов:

1. $a \equiv b (mod\ m) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.
2. $a \not\equiv b (mod\ m) \Leftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$.
3. Любые m чисел попарно не сравнимые по модулю m образуют полную систему вычетов.

Если $НОД(a, m) = 1$ и x «перебирает» полную систему вычетов по модулю m, то $ax + b$, где b – любое число, также пробегает полную систему вычетов по модулю m.

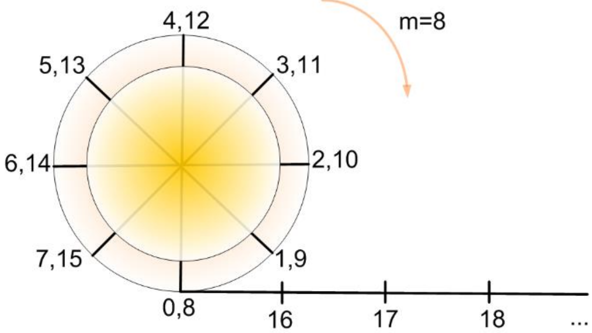


Рисунок 39 – Иллюстрация к образованию классов вычетов по модулю 8

Например, на рисунке 39 изображен процесс «наматывания» цепочки целых чисел на колечко с $m = 8$ делениями, при этом на одно деление автоматически попадают сравнимые между собой числа.

Существуют *8* классов вычетов по модулю $m = 8$. В каждом классе находятся числа, дающие при делении на m одинаковые остатки:

Члены класса	0,8,16, …	1,9,17, …	2,10,15, …	3,11,19, …	4,12,20, …	5,13,21, …	6,14,22, …	7,15,23, …
Название класса	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$

Например, одна из полных систем вычетов по модулю *8*:

$$1200, 33, 42, 3, 12, 629, 22, 807.$$

Приведенная система вычетов: $0, 1, 3, 5, 7$.

Функция Эйлера

Количество классов вычетов в приведенной системе вычетов минус один обозначают как $\varphi(m)$ и называют функцией Эйлера. Она представляет собой количество чисел ряда $1, 2, ..., m-1$ взаимно простых с m. Например, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$. Кроме того, $\varphi(1) = 1$.

Свойства функции Эйлера:

1. Если p – простое, то $\varphi(p) = p - 1$.
2. Если p – простое, то $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
3. Мультипликативность функции Эйлера: если $НОД(a, b) = 1 \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Теорема Эйлера. Пусть $m > 1$, $НОД(a, m) = 1$, $\varphi(m)$ – функция Эйлера. Тогда: $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\ m)$.

Например, $m = 6, a = 11$, $\varphi(6) = 2 \Rightarrow 11^2 = 121 \equiv 1(mod\ 6)$.

Теорема Ферма. Если $НОД(a, p) = 1$, p – простое, то $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$.

Следствие из теоремы Ферма: $a^p \equiv a(mod\ p)$, где не обязательно $НОД(a, p) = 1$, но p – простое.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Даны три числа 78, 210, 346. Сравнимы ли они с 5 по mod 11?

Решение. Вычитаем из данных чисел 5. Получим 73, 205, 341. Из них только 341 делится на 11, т.е. $346 \equiv 5(mod\ 11)$.

Пример 2. Дана система чисел (9, 2, 16, 20, 27, 39, 46, 85). Образуют ли они полную систему вычетов по mod 8?

Решение. По определению в полную систему чисел по mod m входит m чисел, дающих при делении на m остатки 0, 1, 2, 3, ..., m-1. Остатки при делении данной совокупности чисел на 8 будут: 1, 2, 0, 4, 3, 7, 6, 5. Следовательно, данную совокупность можно рассматривать как полную систему вычетов по mod 8.

Пример 3. Дана полная система вычетов по mod 8: 9, 2, 16, 20, 27, 39, 46, 85. Выбрать из них числа, которые входят в приведенную систему вычетов по mod 8.

Решение. В соответствии с определением из данной системы надо выбрать все числа, взаимно простые с модулем. Приведенная система по mod 8 будет: 9, 27, 39, 85. Заметим, что приведенная система вычетов по mod m содержит φ(m) чисел. В нашем случае φ (8) = 4.

Пример 4. Девятая степень однозначного числа п оканчивается цифрой 7. Найти это число.

Решение. Так как девятая степень числа *n* оканчивается цифрой 7, то остаток от деления числа n^9 на 10 равен 7. Это равносильно сравнению n≡ 7(mod 10). Но НОД(7,10) =1, следовательно, НОД $(n, 10) = 1$. Тогда по теореме Эйлера

$$n^{\varphi(10)} \equiv 1(mod 10),$$

но $\varphi(10) = 4,$ т.е $n^4 \equiv 1(mod 10)$. Но n – однозначное число, следовательно, *n*= 7.

Пример 5. Найти остаток от деления на 7 числа

$$2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18}$$

Решение. По малой теореме Ферма, если $\text{НОД}(\text{a}, \text{p}) = 1$, где p – простое число, то $\alpha^{\rho-1} \equiv 1(mod\ \rho)$.

Числа 2, 3, 4, 5, 6 взаимно просты с числом 7.

Тогда $\alpha^6 \equiv 1(mod\ 7)$, где α= 1, 2, 3, 4, 5, 6. Возведя каждое сравнение в куб, получим:

$$\alpha^{18} \equiv 1(mod\ 7) \tag{1}$$

Складывая почленно сравнения вида (1) при α = 1, 2, 3, 4, 5, 6, имеем:

$$2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18} \equiv 5 \equiv -2(mod 7).$$

Итак, остаток равен 5 или -2.

Пример 6. Найти остаток от деления числа 7^{402} на 101.

Решение. 101 – простое число и $\text{НОД}(7,100) = 1$, поэтому по малой теореме Ферма имеем $7^{100} \equiv 1(mod 101)$.

Возведя обе части сравнения в 4-ую степень, получим:

$$7^{400} \equiv 1(mod\ \ 101).$$

Кроме того, $7^2 \equiv 49(mod101)$.

Перемножим эти сравнения, тогда $7^{402} \equiv 49(mod101)$.

Отсюда следует, что искомый остаток равен 49.

Пример 7. Вывести признак делимости в десятичной системе счисления на 4.

Решение. Запишем натуральное число *N* в десятичной системе счисления:

$$N = \alpha_n 10^n + \alpha_{n-1}10^{n-1} + \cdots + \alpha_1 10 + \alpha_0,$$

где α_i, – цифры числа *N* в 10-й системе счисления, т.е.$\alpha \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$.

Заменим степени 10 наименьшими неотрицательными вычетами по mod4.

$$\alpha_0 \equiv \alpha_0(mod4)$$
$$10 \equiv 2(mod4)$$
$$10^2 \equiv 0(mod4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10^2 \equiv 0(mod4)$$

Умножая второе сравнение на α_1третье на α_2,…, n-е на α_n, имеем:

$$\alpha_0 \equiv \alpha_0(mod4)\ ,$$
$$10\alpha_1 \equiv 2\alpha_2(nod4),$$
$$10^2\alpha_2 \equiv 0(mod4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10^n \alpha_n \equiv 0(mod\ 4),$$

Складывая полученные сравнения, будем иметь:

$N = 10^n a_n + 10^{\alpha-1} a_{n-1} - +\ldots + 10a_1 + a_0 \equiv 2a_1 + a_0\ (mod\ 4)$.

Отсюда признак делимости натурального числа *N* на 4 в десятичной системе счисления: число *N* делится на 4 тогда и только тогда, когда сумма последней цифры числа и удвоенной предпоследней делится на 4.

Пример 8. Доказать, что $1^{18} + 2^{18} + \ldots + 6^{18} \equiv 6(mod\ 7)$.

Решение. $НОД(1,7) = 1,\ НОД(2,7) = 1, \ldots, НОД(6,7) = 1.$ $p = 7$ – простое.

По теореме Ферма: $a^{7-1} \equiv 1(mod\ 7)$, где $a = 1,2,\ldots,6$.

Получаем систему:

$1^6 \equiv 1(mod\ 7)$

$2^6 \equiv 1(mod\ 7)$

$\ldots$

$6^6 \equiv 1(mod\ 7)$

Возводим каждое сравнение почленно в третью степень и складываем: $1^{18} + 2^{18} + \ldots + 6^{18} \equiv 6(mod\ 7)$. Что и требовалось доказать.

Пример 9. Найти две последние цифры числа 243^{402}.

Решение. Две последние цифры числа – это остаток от деления на *100*. $243(mod\ 100) = (200 + 43)(mod\ 100) = 43(mod\ 100)$, значит:

$$243^{402}(mod\ 100) = 43^{402}(mod\ 100).$$

Так как $НОД(43{,}100) = 1$, по теореме Эйлера $43^{\varphi(100)} \equiv 1(mod\ 100)$. $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2)$, *2* и *5* простые числа, значит: $\varphi(100) = (2^2 - 2^1) \cdot (5^2 - 5^1) = 40$. Тогда: $43^{40} \equiv 1(mod\ 100)$; возведем в *100* степень и умножим на $43^2 \equiv 49(mod\ 100)$: $43^{402} \equiv 49(mod\ 100)$.

Значит, последние две цифры *4* и *9*.

Пример 10. Показать, что $73^{12} - 1$ делится на *105*.

Решение. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $НОД(73{,}3) = НОД(73{,}5) = НОД(73{,}7) = 1$.

По теореме Ферма:

$$73^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3) = 1(\mathrm{mod}\,105)$$

$$73^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5) = 1(\mathrm{mod}\,105).$$

$$73^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7) = 1(\mathrm{mod}\,105)$$

Умножим эти сравнения и вычтем $1 \equiv 1(mod\ 105)$:

$$73^{12} - 1 \equiv 1 - 1(mod\ 105) = 0(mod\ 105).$$

Пример 11. Найти вычет числа $2^{5432675}$ по $mod\ 13$.

Решение. Разделим степень на $p - 1 = 13 - 1$ с остатком $k = q(p - 1) + r = 452722 \cdot 12 + 11$;

$a^k(mod\ p) = a^{q(p-1)+r}(mod\ p) = \left(a^{p-1}\right)^q a^r(mod\ p) = \left(a^{p-1}\right)^q(mod\ p) \cdot a^r(mod\ p)$. По теореме Ферма (так как p – простое): $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$.

Тогда $a^k(mod\ p) = 1(mod\ p) \cdot a^r(mod\ p) = a^r(mod\ p)$. Значит, $2^{5432675}(mod\ 13) \equiv 2^{11}(mod\ 13) = 7(mod\ 13)$.

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Среди чисел 216, 134, 214, 303, 21 найти все пары чисел, сравнимых между собой по mod 15.
2. Среди чисел 217, 42, 182, 241 найти все пары чисел, сравнимых между собой по mod 12.
3. Привести примеры целых чисел, сравнимых по mod8.
4. Какие из следующих сравнений являются верными:

а) $1 \equiv -5(mod\ 6)$, б) $246 \equiv 0(mod\ 13)$,

в) $2^3 \equiv 0(mod4)$, г) $3m \equiv -1(mod\ m)$?

5. Написать полную систему наименьших по абсолютной величине, наименьших положительных, наименьших неотрицательных вычетов по модулям: а) 11, б) 12, в) 15.

6. Написать приведенную систему наименьших положительных, наименьших по абсолютной величине вычетов по модулям: а) 11, б) 12, в) 15.

7. Найти наименьшие положительные, наименьшие неотрицательные, абсолютно наименьшие вычеты чисел:

а) 115, 131, 57, 48, 83 по mod9;

б) 108, 131, 201, 75, 83 по mod10.

8. Доказать, что система чисел 20, 31, -8, -5, 25, 14, 8, -1, 13,6 не является полной системой вычетов по mod10.

9. По какому модулю числа 220, -4, 22, 18, -1 составляют полную систему вычетов?

10. Почему система чисел -5, 13, 11, -21, 5 не является приведенной системой вычетов по mod12.

11. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа:

а) 103, б) 144, в) 152, г) 160 и взаимно простых с ними.

12. Найти число классов вычетов, взаимно простых с mod100.

13. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 126? Со знаменателем m?

14. Решить сравнение $\varphi(m) = 360$, где $m = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma}$.

15. Найти остаток от деления на 13 числа $25^{1427} + 27^{2485}$.

16. Найти последнюю цифру числа 23^{247}.

17. Найти остаток от деления 17^{121} на 35.

Контрольные вопросы

1. Когда два числа a и b сравнимы между собой по mod m?
2. Сформулируйте основные свойства сравнений.
3. В чем состоит необходимое и достаточное условие того, что два числа a и b принадлежали одному классу по mod m?
4. Что называется полной системой вычетов?
5. Что называется приведенной системой вычетов по mod m?
6. Дайте определение функции Эйлера. Какими свойствами она обладает?
7. Сформулируйте теорему Ферма.

4.3. Сравнения с неизвестной величиной

Рассмотрим сравнение с неизвестной величиной x:

$$ax \equiv b(mod\ m) \qquad (1)$$

Под *решением сравнения* понимается класс вычетов по модулю m, один элемент которого удовлетворяет данному сравнению.

Решить сравнение – значит найти все x, которые удовлетворяют данному сравнению, при этом весь класс вычетов по модулю m считается за одно решение.

Например, для сравнения пятой степени: $x^5 + x + 1 \equiv 0(mod\ 7)$ класс вычетов для $m = 7$: $\overline{0,6}$. Данному сравнению удовлетворяют:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4,$$

так как $35 \equiv 0(mod\ 7)$ и $1029 \equiv 0(mod\ 7)$.

Таким образом у данного сравнения есть два решения: $x_1 \equiv 2(mod\ 7)$ и $x_2 \equiv 4(mod\ 7)$.

Естественно, метод перебора затруднителен. В случае сравнения первой степени, если $НОД(a, m) = 1$, решение означает отыскание целых u, v таких, что: $au + mv = 1$, то есть $au \equiv 1(mod\ m)$, где u – это обратный к a по модулю m элемент.

Умножим (1) на u:

$$aux \equiv bu(\mathrm{mod}\, m).$$

С учетом $au \equiv 1(mod\ m)$ получаем:.

$$x \equiv bu(mod\ m) \qquad (2)$$

Значит, сравнение первой степени имеет одно решение по модулю m.

Теорема. Если НОД(a, m) = 1, то сравнение (1) имеет решение и притом единственное.

Если же $НОД(a, m) = d$, то для решения сравнения (1) необходимо, чтобы d делил b без остатка. При этом сравнение будет иметь d решений:

$$x_1,\ x_1 + m,\ ...,\ x_1 + (d - 1)m\ .$$

Например, для решения сравнения $111x = 75(mod\ 321)$ определяем $НОД(a, m) = НОД(111,321) = 3$. Так как он равен трем, то имеется три решения сравнения.

Рассмотрим основные *методы решения сравнений.*

1. Метод подбора

Чтобы решить сравнение необходимо составить полную систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю m. Затем каждое число из получившейся системы чисел подставить в сравнение и выявить верное, либо проверить каждый вычет на сравнение по модулю.

Например, для сравнения $7x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 13)$ полная система наименьших неотрицательных вычетов по модулю 13 имеет вид: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Имеем: $x\equiv 4(\mathrm{mod}\ 13)$. Следовательно, решением данного сравнения является класс вычетов $\overline{4}$ по модулю 13.

2. Способ Эйлера

Теорема. Пусть $m > 1$, $НОД(a, m) = 1$. Тогда сравнение (1) имеет решение (2), где $u = a^{\varphi(m)-1}$.

Например, необходимо решить сравнение $7x \equiv 3(mod\ 10)$. Определяем НОД: $НОД(7,10) = 1$, тогда функция Эйлера $\varphi(10) = 4$. Значит:

$$x = 3 \cdot 7^3(mod\ 10) = 1029(mod\ 10) = 9(mod\ 10).$$

Недостатком этого метода является то, что необходимо возводить a в степень.

Замечание. Метод проб и метод Эйлера нельзя отнести к рациональным методам решения сравнений.

3. Решение сравнений по определению

Представляется сравнение в виде разности чисел a и b, приравненной к модулю m. Затем решается уравнение первой степени и определяется неизвестная.

Например, для решения сравнения $20x\equiv 13(\mathrm{mod}\ 7)$ представим в виде уравнения: $20x-13=7$, откуда $20x=20$ и $x=1$.

Замечание. Данный метод не всегда применим, так как он не всегда приводит к уравнению в целых числах.

4. Метод алгоритма Евклида

Алгоритм Евклида применяется при небольших m для нахождения u: $au \equiv 1(mod\ m)$. Данный метод основан на алгоритме Евклида для нахождения наибольшего общего делителя $НОД(a, b)$. Рассмотрим его.

Выполним следующие деление с остатком:

$$a = bq_1 + r_1, 0 \le r_1 < b$$
$$b = r_1q_2 + r_2, 0 \le r_2 < r_1$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \le r_3 < r_2$$
$$\dots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, 0 \le r_n < r_{n-1}$$
$$n_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

Тогда $НОД(a, b) = НОД(b, r_1) = НОД(r_1, r_2) = \dots = r_n$, т.е. $НОД(a, b)$ равен последнему отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида.

Например, для поиска $НОД(1234{,}54)$ выполняется следующая последовательность действий:

$$
\begin{aligned}
1234 &= 54 \cdot 22 + 46\\
54 &= 46 \cdot 1 + 8\\
46 &= 8 \cdot 5 + 6\\
8 &= 6 \cdot 1 + 2\\
6 &= 2 \cdot 3 + 0
\end{aligned}
$$

Значит, $НОД(1234{,}54) = 2$.

Если необходимо найти линейное разложение НОД'а: $r_n = au + bv$, то нужно остатки r_i выражать друг через друга:

$$
\begin{aligned}
&r_n = 2 = 8 - 6 = 8 - (46 - 8 \cdot 5) = (54 - 46) - (46 - (54 - 46) \cdot 5) =\\
&= (\underline{54} - [\overline{1234} - \underline{54} \cdot 22]) - ([\overline{1234} - \underline{54} \cdot 22] - (\underline{54} - [\overline{1234} - \underline{54} \cdot 22]) \cdot 5) =\\
&= -7 \cdot 1234 + 160 \cdot 54
\end{aligned}
$$

При решении сравнений по данному методу необходимо получить последний неделимый остаток, а затем по формуле (2) получить решение.

Например, необходимо решить сравнение $111x \equiv 75(mod\ 322)$. Определим НОД: $НОД(111{,}322) = 1$. Найдем линейное разложение НОД'а: $au + mv = 1$:

$$
\begin{aligned}
322 &= 111 \cdot 2 + 100\\
111 &= 100 \cdot 1 + 11\\
100 &= 11 \cdot 9 + 1\\
11 &= 1 \cdot 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_n = 1 = 100 - 11 \cdot 9 = 100 - (111 - 100) \cdot 9 =\\
&= [\overline{322} - \underline{111} \cdot 2] - (\underline{111} - [\overline{322} - \underline{111} \cdot 2]) \cdot 9 =\\
&= 10 \cdot 322 - 29 \cdot 111
\end{aligned}
$$

Значит, $v = 10,\ u = -29$. По формуле (2):

$$x \equiv 75 \cdot (-32)(mod\ 322) = -2175(mod\ 322) = 79(mod\ 322).$$

Проверим, действительно ли так: $111 \cdot 79\ mod\ 322 = 79$.

5. Метод цепных дробей

Разложим $\frac{m}{a}$ в непрерывную дробь и обозначим ее подходящие дроби через $\frac{p_k}{q_k}$, $k = 1,2, \ldots, n$. Тогда, согласно свойству несократимости подходящих дробей, получим $p_k = m$, $q_k = a$. Поэтому вместо соотношения

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

имеем

$$m q_{k-1} - p_{k-1} a = (-1)^k .$$

Отсюда

$$ap_{k-1} = -(-1)^k + mq_{k-1}$$

т.к. q_{k-1} – целое число, то

$$ap_{k-1} \equiv (-1)^{k-1}\ (mod\ m).$$

Умножая обе части этого сравнения на $(-1)^{k-1}\ b$, получим

$$a((-1)^{k-1}\ b \cdot p_{k-1}) \equiv b(mod\ m).$$

Сравнивая это сравнение с исходным, приходим к выводу, что оно имеет решение

$$x \equiv (-1)^{k-1} \cdot b \cdot p_{k-1}\,(mod\ m), \qquad (3)$$

где p_{k-1} – числитель предпоследней дроби в разложении.

Таким образом, класс вычетов $x \equiv (-1)^k \cdot p_{k-1} \cdot b\ (mod\ m)$ является решением исходного сравнения.

Рассмотрим применение данного алгоритма на примере:

221x = 111 (mod360).

Так как НОД(221,360) = 1, то сравнение имеет единственное решение. Найдём его по формуле (3).

Итак, в нашем случае $\frac{m}{a} = \frac{360}{221}$ = (1,1,1,1,2,3,1,1,3). Найдём числитель предпоследней подходящей дроби, воспользовавшись таблицей:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
q_k	1	1	1	1	2	3	1	1	3
p_k	1	2	3	5	13	44	57	101	360

Отсюда, n = 8, P_{n-1} = 101. Применяя формулу (3), найдём:

x= $(-1)^8 * 101 * 111$ (mod360),

или x = 51 (mod360).

Системы сравнений

Системой сравнений первой степени с одним неизвестным называется система вида:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x \equiv c_1\ (mod\ m_1) \\ a_2 \cdot x \equiv c_2\ (mod\ m_2) \\ \qquad \dots \\ a_n \cdot x \equiv c_n\ (mod\ m_n) \end{cases}$$

Предположим, что каждое из этих сравнений имеет решение. Тогда, разрешив каждое сравнение относительно x, систему сравнений можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} x \equiv c_1\ (mod\ m_1) \\ x \equiv c_2\ (mod\ m_2) \\ \qquad \dots \\ x \equiv c_n\ (mod\ m_n) \end{cases}$$

С понятием систем сравнений связана Китайская теорема об остатках. Она представляет собой важное положение в теории чисел, которое позволяет эффективно решать системы линейных диофантовых уравнений с несколькими переменными. Фактически, эта теорема касается систем уравнений с остатками.

Арифметическая формулировка данной теоремы была впервые представлена в работе китайского математика Сунь Цзы под названием «Сунь Цзы Суань Цзин», датированной, вероятно, III веком н.э.

Китайская теорема об остатках. Пусть m_1, $m_2, \ldots,$ m_n – натуральные попарно взаимно простые числа, тогда система сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\, m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\, m_2) \\ \qquad \cdots \\ x \equiv a_n \ (mod\, m_n) \end{cases}$$

всегда разрешима и ее решение единственно по модулю $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Эта теорема утверждает существование однозначной связи между числом и множеством его остатков, которые определяются набором взаимно простых чисел. Это упрощает работу, позволяя оперировать не с большими числами, а с их остатками. Также расчеты по каждому модулю можно проводить одновременно. Например, если использовать первые 500 простых чисел, каждое из которых занимает не более 12 бит, этого будет достаточно для представления чисел длиной до 1519 десятичных знаков, так как сумма логарифмов этих простых чисел дает 1519,746.

<u>Решение типовых примеров и задач</u>

Пример 1. Решить сравнения:

а) $5x = 2 \ (mod 8)$, б) $7x = 2 (mod 13)$.

Решение.

а) Так как (5,8) = 1, то сравнение имеет единственное решение. Найдем его по формуле Эйлера: $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} (nodm)$. Тогда

$x \equiv 2 \cdot 5^{\varphi(8)-1} (mod 8)$,

$x \equiv 2 \cdot 5^3 \equiv 2 (mod 8)$.

Ответ: $x \equiv 2 (mod 8)$.

б) Так как $(7,13) = 1$, то сравнение $7\text{x} = 2(mod 13)$ имеет единственное решение.

Найдем его методом проб. Для этого испытаем полную систему наименьших положительных (или по абсолютной величине) вычетов.

При x = 4 получим $7 \cdot 4 \equiv 2(mod13)$. Следовательно, решением будет класс чисел x $\equiv 4\ (mod13)$.

Ответ: x $\equiv 4\ (mod13)$.

В ряде случаев результат может быть получен быстрее, если использовать искусственный прием, основанный на следующем свойстве сравнения: к одной части сравнения можно прибавить число, кратное модулю.

Поясним это на примерах.

а) $5x \equiv 2(mod8)$. Прибавим к правой части сравнения число 8, равное модулю, получим $5x \equiv 10(mod8)$. Деля обе части на 5, получим

$$x \equiv 2(mod8).$$

б) $7x \equiv 2(mod13)$. Прибавим к правой части число $26 = 13 * 2$, имеем $7x \equiv 28(mod\ 13)$. Так как $(7{,}13) = 1$, то сократив обе части на 7, получим $x \equiv 4(mod\ 13)$.

Пример 2. Решить сравнение $12x \equiv 28(mod\ 52)$.

Решение. Так как $(12{,}52) = 4$ и $28 \vdots 4$, то данное сравнение имеет 4 решения. Сокращая обе части сравнения и модуль на 4, будем иметь

$$3x = 7\ (\mathrm{mod}13).$$

Полученное сравнение имеет единственное решение. Для нахождения его прибавим к правой части -13. Будем иметь:

$$3x \equiv 7 - 13 = -6, \text{ Т.е. } 3x \equiv 6(mod13).$$

Сократим обе части сравнения на 3, получим $x \equiv 2(mod\ 13)$.

Следовательно, данное сравнение имеет следующие решения:

$$x \equiv -2\ (mod\ 52),$$
$$x \equiv 11(mod\ 52),$$
$$x \equiv 24(mod\ 52),$$
$$x \equiv 37(mod\ 52).$$

Пример 3. Решить сравнение $111x \equiv 75(mod\ 321)$.

Решение. $НОД(111{,}321) = 3$, следовательно, сравнение имеет три решения. Сократим исходное сравнение, получим: $37x = 25(mod\ 107)$. Решим по Алгоритму Евклида. Найдем линейное разложение НОД'а: $au + mv = 1$:

$107 = 37 \cdot 2 + 33$

$37 = 33 \cdot 1 + 4$

$33 = 4 \cdot 8 + 1$

$4 = 4 \cdot 1$

$r_n = 1 = 33 - 4 \cdot 8 = 33 - [37 - 33] \cdot 8 = (\overline{107} - \underline{37} \cdot 2) - [\underline{37} - (\overline{107} - \underline{37} \cdot 2)] \cdot 8 =$
$= 9 \cdot 107 - 26 \cdot 37$

Значит, $u = -26,\ v = 9$.

Тогда получим, что $x_1 \equiv -26 \cdot 25(mod\ 107) = 99(mod\ 107)$.

Исходное решение: $x_1 \equiv 99(\mathrm{mod}\,321), x_2 \equiv (99+107)(\mathrm{mod}\,321) = 206(\mathrm{mod}\,321),$
$x_3 \equiv (99 + 2\cdot 107)(\mathrm{mod}\,321) = 313(\mathrm{mod}\,321)$

Пример 4. Разложить рациональное число $\frac{53}{21}$ в цепную дробь; составить таблицу ее подходящих дробей. Найти подходящую дробь второго порядка.

Решение. Найдем неполные частные

$$\begin{array}{r|l} 53 & 21 \\ 42 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 11 \\ 11 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ 10 & 10 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Следовательно, $\frac{53}{21}$ = [2,1,1,10] – разложение данного рационального числа в конечную цепную дробь.

Для ответа на 2-ой вопрос составим таблицу

S	0	1	2	3
q_s	2	1	1	10
p_s	2	3	5	53
Q_S	1	1	2	21

В таблице s означает порядок подходящей дроби; q_S – неполные частные; p_S, Q_s – соответственно числитель и знаменатель подходящей дроби порядка s. При этом $p_0 = q_0, Q_0 = 1$. Вычисления осуществляются по формулам:

$$p_k = p_{k-1} * Q_k + p_{k-2}, Q_k = Q_{k-1} * q_k + Q_{k-2}$$

Из таблицы следует, что $\frac{P_2}{Q_z} = \frac{5}{2}$.

Пример 5. Решить сравнение 23x = 17 (mod 71).

Решение. НОД(23,71) = 1, поэтому сравнение имеет единственное решение. Найдем его с помощью цепных дробей по формуле:

$$X = (-1^n)p_{n-_1}b \text{ (mod m)},$$

где $\frac{m}{a} = \frac{p_n}{Q_1}$. Разложим в цепную дробь число $\frac{m}{a} = \frac{71}{23}$, получим что $\frac{M}{a} = [3,11,2]$.

Составим таблицу значений числителя p_5 подходящих дробей:

S	0	1	2
q_s	3	11	2
p_s	3	34	71

Таким образом, имеем x = $(-1)^2$ * 34*17 ≡ 10 (mod 71).

Пример 6. Решить неопределенное уравнение 23x+91y = 2.

Решение. Так как НОД(23,91) = 1, то уравнение имеет решение в целых числах. Запишем его в виде

$$91y-2=-23x,$$

откуда,

$$91y \equiv 2(\mathrm{mod}23).$$

Прибавляя к левой части сравнения число 92y, кратное модулю, получим

$$-y\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 23),$$

откуда

$$y\equiv -2(\mathrm{mod}23), \text{ или } y=23t-2,\ t\in z.$$

Подставляя значение *y* в данное уравнение, находим, что x=8-91t, t∈z.

Итак, общее решение уравнения:

$$x=8-9t,$$
$$y=23t-2.$$

Пример 7. Разложить дробь $\frac{58}{77}$ на сумму или разность 2-х дробей соответственно со знаменателем 7 и 11.

Решение. Из условия получаем: $\frac{x}{y}+\frac{y}{11}=\frac{58}{77}$, откуда 11x+7=58. Т.к. НОД(11,7) = 1, то уравнение имеет решение в целых числах. Приведем его к сравнению:

$$11x \equiv 58 \ (\mathrm{mod}\ 7).$$

Последовательно имеем:

$$4x\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$4x\equiv 16 \ (\mathrm{mod}7)$$
$$x\equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 7), \text{ или } x=4+74, ,\ t\in z.$$

Далее из заданного уравнения имеем:

$$y=\frac{58-11*4}{7}= 11t,$$

откуда

$$y= 2- 11t,\ t\in z.$$

Окончательно

$$\frac{58}{77}=\frac{4}{2}+\frac{2}{11}.$$

Задачи для работы в аудитории и самостоятельного решения

1. Решить сравнения:

а) $3x \equiv 4(mod 7)$, б) $12x \equiv 7(mod 13)$,
в) $21x \equiv 33(mod\, 45)$, г) $7x \equiv 11(mod 15)$,
д) $3x \equiv 5(mod 11)$, е) $10x \equiv 15(mod\, 25)$,
ж) $21x \equiv 33(mod 7)$, з) $21x \equiv 35(mod\, 7)$,
и) $30x \equiv 18(mod\, 102)$.

2. С помощью критерия Эйлера установить, имеют ли решения сравнения

$$x^2 \equiv 6(mod 13),\ x^2 \equiv 12(mod\, 13)$$

3. Имеет ли сравнение $x^2 + 3 \equiv 0(mod\, 7)$ два различных решения?

4. Разложить рациональные числа в цепные дроби:

$$\frac{83}{19}, \quad \frac{121}{27}, \quad \frac{163}{59}, \quad \frac{19}{37}, \quad \frac{-37}{81}, \quad \frac{-83}{17}.$$

5. Даны цепные дроби:

а) [2,1,3,4,1,2] б) [0,3,1,2,7] в) [3,1,1,6,8] г) [2,1,3,4,1,2].
Найти соответственно равные им рациональные числа.

6. Решить сравнения с помощью метода цепных дробей:

а) 97x≡11(mod41); б) 37x≡25(mod101);
в) 101x ≡ 17(mod113); г) 505x≡85(mod565).

7. Используя метод сравнения, решить уравнения:

а) 37x+11 = 1; б) 53x+23y = 1;
в) 73x + 15y = 101; г) 83x-12y = 27.

8. Разложить дробь $\frac{13}{15}$ на сумму или разность 2-х дробей соответственно со знаменателем 3 и 5.

9. Разложить дробь $\frac{37}{55}$ на сумму или разность 2-х дробей соответственно со знаменателями 5 и 11.

10. Разложить дробь $\frac{68}{143}$ на сумму или разность 2-х дробей соответственно со знаменателями 11 и 13.

Контрольные вопросы

1. Дано сравнение $ax \equiv b\ (mod\ m)$. При каких условиях оно имеет единственное решение, имеет решений больше одного, не имеет решений?
2. Какие Вы знаете методы решения сравнения ax $\equiv b(mod\ m)$? Охарактеризуйте каждый.
3. Напишите формулу решения сравнения ax $\equiv b(modm)$.
4. Какие дроби называются цепными?
5. Почему сравнение $f(x) \equiv 0(mod\ m)$ имеет не более n различных решений?
6. Можно ли с помощью сравнений решить уравнение в целых числах? Если да, то поясните алгоритм.

4.4. Применение теории чисел в информатике

В теории чисел рассматриваются арифметические операции с остатками чисел по фиксированному модулю, которые образуют модульную арифметику. Модульная арифметика является важной областью математики, которая находит широкое применение в криптографии, компьютерных науках и других областях.

С помощью модульной арифметики можно выполнять такие операции, как сложение, вычитание, умножение и деление над числами, которые находятся в определенном модуле. Это позволяет упростить сложные вычисления и защитить данные при передаче по сети.

Одно из применений модульной арифметики – это шифрование данных. Например, при использовании алгоритма RSA данные шифруются с помощью модульной арифметики, чтобы сохранить их конфиденциальность. Данная криптосистема является шифрованием с открытым ключом. Алгоритм RSA опирается на тот факт, что найти большие простые числа вычислительно легко, но разложить большое число на произведение двух таких чисел практически невозможно. Блок открытого текста, представленный как целое число преобразуется в блок шифротекста из того же сегмента с помощью вычислений, в основе согласованности преобразований которых лежит теорема Эйлера.

Система шифрования Диффи-Хеллмана также является алгоритмом секретного обмена между абонентами с помощью секретного ключа. Он основан на трудности вычисления дискретного логарифма. Для того чтобы сократить размер возможных окончательных значений ключа, важно чтобы функция модульного возведения в степень была настолько почти взаимнооднозначной, насколько это возможно.

Значение модульной арифметики в информатике трудно переоценить. Модульная арифметика является важным инструментом, который находит применение в различных областях компьютерных наук и информационных технологий.

Первоначально модульная арифметика была разработана для работы с циклическими системами, например, при измерении времени или работы с углами. Однако, ее использование в информатике стало шире и включает в себя множество возможностей.

Одним из ключевых преимуществ модульной арифметики является ее эффективность и компактность. Поскольку операции над числами производятся только с остатками от деления на заданное значение (модуль), это позволяет снизить потребление памяти и ресурсов процессора. Это особенно важно при работе с ограниченными устройствами и при выполнении большого объема вычислений, как это часто бывает в информатике.

Еще одним преимуществом модульной арифметики является ее использование в криптографии. Системы шифрования, основанные на модульной арифметике, обеспечивают высокий уровень защиты данных. Это связано с трудностью обратного преобразования, когда задан только остаток от деления на модуль. Это делает модульную арифметику незаменимым инструментом для создания надежных и безопасных систем передачи и хранения информации.

Одним из наиболее распространенных примеров использования модульной арифметики в криптографии является RSA-шифрование. В RSA-шифровании используется операция возведения в степень по модулю некоторого числа, и эта операция защищает секретный ключ. RSA-шифрование использует простые числа, как основу для шифрования, которые используются в качестве ключа. Это означает, что только тот, у кого есть ключ, может расшифровать сообщение, зашифрованное с использованием этого ключа.

Другим примером использования модульной арифметики является шифрование Эль-Гамаля, которое также использует операцию возведения в степень по модулю. Шифрование Эль-Гамаля использует два ключа: публичный и приватный, для защиты данных. Публичный ключ используется для шифрования сообщений, а приватный ключ – для расшифровки.

Модульная арифметика также используется для создания хэш-функций, которые применяются в криптографии для обеспечения целостности данных. Хэш-функция – это математическая функция, которая преобразует входные данные любого размера в выходные данные фиксированного размера. Хэш-функции используются для проверки целостности данных, например, при передаче файлов или сообщений через сеть.

Кроме того, модульная арифметика применима в теории графов. Она позволяет решать задачи поиска циклов и путей в графах, а также задачи связности и анализа структур графов. Модульная арифметика эффективна при работе с графовыми структурами больших размеров и при выполнении сложных алгоритмов.

Модульная арифметика обеспечивает удобные инструменты для работы с числовыми свойствами графов и может быть эффективным способом решения различных задач в этой области.

Кроме того, модульная арифметика находит применение в оптимизации алгоритмов и обработке данных. Ее использование может значительно ускорить процесс обработки и вычисления большого объема данных в различных приложениях информатики.

В заключении отметим, что использование модульной арифметики в информатике является важным инструментом для решения различных задач. Этот раздел математики позволяет эффективно работать с целыми числами и выполнять операции над ними в ограниченной области значений. Модульная арифметика находит применение в таких областях, как криптография, оптимизация алгоритмов и решение задач на графах. Благодаря своей простоте и эффективности, модульная арифметика является важной составляющей в разработке программного обеспечения, позволяя оптимизировать вычисления и решать сложные задачи с минимальными затратами ресурсов.

Индивидуальные задания

Решить сравнение (таблица 15):

а) методом подбора;

б) способом Эйлера;

в) по определению;

г) методом алгоритма Евклида;

д) методом цепных дробей.

Таблица 15

№	сравнение	№	сравнение	№	сравнение
1	$29x\equiv 1 \pmod{17}$	11	$10x\equiv 25 \pmod{35}$	21	$97x\equiv 11 \pmod{41}$
2	$21x+5\equiv 0 \pmod{29}$	12	$12x\equiv 9 \pmod{18}$	22	$7x\equiv 10 \pmod{13}$
3	$6x\equiv 27 \pmod{12}$	13	$111x\equiv 75 \pmod{321}$	23	$2x\equiv 7 \pmod{15}$
4	$8x\equiv 20 \pmod{12}$	14	$84x\equiv 34 \pmod{156}$	24	$5x\equiv 1 \pmod{11}$
5	$13x\equiv 1 \pmod{2016}$	15	$243x\equiv 271 \pmod{317}$	25	$21x\equiv 5 \pmod{35}$
6	$4x\equiv 3 \pmod{7}$	16	$486x\equiv 542 \pmod{634}$	26	$6x\equiv 2 \pmod{9}$
7	$5x\equiv 6 \pmod{7}$	17	$60x\equiv 44 \pmod{164}$	27	$17x\equiv 89 \pmod{4}$
8	$113x\equiv 89 \pmod{312}$	18	$505x\equiv 85 \pmod{565}$	28	$3x\equiv 8 \pmod{12}$
9	$5x\equiv 3 \pmod{11}$	19	$23x\equiv 175 \pmod{71}$	29	$7x\equiv 19 \pmod{3}$
10	$29x\equiv 1 \pmod{17}$	20	$81x\equiv 14 \pmod{202}$	30	$7x\equiv 1 \pmod{1000}$

Тестовые задания

1. Число $327^3 + 173^3$ делится на:

а) 500; б) 300; в) 154; г) 200.

2. Если a⋮b, a≠0, то

а) $a \le b$;

б) $|a| \le |b|$;

в) $b \le a$;

г) $|b| \le |a|$.

3. Число $(3^5-3^4)(3^3+3^2)$ делится на:

а) 48; б) 8; в) 22; г) 24.

4. Число $(12^{13}-12^{12}+12^{11})$ делится на:

а) 5; б) 9; в) 19; г) 11.

5. Укажите верное равенство, удовлетворяющее теореме о делении с остатком, если a =-234, q = 7:

а) $-234=35\cdot(-7)+11$;

б) $-234=36\cdot 7-18$;

в) $-234=(-38)\cdot 7+32$;

г) $-234=(-37)\cdot 7-32$.

6. Укажите верные высказывания:

а) два чётных числа могут быть взаимнопростыми;

б) два различных простых числа всегда взаимнопросты;

в) существует пара взаимнопростых составных чисел;

г) чётное и нечётное числа всегда взаимнопросты.

7. Укажите верные утверждения:

а) если a ⋮b, то НОД(a, b)=1;

б) если a= bk+c , то НОД(a, b)= НОД(b, c);

в) если d= НОД(a, b) $\Leftrightarrow \exists\, x, y \in Z$, такие, что d=(a+b)xy;

г) если δ – общий делитель чисел a и b, то НОД $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{\text{НОД}(a,b)}{\delta}$.

8. Укажите верное равенство:

а) НОД (546, 231)=21;

б) НОД (1001, 6253)=247;

в) НОД (252, 468)=8;

г) НОД (187, 533)=3.

9. Укажите наибольший простой делитель числа 5460:

а) 13; а) 17; в) 21; г) 15.

10. Из двух сцепленных шестеренок одна имеет шестнадцать зубцов, другая – двенадцать. До начала вращения пометили соприкасающиеся зубцы. Наименьшее число оборотов двенадцатизубцовой шестеренки, через которое метки сов падут равно:

а) 3; б) 12; в) 4; г) 16.

11. Чему равно [252, 468]?

а) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$;

б) $7 \cdot 13$;

в) $2^2 \cdot 3^2$;

г) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

12. Наименьшая длина доски, чтобы при её разрезании на бруски по 45 см или на бруски по 60 см, не получить обрезков равна:

а) 90; б) 240; в) 180; г) 720.

13. Сколько различных целых делителей должно иметь целое число a, чтобы являться простым?

а) только 2;

б) хотя бы 2;

в) только 4;

г) хотя бы 4.

14. Укажите формулировку теоремы Евклида:

а) множество простых чисел конечно;

б) множество чисел конечно;

в) множество простых чисел бесконечно;

г) множество составных чисел бесконечно.

15. Укажите последовательность натуральных чисел, все члены которой являются составными числами

а) 0, 2, 3, 5, 13;

б) 35, 19, 29, 133;

в) 4, 6, 16, 25, 30;

г) 3, 7, 11, 23.

16. Число, которое делится на 3 и на 5:

а) 5965; б)5690; в) 3555; г) 3250.

17. Цифра, которую необходимо поставить вместо *в числе 5*62, чтобы оно делилось на 9 равна:

а) 0; б) 2; в) 9; г) 5.

18. НОД(187, 533) = ?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 1.

19. Укажите наибольший простой делитель числа 5100:

а) 21; б) 17; в) 13; г) 15.

20. Укажите верное высказывание:

а) существует наибольшее простое число;

б) если произведение натуральных чисел делится на натуральное число, то хотя бы один из множителей делится на это число;

в) если в произведении один из множителей нечетный, то и произведение тоже нечетно;

г) делители взаимно простых чисел взаимно просты.

21. Укажите неверные сравнения:

а) $2\equiv 13 \pmod 5$;

б) $6\equiv 13 \pmod 7$;

в) $43\equiv 7 \pmod 3$;

г) $5\equiv 22 \pmod 5$;

22. Укажите верные сравнения:

а) $5\equiv 23 \pmod 3$;

б) $18\equiv 4 \pmod 7$;

в) $17\equiv 13 \pmod 5$;

г) $26\equiv 7 \pmod 5$.

23. Полной системой абсолютно наименьших вычетов по mod 9 является:

а) -4 -3 -2 -1 1 2 3 4;

б) -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4;

в) 0 1 2 3 4 5 6 7 8;

г) -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0.

24. Остаток при делении 109^{345} на 14 равен:

а) 2; б) 1; в) 3; г) 4.

25. Приведённой системой наименьших положительных вычетов по mod 9 является:

а) 2, 5, 7, 8, 11;

б) 2, 4, 5, 7, 8, 10;

в) 1, 2, 4, 5, 7, 8;

г) 1, 4, 5, 7, 8.

26. Остаток от деления 215^{23} на 11 равен:

а) 5; б) 7; в) 6; г) 4.

27. Остаток от деления 343^{42} на 17 равен:

а) 5; б) 9; в) 8; г) 4.

28. Укажите две последние цифры числа 343^{42}:

а) 51; б) 49; в) 47; г) 43.

29. Укажите решение сравнения $5x\equiv 3 \pmod 7$:

а) $x\equiv 3 \pmod 7$;

б) $x\equiv 2 \pmod 7$;

в) $x\equiv 1 \pmod 7$;

г) $x\equiv 4 \pmod 7$.

30. Укажите количество решений сравнения $4x\equiv 7 \pmod 8$:

а) 1; б) 4; в) 2; г) 3; д) 0.

14. Укажите количество решений сравнения $39x\equiv 84 \pmod{93}$:

а) 2; б) 1; в) 3; г) 0.

31. Укажите решения сравнения $117x \equiv 75 (\mathrm{mod}\ 501)$

а) $x \equiv -334 (\mathrm{mod}\ 501)$;

б) $x \equiv -85 (\mathrm{mod}\ 501)$;

в) $x \equiv 82 (\mathrm{mod}\ 501)$;

г) $x \equiv 249 (\mathrm{mod}\ 501)$.

32. Укажите верные числовые сравнения:

а) $39 \equiv 15\ (\mathrm{mod}\ 14)$;

б) $17 \equiv 21\ (\mathrm{mod}\ 2)$;

в) $-4 \equiv 35\ (\mathrm{mod}\ 13)$.

33. Укажите сравнение, с помощью которого можно найти наименьшее трёхзначное число, которое будучи умножено на 3 при делении на 31 даёт в остатке 5:

а) $3x \equiv 31 (\mathrm{mod}\ 5)$;

б) $31x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$;

в) $3x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 31)$;

г) $31x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 3)$.

34. Укажите уравнения, имеющие решения в целых числах:

а) $9x+11y=3$;

б) $35x+7y=14$;

в) $3x+12y=4$;

г) $32x+16y=54$.

35. Числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если:

а) $a=mq_1+r_1$, $b=mq_2+r_2$, $r_1 \neq r_2$;

б) разность чисел a и b не делится на m;

в) $a=mq_1+r_1$, $b=mq_2+r_2$, $r_1=r_2$.

36. Модуль m является числом:

а) целым неотрицательным;

б) целым положительным;

в) целым неположительным.

37. Укажите числа, для которых сравнение $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ верно:

а) $a=516$, $b=0$, $m=-8$;

б) $a=48$, $b=13$, $m=-2$;

в) $a=45$, $b=7$, $m=3$;

г) $a=17$, $b=-16$, $m=11$.

38. Все натуральные числа сравнимы между собой по модулю:

а) $\emptyset$; б) -1; в) 0; г) 1.

39. В записи $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 8)$ число 2 является:

а) остатком от деления 8 на x;

б) НОД(x,8);

в) остатком от деления x на 8.

40. Значение функции Эйлера $\varphi(m)$ выражает:
а) количество чисел взаимно простых с m и не превосходящих m;
б) количество натуральных делителей m;
в) сумму всех натуральных делителей m.
41. Решением сравнения с неизвестной является:
а) число;
б) класс вычетов;
в) многочлен.
42. Наука о числовых системах с их связями и законами это:
а) теория чисел;
б) математический анализ;
в) комбинаторика;
г) интегральное исчисление;
д) дифференциальное исчисление.
43. Сравнение первой степени имеет вид:
а) $ax \equiv b \pmod{m}$;
б) $a \equiv b \pmod{m}$;
в) $c \equiv a_1^{-1} \pmod{m}$.
44. Какие из перечисленных операций можно выполнять со сравнениями:
а) к обеим частям сравнения можно прибавить одно и то же число;
б) можно перенести число из одной части сравнения в другую с противоположным знаком;
в) обе части сравнения можно возвести в степень;
г) обе части сравнения можно умножить на одно и то же число;
д) обе части сравнения можно делить на взаимно простое с модулем число;
е) обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель;
ж) обе части сравнения можно делить на одно и то же число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вендина, А. А. Математический анализ для педагогов : Учебное пособие / А. А. Вендина, П. Ф. Севрюков. – Ставрополь : Дизайн-студия Б, 2017. – 104 с. – ISBN 978-5-6040510-7-8.
2. Жмурова, И.Ю. Теория чисел: учебное пособие для вузов / И.Ю. Жмурова, А.В. Игнатова. – Москва : Издательство Юрайт, 2024. – 52 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-13691-3. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/543918 (дата обращения: 21.03.2024).
3. Задачи элементарной теории чисел в контексте профессиональной подготовки современного учителя математики / К. Т. Тынчеров, М. В. Селиванова, А. А. Оленев, А. Н. Власова // Материалы 46-й Всероссийской научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов с международным участием : в 2-х томах, Октябрьский, 26 апреля 2019 года / ответственный редактор: В.Ш. Мухаметшин. Том 2. – Октябрьский: Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2019. – С. 42-47.
4. Зверева, Л.Г. Элементы линейной алгебры: учебное пособие для студентов педагогического вуза / Л.Г. Зверева. – Ставрополь: Издательство «АГРУС» Ставропольского государственного аграрного университета, 2019. – 88 с. – ISBN 978-5-9596-1584-0.
5. Киричек, К.А. Учебно-методическое пособие по математике: для студентов направления подготовки «Педагогическое образование» профиля «Начальное образование» / К.А. Киричек, А.А. Вендина. – Ставрополь: Сервисшкола, 2019. – 96 с. – ISBN 978-5-93078-934-8.
6. Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, И.М. Тришин; под редакцией Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 422 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08547-1. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/535848 (дата обращения: 12.03.2024).
7. Кремер, Н.Ш. Математический анализ: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; ответственный редактор Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 593 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-16158-8. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/544892 (дата обращения: 21.08.2024).

8. Ларин, С.В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля: учебное пособие для вузов / С.В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 160 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05567-2. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/540008 (дата обращения: 02.04.2024).

9. Методика обучения алгебраическим и трансцендентным выражениям (иррациональные выражения, уравнения, системы уравнений, неравенства) / Л.Г. Зверева, Е.М. Петлина, К.А. Халатян, Л.А. Григорян. – Ставрополь: Ставрополь: АГРУС, 2023. – 80 с. – ISBN 978-5-9596-1897-1.

10. Методика обучения алгебраическим и трансцендентным выражениям (тождества, рациональные выражения, уравнения, системы уравнений, неравенства) / Л.Г. Зверева, Е.М. Петлина, К.А. Халатян, Л.А. Григорян. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2023. – 80 с. – ISBN 978-5-9596-1890-2.

11. Татарников, О.В. Линейная алгебра и линейное программирование. Практикум: учебное пособие для вузов/ Л.Г. Бирюкова, Р.В. Сагитов; под общей редакцией О.В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 53 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-9800-9. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/538774 (дата обращения: 25.05.2024).

12. Татарников, О.В. Линейная алгебра: учебник и практикум для прикладного бакалавриата/ О.В. Татарников, А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев; под общей редакцией О.В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 334 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-3568-4. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/535255 (дата обращения: 21.03.2024).

13. Тоискин, В.С. Математические основы информатики – учителям информатики и математики / В.С. Тоискин, В.В. Красильников, В.В. Малиатаки. Часть 2. – Ставрополь: Ставропольский государственный педагогический институт, 2020. – 122 с. – ISBN 978-5-6044710-2-9.

14. Тоискин, В.С. Педагогическое обеспечение информационной безопасности личности в цифровой информационно-образовательной среде: учебное пособие / В.С. Тоискин, К.А. Киричек, О.В. Пелих. – Ставрополь: Индивидуальный предприниматель Тимченко Оксана Геннадьевна, 2022. – 97 с. – ISBN 978-5-907425-90-3.

15. Тоискин, В.С. Информационные технологии и безопасная образовательная среда в обществе XXI века – учителям информатики /

В.С. Тоискин, В.В. Красильников, О.В. Пелих; Ставропольский государственный педагогический институт. – Ставрополь: Индивидуальный предприниматель Тимченко Оксана Геннадьевна, 2021. – 122 с. – ISBN 978-5-907425-34-7.

16. Чебышёв, П.Л. Теория чисел. Теория вероятностей. Теория механизмов / П.Л. Чебышёв; ответственный редактор И.М. Виноградов; составитель А.О. Гельфонд. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 457 с. – (Антология мысли). – ISBN 978-5-534-05214-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/539773 (дата обращения: 20.04.2024).

17. Шагин, В.Л. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для вузов / В.Л. Шагин, А.В. Соколов. – Москва: Издательство Юрайт, 2024. – 245 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00884-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/537307 (дата обращения: 25.05.2024).

Учебное издание

Петлина Елена Михайловна,
Зверева Лариса Геннадиевна,
Киричек Ксения Александровна

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ИНФОРМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 11.12.2024 г.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. 11,1.
Тираж 500 экз. Заказ 281.

Типография ИП Тимченко О.Г.
Идентификатор - 6044707
355000, РФ, г. Ставрополь, ул. Тухачевского, 26,
ИНН 263401442118

Телефон/факс (8-86-52)42-64-32
ideya_plus@mail.ru